ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1965)

Sur une généralisation des notions des vecteurs de Frenet et des courbures d'une courbe dans R_n

par S. TOPA (Kraków)

I. Introduction. M. S. Gołąb a proposé de généraliser les notions des vecteurs de Frenet et des courbures d'une courbe C plongée dans R_n, dans ce sens que la régularité de la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$ (représentation vectorielle de la courbe C), exigée dans la théorie classique, soit remplacée par une régularité la plus faible.

Ce problème a été résolu pour $n = 3$ dans le travail [1].

La solution partielle de ce problème est donnée pour $n > 3$ dans le travail [2]. Voici la teneur de cette solution:

1. Si les dérivées

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}, \ldots, \frac{d^{n-2}\boldsymbol{r}}{d\sigma^{n-2}}\ (^1)$$

existent dans un voisinage I du point σ_0 et la dérivée $d^{n-1}\boldsymbol{r}/d\sigma^{n-1}$ existe au point σ_0 et si l'inégalité

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma} \wedge \ldots \wedge \frac{d^{n-2}\boldsymbol{r}}{d\sigma^{n-2}} \wedge \frac{d^{n-1}\boldsymbol{r}}{d\sigma^{n-1}} \neq 0\ (^2) \qquad \text{pour} \qquad \sigma = \sigma_0$$

est satisfaite, alors on peut définir pour $\sigma = \sigma_0$ un n-èdre orthonormal, orienté positivement par l'orientation de l'espace composé, des vecteurs $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ et associé d'une façon invariante (par rapport aux mouvements rigides) à la courbe C; ces vecteurs sont appelés vecteurs de Frenet de la courbe C au point $p(\sigma_0)$.

2. S'il existe en outre une dérivée $d\boldsymbol{t}_{n-1}/d\sigma$ au point σ_0 (ce qui implique l'existence de la dérivée $d^{n-1}\boldsymbol{r}/d\sigma^{n-1}$ dans un voisinage du point σ_0), on peut alors définir au point σ_0 un système de fonctions scalaires $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ satisfaisant aux conditions

$$\varkappa_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-2)\,.$$

Ces fonctions sont appelées courbures successives de la courbe C au point $p(\sigma_0)$.

(1) σ est la longueur de l'arc de la courbe C.

(2) $\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_k$ désigne le produit extérieur des vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Dans le travail [2] il a été démontré que pour chaque système de fonctions scalaires $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$, sommables au sens de Lebesgue dans un voisinage I du point σ_0, il existe une courbe, déterminée aux mouvements près, avec la représentation $\boldsymbol{r}(\sigma)$ définie dans un voisinage I_1 du point σ_0 $(I_1 \subset I)$, à laquelle on peut associer d'une façon invariante un système orthonormal de vecteurs $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ tel qu'on ait les relations suivantes

$$\tag{1} \begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{t}_1}{d\sigma} = \varkappa_1 \boldsymbol{t}_2 , \\ &\frac{d\boldsymbol{t}_j}{d\sigma} = -\varkappa_{j-1}\boldsymbol{t}_{j-1} + \varkappa_j \boldsymbol{t}_{j+1} \qquad (j = 2, \ldots, n-1), \\ &\frac{d\boldsymbol{t}_n}{d\sigma} = -\varkappa_{n-1}\boldsymbol{t}_{n-1} , \end{aligned}$$

presque partout dans le voisinage I_1.

Les fonctions $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ peuvent être appelées vecteurs de Frenet généralisés et les fonctions $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ ([3]) dites courbures généralisées de la courbe $\boldsymbol{r}(\sigma)$ (évidemment aux points σ où sont vérifiées les équations (1)).

La courbe obtenue ci-dessus peut être de régularité très faible, car la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$ possède en général à peine une dérivée première absolument continue dans I_1 (la deuxième dérivée de la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$ existe alors presque partout dans I_1).

Ainsi nous sommes amenés au problème suivant:

Supposons que pour la fonction donnée $\boldsymbol{r}(\sigma)$ existent dans un voisinage du point σ_0 les dérivées $d\boldsymbol{r}/d\sigma$, $d^2\boldsymbol{r}/d\sigma^2$ qui sont linéairement indépendantes.

Posons la question suivante: peut-on définir d'une façon univoque au point σ_0 un système de n fonctions vectorielles et un système de $n-1$ fonctions scalaires, associés d'une façon invariante à cette courbe, que nous pourrions appeler respectivement vecteurs de Frenet généralisés et courbures généralisées de la courbe ? (Sous la régularité classique de la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$ ces notions et les notions correspondantes dans la théorie classique doivent être identiques.)

Dans cette note nous donnons la solution de ce problème sous quelques conditions additionnelles pour la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$, lesquelles n'impliqueront pourtant pas l'augmentation de la régularité (au sens de la différentiabilité) de la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$.

II. Détermination des vecteurs de Frenet généralisés. Étant donnée une courbe C d'équation

$$\tag{2} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma) , \qquad \sigma \in I \text{ ([4])} ,$$

([3]) satisfaisant éventuellement aux conditions $\varkappa_i \geqslant 0$ pour $i = 1, \ldots, n-2$.

([4]) I est un certain voisinage du point σ_0.

où σ est la longueur de l'arc de la courbe, admettons qu'il existe dans I une première et une deuxième dérivées satisfaisant à la condition

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma} \wedge \frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\sigma^2} \neq 0 , \quad \sigma \in I . \tag{3}$$

Au cours des considérations suivantes nous admettrons pour la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$, d'une façon indirecte et inductive, quelques hypothèses additionnelles.

Nous définissons les deux premiers vecteurs de Frenet en posant

$$\boldsymbol{t}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}, \quad \boldsymbol{t}_2 = \operatorname{vers}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\sigma^2}, \quad \sigma \in I . \tag{4}$$

Dans le but de définir les vecteurs de Frenet suivants, remarquons que le système de tous les vecteurs de Frenet doit vérifier les équations de la forme (1). Cela veut dire qu'un vecteur cherché $\boldsymbol{t}_{j+1}$, doit être de la forme

$$\boldsymbol{t}_{j+1} = a_j \boldsymbol{t}_{j-1} + \beta_j \boldsymbol{t}_j' \ (^5) , \quad 2 \leqslant j \leqslant n-2 \tag{5}$$

sous les conditions additionnelles

$$\boldsymbol{t}_{j+1}^2 = 1 , \quad \boldsymbol{t}_{j+1} \perp \boldsymbol{t}_{j-1} . \tag{6}$$

Il résulte de (5) que la construction des vecteurs $\boldsymbol{t}_3, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}$ aura un caractère inductif.

Si nous supposons que pour j fixé $(2 \leqslant j \leqslant n-2)$ nous ayons déjà défini les vecteurs $\boldsymbol{t}_{j-1}$ et $\boldsymbol{t}_j$, et si nous demandons l'existence au point σ_0 de la dérivée $\boldsymbol{t}_j'$ satisfaisant avec le vecteur $\boldsymbol{t}_{j-1}$ à la condition

$$\boldsymbol{t}_{j-1} \wedge \boldsymbol{t}_j' \neq 0 , \quad \sigma_0 \in I \tag{7}$$

alors, en vertu de (5) et (6), nous obtenons les équations suivantes pour a_j et β_j:

$$0 = a_j + \beta_j \boldsymbol{t}_{j-1} \boldsymbol{t}_j' , \tag{8}$$

$$1 = a_j^2 + \beta_j^2 \boldsymbol{t}_j'^2 + 2 a_j \beta_j (\boldsymbol{t}_{j-1} \boldsymbol{t}_j') . \tag{9}$$

En éliminant a_j de l'équation (9) à l'aide de l'équation (8) et en profitant de l'identité de Lagrange

$$|\boldsymbol{t}_{j-1} \wedge \boldsymbol{t}_j'|^2 = \boldsymbol{t}_{j-1}^2 \boldsymbol{t}_j'^2 - (\boldsymbol{t}_{j-1} \boldsymbol{t}_j')^2$$

et de (7), nous obtenons

$$\beta_j^2 = \frac{1}{|\boldsymbol{t}_{j-1} \wedge \boldsymbol{t}_j'|^2} . \tag{10}$$

---

(5) $\boldsymbol{t}_j' = d\boldsymbol{t}_j/d\sigma$.

Nous fixons le signe positif pour β_j et nous obtenons

$$\alpha_j = -\frac{\boldsymbol{t}_{j-1}\boldsymbol{t}_j'}{|\boldsymbol{t}_{j-1} \wedge \boldsymbol{t}_j'|}, \quad \beta_j = \frac{1}{|\boldsymbol{t}_{j-1} \wedge \boldsymbol{t}_j'|} \quad (j = 2, \ldots, n-2). \tag{11}$$

On peut facilement vérifier que la condition $\beta_j \geqslant 0$ est équivalente à la condition

$$\boldsymbol{t}_{j+1}\boldsymbol{t}_j' \geqslant 0. \tag{12}$$

Nous obtenons ainsi pour le vecteur $\boldsymbol{t}_{j+1}$ cherché la formule

$$\boldsymbol{t}_{j+1} = -\frac{\boldsymbol{t}_{j-1}\boldsymbol{t}_j'}{|\boldsymbol{t}_{j-1} \wedge \boldsymbol{t}_j'|}\boldsymbol{t}_{j-1} + \frac{1}{|\boldsymbol{t}_{j-1} \wedge \boldsymbol{t}_j'|}\boldsymbol{t}_j' \quad (2 \leqslant j \leqslant n-2). \tag{13}$$

Si nous supposons que la fonction $\boldsymbol{t}_2$ admet une dérivée $\boldsymbol{t}_2'$ au point σ_0, alors, d'après les formules (4) et (13), on peut désormais définir le vecteur $\boldsymbol{t}_3$. Ensuite, supposant l'existence de la dérivée $\boldsymbol{t}_3'$ de la fonction $\boldsymbol{t}_3$ au point σ_0, on peut définir le vecteur $\boldsymbol{t}_4$ d'après la formule (13) etc.

Ainsi, pour obtenir tous les vecteurs jusqu'au vecteur $\boldsymbol{t}_{n-1}$ il faut supposer l'existence des dérivées

$$\boldsymbol{t}_2', \boldsymbol{t}_3', \ldots, \boldsymbol{t}_{n-2}' \quad \text{au point } \sigma_0 \tag{14}$$

satisfaisant tautes à la condition (7).

Enfin en définissant le vecteur $\boldsymbol{t}_n$ par la formule

$$\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{t}_{n-1} \tag{15}$$

nous obtenons le système orthonormal cherché

$$\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n. \tag{16}$$

Définition 1. Les vecteurs (16) sont appelés vecteurs de Frenet généralisés de la courbe (2) au point $p(\sigma_0)$.

Remarque 1. L'existence des dérivées (14) des vecteurs $\boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}$ n'implique pas celle des dérivées de la fonction $\boldsymbol{r}(\sigma)$ d'ordre supérieur à 2.

Pour le voir il suffit d'admettre un système de $n-1$ fonctions scalaires $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$, continues mais non différentiables dans un voisinage I du point σ_0, et de résoudre le système des équations (1) (où les fonctions $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ sont envisagées comme données) sous les conditions initiales

$$\boldsymbol{t}_i(\sigma_0) = \boldsymbol{t}_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

où le système donné des vecteurs $\boldsymbol{t}_1^0, \ldots, \boldsymbol{t}_n^0$ est orthonormal.

Le système des fonctions

$$\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n \tag{17}$$

étant la solution de ce problème initial, définie dans un voisinage I_1 du point σ_0 $(I_1 \subset I)$, est aussi orthonormal et orienté par l'orientation du système $\boldsymbol{t}_1^0, \ldots, \boldsymbol{t}_n^0$ ([2]).

Pour les fonctions t_1, t_2 et $\varkappa_1$ nous avons l'identité vectorielle

$$\frac{dt_1}{d\sigma} = \varkappa_1 t_2 , \qquad \sigma \in I_1 .$$

La fonction t_1 ne peut pas admettre une dérivée $d^2t_1/d\sigma^2$ au point σ_0, car elle satisfait à la condition

$$t_1^2 \equiv 1 , \qquad \sigma \in I_1 ,$$

et par hypothèse la fonction $\varkappa_1$ est non différentiable dans un voisinage I du point σ_0.

(On sait bien que si dans le produit de deux fonctions un facteur est non différentiable et le second est différentiable et positif au point x_0, alors ce produit n'est pas différentiable en ce point.)

En conséquence de ce résultat, la fonction $r(\sigma)$ étant la solution du problème

$$\frac{dr}{d\sigma} = t_1 , \qquad r(\sigma_0) = r_0$$

où r_0 est donné, elle n'admet pas de dérivées d'ordre supérieur à 2.

On peut facilement vérifier que les vecteurs (17) sont les vecteurs de Frenet généralisés pour la courbe ayant la représentation vectorielle $r(\sigma)$ (6).

III. Détermination des courbures généralisées. Supposons que la courbe (2) ait dans un voisinage I du point σ_0 un système de vecteurs de Frenet généralisés $t_1, \ldots, t_n$ (au sens de la définition 1) et demandons l'existence de la dérivée $dt_{n-1}/d\sigma$ au point σ_0; par consequent tous les vecteurs de Frenet généralisés sont différentiables au point σ_0.

DÉFINITION 2. Les fonctions scalaires $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ définie par les formules

$$\varkappa_j = t_{j+1} t_j' , \qquad \sigma = \sigma_0 \qquad (j = 1, \ldots, n-1) \tag{18}$$

seront appelées courbures successives généralisées de la courbe (2) au point σ_0.

Remarque 2. On peut vérifier que les courbures $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2}$ définies par les formules (15) sont non négatives:

$$\varkappa_i \geqslant 0 , \qquad \sigma = \sigma_0 \qquad (i = 1, \ldots, n-2) . \tag{19}$$

Les inégalités (19) résultent des inégalités (12). Le signe de la dernière courbure, $\varkappa_{n-1}$, peut être quelconque.

---

(6) Le paramètre σ est la longueur de l'arc de cette courbe.

Remarque 3. On vérifie sans difficulté que les fonctions $t_1, \ldots, t_n$ données par la définition 1 et les fonctions $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ données par la définition 2 satisfont aux équations du système (1); ces équations sont donc appeleés équations de Frenet généralisées de la courbe (2).

Remarque 4. Si la courbe (2) est suffisamment régulière (7), on peut vérifier que les notions des vecteurs de Frenet et des courbures données par les définitions 1 et 2 sont identiques aux notions analogues introduites dans le travail [2].

(7) Au sens la régularité demandée dans les définitions 1 et 2 du travail [2].

Travaux cités

[1] S. Topa, *Przyczynek do teorii równań Freneta*, Czasopismo Techniczne Nr 2, Kraków, luty 1963.

[2] — *On a generalization of Frenet equations*, Ann. Polon. Math. 14 (1963), p. 197-209.

Reçu par la Rédaction le 3. 2. 1964