ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XI, 3 (1970)

К. ДЫРКА и К. ЯНЧЕВСКИ (Вроцлав)

О ЧАСТОТЕ КОЛЕБАНИЙ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

1. Введение. В работе изучается дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{\theta}+\sin\theta+r\sin 2\theta = D, \tag{1.1}$$

где $\theta = \theta(t)$ — искомая функця, а r и D — заданные параметры. В определённом приближении уравнение (1.1) описывает так называемые *колебания явнополюсной синхронной машины* (см. [2], [6] и литературу в этих работах).

Допустим, что уравнение (1.1) имеет периодическое решение о периоде T и обозначим

$$\theta_1 = \min\theta(t), \quad \theta_2 = \max\theta(t). \tag{1.2}$$

Точки θ_1 и θ_2 из определения являются точками возврата рассматриваемых колебаний системы, описанной уравнением (1.1). Целью настоящей работы является приближённое вычисление периода T в зависимости от параметров r, D, θ_1, θ_2 и оценка погрешности этого приближения. В частном случае $r = 0$ эта проблема была исследована в работе [8].

Теперь представим подробнее содержание статьи. В § 2 содержится элементарный качественный анализ решений уравнения (1.1), результаты которого необходимы для дальнейших рассуждений([1]). В частности, исследована зависимость точки равновесия θ_0, определённой уравнением

$$\sin\theta_0+r\sin 2\theta_0 = D, \tag{1.3}$$

от параметров r и D. Обычно в практике даются параметры r, D и θ_1 или θ_2. Для нахождения остальных параметров приводятся в § 3 вычислительные методы. Параграф четвёртый содержит формулы из работ [7] и [8], которые служат для приближённого вычисления пе-

([1]) Общий качественный анализ для уравнения синхронной машины представлен в работе [2].

риода T и оценки погрешности приближения. Величины, которые выступают в соответствующих формулах, вычисляем для случая (1.1) в § 5. Наконец, в § 6, представляем примеры вычислений, сделанных на электронной машине „Одра — 1003”. Дополнительно приводим вычисленя одного примера из работы [8], используя новые улучшенные формулы.

2. Точки равновесия. Введем обозначение

$$f(\theta) = \sin\theta + r\sin 2\theta. \tag{2.1}$$

Функция $f(\theta)$ в интервале $[0, \pi)$ достигает максимума в точке θ_{01} и минимума в точке θ_{02}, где

$$\theta_{01} = \begin{cases} \arccos \dfrac{-1+\sqrt{1+32r^2}}{8r} & \text{для } r \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{для } r = 0; \end{cases}$$

$$\theta_{02} = \begin{cases} \arccos \dfrac{-1-\sqrt{1+32r^2}}{8r} & \text{для } |r| > \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{для } |r| \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Обозначим через P_k, $k = 0, 1, \ldots, 5$, множества точек на плоскости (D, r), определённых следующим образом:

$$P_0 = \{(D, r)\colon |D| > f(\theta_{01})\}, \qquad P_1 = \{(D, r)\colon |D| = f(\theta_{01})\},$$
$$P_2 = \{(D, r)\colon f(-\theta_{02}) < |D| < f(\theta_{01})\}, \qquad P_3 = \{(D, r)\colon |D| = f(-\theta_{02})\},$$
$$P_4 = \{(D, r)\colon 0 < |D| < f(-\theta_{02})\}, \qquad P_5 = \{(D, r)\colon D = 0,\ |r| > \tfrac{1}{2}\}.$$

Докажем, что

2.1. *Если точка (D, r) принадлежит к множеству P_k, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 5$, плоскости (D, r), то уравнение* (1.3) *имеет точно k решений в интервале $[-\pi, \pi]$.*

Функция $f(\theta)$ в интервале $(-\pi, \pi)$ достигает относительного максимума в лучшем случае в двух точках θ_{01} и $-\theta_{02}$. Производя элементарные вычисления установливаем, что

$$f(\theta_{01}) > f(-\theta_{02}). \tag{2.2}$$

Пусть $(D, r) \in P_2$ и $D > 0$. Согласно (2.2) и принятому условию имеем

$$0 \leqslant f(-\theta_{02}) < D < f(\theta_{01}).$$

Поскольку функция $f(\theta)$ непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, то прямая $y = D$ пересекает график функции $y = f(\theta)$ в интервале $[-\pi, \pi]$ только в двух точках (см. рис. 1). Таким образом, уравнение (1.3)

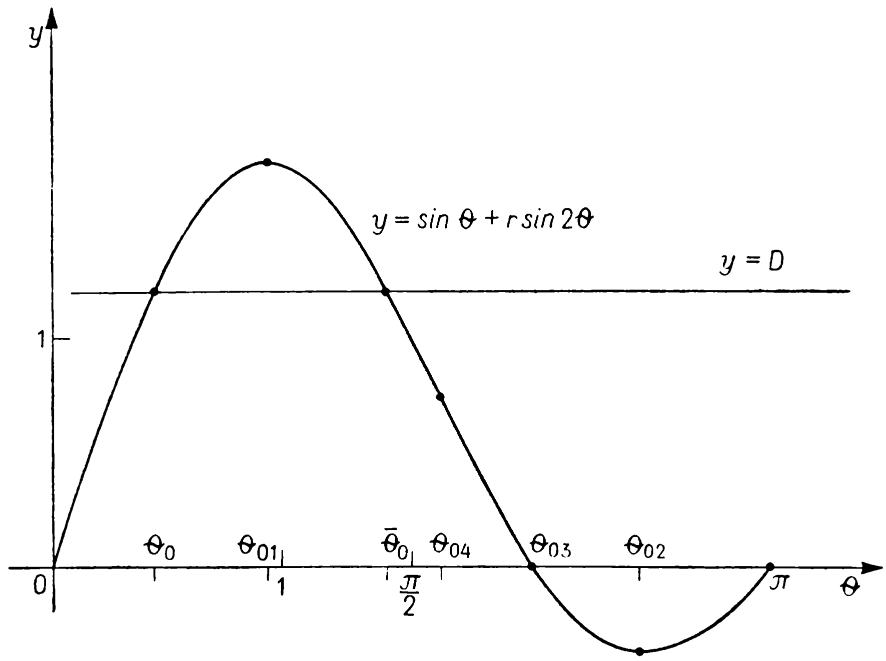

Рис. 1. Случай $r = 1$, $D = 1,2$

имеет только два корня в этом интервале. В случае $(D, r)\epsilon P_2$ и $D < 0$, согласно (2.2) и нечётности функции $f(\theta)$, получается неравенство

$$0 \geqslant f(\theta_{02}) > D > f(-\theta_{01}),$$

из которого вытекает существование только двух корней уравнения (1.3) в интервале $[-\pi, \pi]$. В остальных случаях доказательство проводится подобным способом.

Пусть $g(\theta)$ и $G(\theta)$ обозначают соответственно квазиупругую характеристику и потенциальную энергию для уравнения (1.1). Имеем

(2.3) $$g(\theta) = \sin\theta + r\sin 2\theta - D,$$

откуда следует

(2.4) $$G(\theta) = -\cos\theta - \tfrac{1}{2}r\cos 2\theta - D\theta.$$

Существование решения уравнения (1.3) будет одновременно необходимым условием существования экстремума функции $G(\theta)$. Корни уравнения (1.3), для которых функция $G(\theta)$ достигает относительного минимума, являются точками стабильного равновесия уравнения (1.1). Эти точки можно найти следующим способом. Поставим в возрастающую последовательность $\{A_n\}$ корни уравнения (1.3), находящиеся в интервале $[-\pi, \pi]$, выбросив из неё числа $\pm\theta_{01}$ и $\pm\theta_{02}$, если они являются корнями. Имеем:

2.2. *Точкой* θ_0 *стабильного равновеся уравнения* (1.1) *есть*:

(i) *каждый второй член последовательности* $\{A_n\}$, *считая от наименьшего, в случаях* $D=0$ *и* $r>\frac{1}{2}$ *или* $D>0$ и r *произвольное*;

(ii) *каждый второй член последовательности* $\{A_n\}$, *считая от наибольшего, в случае* $D<0$ *и* r *произвольное*;

(iii) *точка* $\theta_0=0$ *для* $D=0$ *и* $|r|\leqslant\frac{1}{2}$;

(iv) *точки* $\theta_0=\pm\theta_{03}=\pm\arccos\dfrac{-1}{2r}$, *для* $D=0$ *и* $r<-\frac{1}{2}$.

Для доказательства расмотрим случай, когда $(D,r)\epsilon P_2$ и $D>0$. Согласно 2.1 существуют два корня уравнения (1.3). Меньший из этих корней — обозначим его через θ_0 — меньше θ_{01}. В окрестности точки θ_0 функция $f(\theta)$ возрастающая. Поскольку $G'(\theta)=g(\theta)=f(\theta)-D$, то при переходе через точку θ_0 производная функции $G(\theta)$ меняет знак минус на плюс, и поэтому функция $G(\theta)$ имеет в точке θ_0 минимум. В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

3. Приближённое вычисление точек равновесия, точек возврата колебаний и амплитуды. Рассмотрим любой интервал, содержащийся в интервале $[-\pi,\pi]$, содержащий только одно решение уравнения (1.3) и такой, чтобы произведение $f'\cdot f''$ имело в нём постоянный знак. Обозначим этот интервал через $[\alpha,\beta]$ и пусть в нём $f'\cdot f''\leqslant 0$.

3.1. *Последовательность, определённая рекуррентной формулой*

$$\theta^{(0)}=\beta,\qquad \theta^{(n+1)}=u_0(\theta^{(n)}),\qquad u_0(s)=\frac{(s-\alpha)[D-f(\alpha)]}{f(s)-f(\alpha)}+\alpha,$$

монотонно сходящая к решению уравнения (1.3)([2]).

Теорема 3.1 верна и для $f'\cdot f''\geqslant 0$, если в определении последовательности $\{\theta^{(n)}\}$ заменить местами α и β. Нахождение интервала $[\alpha,\beta]$ о вышеупомянутых свойствах не представляет затруднений. Для примера положим, что $(D,r)\epsilon P_4$, $r>0$, $D>0$. Тогда в интервалах $[-\pi,-\theta_{02}]$ и $[0,\theta_{01}]$ произведение $f'\cdot f''$ неположительное, а в интервале $[-\theta_{02},-\theta_{03}]$ имеем $f'\cdot f''\geqslant 0$. Каждый из этих интервалов содержит только один корень уравнения (1.3). Четвёртый корень находится в интервале $[\theta_{04},\theta_{03}]$ $\big(\theta_{04}=\arccos(-1/8r)\big)$, если $f(\theta_{04})>D$ и тогда $f'\cdot f''\leqslant 0$ или в интервале $[\theta_{01},\theta_{04}]$, если $f(\theta_{04})<D$ и тогда $f'\cdot f''\geqslant 0$.

Допустим, что решение $\theta=\theta(t)$ уравнения (1.1) описывает колебания вокруг точки равновесия θ_0. Легко доказать, что для $D>0$, θ_1, определённое уравнением (1.2), выполняет условия

$$\theta_1<\theta_0,\qquad G(\theta_1)<G(\bar{\theta}_0), \tag{3.1}$$

([2]) См. [4], метод хорд.

где $\bar{\theta}_0$ — очередной корень уравнения (1.3), больший чем θ_0 ($\bar{\theta}_0$ является точкой нестабильного равновесия). Соответственно для $D < 0$ величина θ_1 выполняет условие

$$\bar{\theta}_0 < \theta_1 < \theta_0, \tag{3.2}$$

где $\bar{\theta}_0$ будет следующим меньшим чем θ_0 корнем уравнения (1.3).

Наоборт, если параметр θ_1 выполняет условия (3.1) или (3.2), тогда существует периодическое решение $\theta = \theta(t)$ начальной задачи

$$\ddot{\theta} + \sin\theta + r\sin 2\theta = D, \qquad \theta(0) = \theta_1, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \tag{3.3}$$

описывающее колебания вокруг точки равновесия θ_0. Тогда параметр θ_1 представляет левую точку возврата колебаний.

Имея числовые значения θ_0 и θ_1, можно найти θ_2:

$$\theta_2 = \min\{\theta > \theta_0 : G(\theta) = G(\theta_1)\}.$$

Приближённое числовое значение θ_2 находим из рекуррентной формулы 3.1, где вместо функции $u_0(s)$ следует подставить функцию $u_1(s)$ определённую формулой

$$u_1(s) = \frac{(s-a)[G(\theta_1) - G(a)]}{G(s) - G(a)} + a.$$

Амплитудой колебаний a называется величина

$$a = \tfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1). \tag{3.4}$$

Имея θ_0 и амплитуду колебаний a, из системы уравнений

$$\theta_2 - \theta_1 = 2a, \qquad G(\theta_1) = G(\theta_2)$$

можно найти точки возврата колебаний θ_1 и θ_2. Решение этой системы сводится к решению уравнения

$$\sin\bar{\theta} + \bar{r}\sin 2\bar{\theta} = \bar{D}, \tag{3.5}$$

где

$$\bar{\theta} = \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \qquad \bar{r} = r\cos a, \qquad \bar{D} = \frac{aD}{\sin a}.$$

Величину $\bar{\theta}$ находим тем же способом, что и θ_0 (см. 3.1).

4. Приближённые формулы для частоты колебаний. Вместо задачи (3.3) рассмотрим следующие две задачи с нечётными характеристиками (см. [5], [8]): первую

$$\ddot{\delta}+g_1(\delta)=0,\quad \delta(0)=\theta_1-\theta_0,\quad \dot{\delta}(0)=0, \tag{4.1}$$

и вторую

$$\ddot{\delta}+g_2(\delta)=0,\quad \delta(0)=\theta_2-\theta_0,\quad \dot{\delta}(0)=0, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} g_1(\delta) &= -\operatorname{sgn}\delta\cdot g(\theta_0-|\delta|),\\ g_2(\delta) &= \operatorname{sgn}\delta\cdot g(\theta_0+|\delta|). \end{aligned} \tag{4.3}$$

В дальнейшим применяем обозначения $a_1=\theta_0-\theta_1$ и $a_2=\theta_2-\theta_0$. Задачи (4.1) и (4.2) имеют периодические решения, описывающие колебания вокруг точки $\delta=0$, соответственно с амплитудами a_1 и a_2.

Обозначим периоды вышеупомянутых колебаний через T_1 и T_2. Можно легко доказать, что

$$T=\tfrac{1}{2}(T_1+T_2),$$

где T является периодом колебаний, описанных уравнениями (3.3). Обозначим

$$\omega=\frac{2\pi}{T},\qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T_1},\qquad \omega_2=\frac{2\pi}{T_2}$$

и положим, что $\omega_1\approx\omega_{as}^{(1)}$, $\omega_2\approx\omega_{as}^{(2)}$, где $\omega_{as}^{(i)}$ являются некоторыми приближениями ω_1 и ω_2. Определая ω_{as} равенством

$$\frac{1}{\omega_{as}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_{as}^{(1)}}+\frac{1}{\omega_{as}^{(2)}}\right), \tag{4.4}$$

получаем приближение $\omega\approx\omega_{as}$, для которого имеем следующую оценку погрешности:

$$\frac{|\omega-\omega_{as}|}{\omega}\leqslant\frac{\omega_{as}^{(2)}}{\omega_{as}^{(1)}+\omega_{as}^{(2)}}\cdot\frac{|\omega_1-\omega_{as}^{(1)}|}{\omega_1}+\frac{\omega_{as}^{(1)}}{\omega_{as}^{(1)}+\omega_{as}^{(2)}}\cdot\frac{|\omega_2-\omega_{as}^{(2)}|}{\omega_2}$$

(см. [5], [8]). В работе [9](³) дана оценка приближения

$$0\leqslant\frac{\omega_{as}^{(i)}-\omega_i}{\omega_i}\leqslant\frac{M_0^{(i)}}{2}\left[\left(\frac{\Omega_i}{\omega_{as}^{(i)}}\right)^4-1\right]\equiv q_i, \tag{4.5}$$

(³) Вскоре работа [9] будет напечатана. Её результаты были представлены на заседании семинара по дифференциальным уравнениям Прикладного Отделения Математического института ПАН.

где

$$(\omega_{as}^{(i)})^2 = \frac{[g_i, x]}{[x, x]}, \qquad [u, v] = \int_{-a}^{a} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

$$M_0^{(i)} = M\left(\frac{\lambda_i \omega_{as}^{(i)}}{\pi}\right), \qquad M(s) = \frac{s^2(1+2s)}{(1+s)^2},$$

$$\lambda_i = \sup_{(0,a_i)} \pi \left(\frac{a_i^2 - x^2}{2\int_x^{a_i} g_i(x)\,dx}\right)^{1/2},$$

$$(\Omega_i)^4 = \frac{[g_i, g_i]}{[x, x]} \quad \text{для} \quad i = 1, 2.$$

5. Вычисление величин $\omega_{as}^{(i)}$, Ω_i, λ_i для уравнения (1.1). Из (2.3) и (4.3) получаем следующее выражение для $g_i(\delta)$:

$$g_i(\delta) = \cos\theta_0 \sin\delta + r\cos 2\theta_0 \sin 2\delta + (-1)^i \operatorname{sgn}\delta \cdot [\sin\theta_0 \cos\delta + r\sin 2\theta_0 \cos 2\delta - D], \tag{5.1}$$

где $i = 1, 2$ и $D = \sin\theta_0 + r\sin 2\theta_0$. Отсюда

$$[g_i, x] = [\sin x, x]\cos\theta_0 + (-1)^i[\operatorname{sgn} x\cdot(\cos x - 1), x]\sin\theta_0 + r\{[\sin 2x, x]\cos 2\theta_0 + (-1)^i[\operatorname{sgn} x\cdot(\cos 2x - 1), x]\sin 2\theta_0\}.$$

После вычислений получаем

$$(\omega_{as}^{(i)})^2 = A_1(a_i)\cos\theta_0 - (-1)^i A_2(a_i)\sin\theta_0 + 2r\{A_1(2a_i)\cos 2\theta_0 - (-1)^i A_2(2a_i)\sin 2\theta_0\}, \tag{5.2}$$

где

$$A_1(a) = \frac{2J_1(a)}{a} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{2^{2n} n!(n+1)!}$$

и

$$A_2(a) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} a^{2n-1}}{(2n-1)!!(2n+1)!!}$$

(см. [11]). Обозначим

$$B_{mn}^{kl}(a) = \frac{4mn}{\pi a^2} \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{k}{n} a \sin\alpha\right) \sin^m\left(\frac{l}{m} a\sin\alpha\right) d\alpha, \tag{5.3}$$

для $k, l, m, n = 1, 2$. Учитывая (5.1) и (5.3), получаем

$$\Omega_i^4 = \sum_{k,l,m,n} r^{k+l-2}(-1)^{(m+n)i} B_{mn}^{kl}(a_i)\cos\left(\frac{\pi}{m}+k\theta_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}+l\theta_0\right).$$

Интегралы (5.3) можно найти по таблицам [11]. Учитывая, что $g_2(\delta)$ является мягкой характеристикой (см. [3]), получаем

$$\sup_{(0,a_2)} \frac{a_2^2-x^2}{G_2(a_2)-G_2(x)} = \lim_{x\to a_2} \frac{a_2^2-x^2}{G_2(a_2)-G_2(x)}$$

(см. [10]), где

$$G_i(x) = \int_0^x g_i(s)\,ds.$$

В этом случае для λ_2 получаем выражение

$$\lambda_2^2 = \frac{\pi^2 a_2}{g_2(a_2)}. \tag{5.4}$$

При вычислении λ_1 следует учесть два случая:

1° Если $a_1 \leqslant \theta_0$, тогда $g_1(\delta)$ является твёрдой характеристикой и

$$\sup_{(0,a_1)} \frac{a_1^2-x^2}{G_1(a_1)-G_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{a_1^2-x^2}{G_1(a_1)-G_1(x)},$$

и поэтому

$$\lambda_1^2 = \frac{\pi^2 a_1^2}{2G_1(a_1)}. \tag{5.5}$$

2° Если $a_1 > \theta_0$, то функция $(a_1^2-x^2)/[G_1(a_1)-G_1(x)]$ может достигнуть своего максимума во внутренней точке интервала $(0, a_1)$. Для вычисления этого максимума необходимо тогда решить некоторые трансцендентное уравнение.

6. Вычислительные примеры. Для вычислений были приняты исходные данные: D, r и амплитуда a. Пусть $D = 0, 8$, $r = 0{,}25$ и $a = 0{,}5$. При этих данных получаем $\theta_{01} = 1{,}19606189$ и $\theta_{02} = 0$. Проверяем, что точка (D, r) принадлежит к P_2. Согласно 2.1, уравнение (1.3) имеет два корня в интервале $[-\pi, \pi]$. Точка стабильного равновесия θ_0 находится в интервале $(0, \theta_{01})$. Из рекуррентной формулы 3.1 вычисляем, что $\theta_0 = \theta^{(16)} = 0{,}60233662$. Таким же способом вычисляем $\bar{\theta}$, исполняющее уравнение (3.5), получая $\bar{\theta} = \bar{\theta}^{(16)} = 0{,}66973722$. Имея θ_0 и $\bar{\theta}$, вычисляем $\theta_1 = \bar{\theta} - a = 0{,}16973722$ и $\theta_2 = \bar{\theta} + a = 1{,}16973722$, а затем $a_1 = \theta_0 - \theta_1 = 0{,}43259940$ и $a_2 = \theta_2 - \theta_0 =$

$= 0{,}56740060$. Интегралы, выражающие величины $(\omega_{as}^{(i)})^2$ и Ω_i^4, вычисляем методом Гаусса, получая $(\omega_{as}^{(1)})^2 = 1{,}23344161$, $(\omega_{as}^{(2)})^2 = 0{,}60320647$ $\Omega_1^4 = 1{,}52299956$, $\Omega_2^4 = 0{,}37086473$. Из формулы (4.4) вычисляем $\omega_{as} = 0{,}91408956$. Так как $a_1 < \theta_0$, из формулы (5.4) и (5.5) получаем $\lambda_1 = 2{,}87991592$ и $\lambda_2 = 4{,}31794292$. Пользуясь (4.5), вычисляем, что $q_1 = 0{,}00041175$, $q_2 = 0{,}00804674$ и $|(\omega_{as}-\omega)/\omega| \leqslant 0{,}00355375$. Окончательно получаем $\omega = 0{,}9141 - \vartheta 0{,}0032$, где $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Некоторые другие примеры даются в таблице.

D	r	a	θ_0	θ_1	θ_2	ω_{as}	$\left\|\dfrac{\omega_{as}-\omega}{\omega}\right\| \leqslant$
0,4	-1	0,5	1,275570	0,746155	1,746155	1,304521	$1{,}3\times 10^{-3}$
0,8	-1	0,5	1,472576	0,978316	1,978316	1,348778	$7{,}5\times 10^{-4}$
0,4	$-0{,}25$	0,5	0,703152	0,184244	1,184244	0,813233	$1{,}3\times 10^{-4}$
0,8	$-0{,}25$	0,5	1,250885	0,775175	1,775175	0,803121	$9{,}9\times 10^{-4}$
0,8	0,25	0,5	0,602337	0,169737	1,169737	0,914090	$3{,}6\times 10^{-3}$
1,2	1	0,5	0,441526	0,018741	1,018741	1,289975	$1{,}0\times 10^{-2}$
0,479426	0	0,256024	0,500000	0,250000	0,762048	0,931045	$6{,}4\times 10^{-5}$

Последняя строка таблцы относится к примеру работы [8], где принято исходные данные: $\theta_0 = 0{,}5$, $\theta_1 = 0{,}25$, $r = 0$. Для вышеприведённых данных, пользуясь формулами указаными в § 3, вычисляем параметры D и a.

Цитированные работы

[1] А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, 2 изд., Москва 1959.

[2] G. V. Aronovitch, L. N. Belustina, N. A. Kartvelishvili, and Ya. K. Lubimtsev, *Application of oscillatory system analysis to stability problems in the steady-state operation of hydroelectric stations and power systems*, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев 1963, том 3, стр. 9-34.

[3] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, 3 изд., Москва 1963.

[4] Б. П. Демидович, И. А. Марон, *Основы вычислительной математики*, Москва 1960.

[5] H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.

[6] T. Laible, *Die Theorie der Synchronmaschine in nichtstationären Betrieb*, Berlin 1952.

[7] Е. П. Попов, И. П. Пальтов, *Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем*, Москва 1960.

[8] A. Rybarski and E. Strzelecki, *Frequency of oscillations of a synchronous motor*, Zastosow. Matem. 8 (1965), стр. 157-167.

[9] А. Рыбарски, *Квазилинеаризация уравнений консервативных систем*, готовится к печати.

[10] A. Rybarski, *Angenäherte Schwingungsfrequenzformeln für konservative Systeme*, Zastosow. Matem. 7 (1964), (1), стр. 235-253; (2), стр. 255-269.

[11] I. M. Rižyk, I. S. Gradsztejn, *Tablice całek, sum szeregów i iloczynów*, Warszawa 1964.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВРОЦЛАВ

Поступила в Редакцию 15. 11. 1968

K. DYRKA i K. JANCZEWSKI (Wrocław)

O CZĘSTOŚCI DRGAŃ GENERATORA SYNCHRONICZNEGO

STRESZCZENIE

W pracy bada się nieliniowe równanie różniczkowe

$$\ddot{\theta}+\sin\theta+r\sin 2\theta = D,$$

gdzie $\theta = \theta(t)$ jest szukaną funkcją, a r i D danymi parametrami. Równanie to opisuje tzw. *kołysania generatora synchronicznego*. Praca zawiera przybliżone wzory dla obliczenia okresu tych kołysań. Podano także oszacowania błędu znalezionych przybliżeń. Rozpatrzono kilka przykładów numerycznych.

K. DYRKA and K. JANCZEWSKI (Wrocław)

ON THE FREQUENCY OF OSCILLATIONS OF A SYNCHRONOUS GENERATOR

SUMMARY

The paper deals with the non-linear differential equation

$$\ddot{\theta}+\sin\theta+r\sin 2\theta = D,$$

where $\theta = \theta(t)$ is the unknown function, and r and D are given parameters. This equation describes the so called *sways of synchronous generators*. Some approximate formulae together with an estimation of the errors for calculating the periods of these sways are given. Several numerical examples illustrate the formulae.