ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXI (1975)

Familles de polynômes ponctuellement bornées

par NGUYEN THANH VAN (Toulouse)

Résumé. On étudie diverses conditions sous lesquelles la propriété „ponctuellement bornée" implique une „bonne" majoration uniforme pour toute famille de polynômes.

I. Condition polynomiale ($\mathscr{L}$).

1. En 1933, F. Leja a publié un remarquable résultat [2] connu sous le nom de „lemma polynomial", qui peut s'énoncer comme suit:

Soit E une partie du plan C et soit a un point de C. S'il existe un $m > 0$ tel que $E \cap \{z \in C: |z-a| = t\} \neq \Phi$ pour presque tout $t \in [0, m]$, alors E vérifie la condition (L_0) au point a, c'est-à-dire: pour toute famille de polynômes $(P_i)_{i \in I}$ bornée en tout point de E et tout $\varepsilon > 0$, il existe M et $\delta > 0$ tels que

$$|P_i(z)| \leqslant M(1+\varepsilon)^{d^0 P_i} \quad \forall i \in I, \quad \forall z \in \{\zeta \in C: |\zeta - a| < \delta\}.$$

D'après J. Siciak, on dit que E vérifie la condition (L) au point a lorsque l'ensemble $E_r = E \cap \{\zeta \in C: |\zeta - a| < r\}$ vérifie (L_0) au point a pour tout $r > 0$.

J. Siciak [8] a démontré qu'un compact E vérifie la condition (L) au point a si et seulement E est non effilé en a. On va établir un résultat analogue pour une partie E quelconque du plan C; on introduit une nouvelle condition polynomiale qui ne diffère guère de la condition (L).

DÉFINITION. On dit que E vérifie la *condition polynomiale* ($\mathscr{L}$) *au point* a lorsque $E \setminus \{a\}$ vérifie (L) en a.

Remarque. Si E vérifie (L) ou ($\mathscr{L}$) en a, alors $a \in \bar{E}$.

THÉORÈME. *Soit E une partie quelconque de C. E vérifie la condition ($\mathscr{L}$) au point a si et seulement si E est non effilé en ce point.*

2. LEMME 1. *Si E est non effilé en a, alors il vérifie la condition (L_0) en ce point.*

Démonstration. Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes bornée en tout point de E

$$|P_i(z)| \leqslant M(z) < +\infty \quad \forall i \in I, \quad \forall z \in E.$$

Sans restreindre la généralité de la conclusion, on peut supposer $P_i \not\equiv$ const, $\forall i \in I$. Il résulte d'un théorème de P. Lelong [3] que la famille

$$\left\{\frac{1}{d^0 P_i} \log |P_i(z)|\right\}_{i \in I}$$

est localement bornée supérieurement sur tout le plan C. Posons pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$V_n(z) = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{n} \log |P_i(z)|:\ d^0 P_i = n\right\},$$

$$V_n^*(z) = \text{Régularisée supérieure de } V_n(z),$$

l'ensemble $\mathscr{C}_n = \{z \in C:\ V_n(z) < V_n^*(z)\}$ est de capacité nulle et $\{V_n^*(z)\}$ est une famille localement bornée supérieurement de fonctions sous-harmoniques sur C.

Maintenant, considérons

$$V(z) = \limsup_{n\to\infty} V_n^*(z),$$

$$V^*(z) = \text{Régularisée supérieure de } V(z).$$

$V^*(z)$ est sous-harmonique sur C et l'ensemble $\mathscr{C} = \{z \in C:\ V(z) < V^*(z)\}$ est de capacité nulle.

Puisque E est non effilé en a, on a pour l'ensemble $e = \left(\bigcup_1^\infty \mathscr{C}_n\right) \cup \mathscr{C}$ qui est de capacité nulle

$$V^*(a) = \limsup_{\substack{\zeta \in E/e \\ \zeta \to a}} V(\zeta).$$

Or pour tout $\zeta \in E \setminus e$, on a

$$V(\zeta) = \limsup_{n\to\infty} V_n(\zeta) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M(\zeta) = 0.$$

Donc: $V^*(a) \leqslant 0$.

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, il résulte de la semi-continuité supérieure de $V^*(z)$ qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$V^*(\zeta) \leqslant \varepsilon/2 \qquad \forall \zeta \in D(a, 2\delta) = \{z \in C:\ |z-a\} < 2\delta\}$$

le lemme de Hartogs donne alors: in existe n_0 tel que

$$V_n^*(\zeta) \leqslant \varepsilon \qquad \forall \zeta \in D(a, \delta),\ \forall n \geqslant n_0.$$

Il en résulte qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|P_i(z)| \leqslant M e^{\varepsilon d^0 P_i} \qquad \forall i \in I, \qquad \forall z \in D(a, \delta).$$

Remarque. Dans une remarque parue dans son Séminaire d'Analyse 1970–1971 P. Lelong a bien saisi le lien entre son Théorème Polynomial et le Lemme Polynomial de Leja.

LEMME 2: *Soit Ω un ouvert de C et soit E une partie de Ω vérifiant la condition (L) en un point $a \in \Omega$*

On suppose que $\{\lambda_n\}$ est une suite de nombres positifs et $\{f_n(z)\}$ une suite de fonctions analytiques sur Ω telles que

(i) $\frac{1}{\lambda_n} \log|f_n(z)| \leqslant K = \text{const}, \ \forall z \in \Omega, \ \forall n;$

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \log|f_n(z)| \leqslant A = \text{const}, \ \forall z \in E.$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M et $\delta > 0$ tels que:

$$|f_n(z)| \leqslant M \exp[(A+\varepsilon)\lambda_n], \qquad \forall z \in D(a, \delta,) \ \forall n.$$

Démonstration. Voir Siciak [7], lemme 2.1.

3. Demonstration du théorème. Supposons que E est non effilé au point a, alors les $F_r = (E\setminus\{a\}) \cap D(a, r)$ sont aussi non effilés en a et d'après le lemme 1, ils vérifient la condition (L_0) en a. Donc E vérifie $(\mathscr{L})$ en a.

Supposons maintenant que E vérifie $(\mathscr{L})$ en a. Nous allons montrer que E est non effilé en a. Pour cela, il suffit de montrer que si f est une fonction sous-harmonique sur un ouvert U contenant a, alors

$$f(a) = \limsup_{\substack{\zeta\to a \\ \zeta \in U\cap E}} f(\zeta).$$

On raisonne par l'absurde en supposant le contraire; alors il existe r_0 positif assez petit tel que

$$f(\zeta) \leqslant \lambda, \quad \forall \zeta \in [D(a, r_0)\setminus\{a\}] \cap E, \tag{1}$$

où λ est un nombre réel strictement inférieur à $f(a)$.

D'après Hartogs, il existe une suite $\{f_m\}$ de fonctions analytiques sur $D(a, r_0)$ telle que

(2) $\left\{\frac{1}{m} \log|f_m(z)|\right\}$ est localement bornée supérieurement sur $D(a, r_0)$,

$$f(z) = \left[\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log|f_m(z)|\right]^* \qquad \forall z \in D(a, r_0). \tag{3}$$

(1) donne alors

$$\limsup \frac{1}{m} \log|f_m(z)| \leqslant \lambda \qquad \forall z \in E_{r_0}\setminus\{a\} \tag{4}$$

où $E_{r_0} = E \cap D(a, r_0)$.

Donc en appliquant le lemme 2, on a: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et m_0 tels que

$$\frac{1}{m}\log|f_m(z)| \leqslant \lambda+\varepsilon, \quad \forall z \in D(a, \delta), \ \forall m \geqslant m_0,$$

ce qui implique:

$$\limsup \frac{1}{m}\log|f_m(z)| = f(z) \leqslant \lambda+\varepsilon, \quad \forall z \in D(a, \delta).$$

Maintenant, si l'on prend $\varepsilon \in]0, f(a)-\lambda[$, on voit que

$$f(a) < f(a),$$

ce qui est absurde.

4. Généralisation à C^p ($p \geqslant 2$). La définition de la condition ($\mathscr{L}$) se généralise trivialement à C^p.

Un ensemble E de C^p ets dit R^{2p} — *non effilé en un point* a lorsqu'il est non effilé en a au sens de la théorie du potentiel dans R^{2p}.

E est dit C^p — *non effilé en* a lorsque pour toute fonction f plurisousharmonique sur un ouvert U de C^p contenant a, on a:

$$f(a) = \limsup_{\substack{\zeta\to a \\ \zeta\in E\cap U}} f(\zeta).$$

En raisonnant comme ci-dessus et en utilisant un résultat récent de Lelong (théorème 5 de [4]), on obtient le

Théorème.

(i) *E verifie ($\mathscr{L}$) en a si E est R^{2p} — non effilé en a.*

(ii) *Si E vérifie ($\mathscr{L}$) en a, alors E est C^p — non effilé en a.*

Problème non résolu. Est-ce que E vérifie ($\mathscr{L}$) en a si (et seulement si) E est C^p — non effilé en ce point?

II. Généralisation d'un résultat de Dudley, Randol et Martineau.

1. Soit K un compact du plan C et soit μ une mesure finie positive sur K.

Définition. On dit que le couple (K, μ) vérifie la *condition* ($\mathscr{L}^*$) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et toute famille de polynômes Φ vérifiant $\varphi(z) = \operatorname{Sup}_{P\in\varphi}|P(z)| < +\infty$ μ — presque partout sur K, il existe une constante finie $M(\varepsilon, \Phi)$ telle que $|P(z)| \leqslant M(\varepsilon, \Phi)\cdot\exp(\varepsilon d^0 P)$ pour tout $z \in K$ et tout $P \in \Phi$.

Dudley et Randol [1] ont montré que si K est un segment de droite et μ la mesure linéaire, alors (K, μ) vérifie ($\mathscr{L}^*$). Dans sa Thèse [5], Martineau en a fait (implicitement) de même pour $K =$ une courbe de Jordan rectifiable compacte et μ = mesure longueur. Ce résultat peut être considéré comme une conséquence facile du lemme polynomial de Leja. On donne ici une généralisation qui ne semble pas résulter directement du dit lemme([1]).

THÉORÈME. *Si K est un compact régulier, c'est-à-dire non effilé en chaque point de sa frontière extérieure, et si μ est la mesure harmonique sur K, alors le couple (K, μ) vérifie la condition $(\mathscr{L}^*)$.*

2. On établit d'abord une proposition générale valable pour tout compact K et toute mesure μ finie et positive sur K.

On munit $L^2(K, \mu)$ de la structure hilbertienne définie par le produit scalaire $(f, g) = \int_K f\cdot\bar{g}d\mu$; soit $\{P_n\}$ la suite orthonormale dans $L^2(K, \mu)$ construite à partir de la suite $\{z^n\}$ par le procédé de Hilbert-Schmidt, c'est une suite de polynômes avec $d^0P_n = n$.

On pose

$$\|P_n\|_K = \operatorname*{Max}_{z\in K} |P_n(z)|.$$

Pour tour entier m, on désigne par $\mathscr{P}_m$ la famille des polynômes de degré $\leqslant m$ et par $\mathscr{I}_m$ la famille des fonctions f définies sur C de la forme

$$f(z) = \operatorname*{Sup}_{P\in\Phi_f} |P(z)|$$

où Φ_f est une sous-famille de $\mathscr{P}_m$.

PROPOSITION. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} (\|P_n\|_K)^{1/n} \leqslant 1$.

(ii) *Pour toute suite $\{f_m\}$ avec $f_m \in \mathscr{I}_m$ $\forall m$, on a:*

$$\limsup_{m\to\infty} (\|f_m\|_K)^{1/m} = \operatorname*{Sup\,ess}_{z\in K} [\limsup_{m\to\infty} (f_m(z))^{1/m}],$$

où la borne supérieure essentielle est prise au sens de la mesure μ.

(iii) *Le couple (K, μ) vérifie la condition $(\mathscr{L}^*)$.*

Démonstration. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii).

LEMME. *Si* (i) *est vraie, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_ε telle que, quel que soit le polynôme P, on ait*

$$\|P\|_K \leqslant C_\varepsilon(1+\varepsilon)^{d^0P}\Big(\int_K |P|^2 d\mu\Big)^{1/2}.$$

([1]) Note. On ne peut pas appliquer directement le lemma polynomial de Leja lorsque le compact régulier K est l'ensemble triadique de Cantor.

Démonstration du lemme. Soit P un polynôme de degré m, on a $P = \sum_{j=0}^{m}\left(\int_K P\cdot\overline{P}_j\,d\mu\right)P_j$. Or (i) implique

$$\|P_j\|_K \leqslant M_\varepsilon(1+\varepsilon)^j.$$

Donc: $\|P\|_K = \sum_{0}^{m}\left|\int_K P\cdot\overline{P}_j\,d\mu\right|\,\|P_j\|_K$

$$\|P\|_K \leqslant \sum_{0}^{m} M_\varepsilon(1+\varepsilon)^j\Big(\int_K |P|^2\,d\mu\Big)^{1/2}\Big(\int_K |P_j|^2\,d\mu\Big)^{1/2},$$

$$\|P\|_K \leqslant \Big(\int_K |P|^2\,d\mu\Big)^{1/2} M_\varepsilon(1+\varepsilon)^m\sum_{0}^{\infty}(1+\varepsilon)^{-j},$$

$$\|P\|_K \leqslant M_\varepsilon\cdot\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot(1+\varepsilon)^m\Big(\int_K |P|^2\,d\mu\Big)^{1/2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le lemme étant établi, le reste se fait exactement comme dans la thèse de Martineau (p. 113–119).

(b) (ii)→(iii). Soit Φ une famille de polynômes μ — presque partout ponctuellement bornée sur K

$$|P(z)| \leqslant M(z) < +\infty \quad \forall P\in\Phi,\ \forall z\in K\setminus e,$$

où e est un sous-ensemble de K de μ — mesure nulle.

Pour tout entier m, on pose $F_m(z) = \sup_{P\in\Phi,\, d^0P\leqslant m}|P(z)|$.

On a

$$\limsup_{m\to\infty}(\|F_m\|_K)^{1/m} = \operatorname*{Sup\,ess}_{z\in K}\big[\limsup_{m\to\infty}(F_m(z))^{1/m}\big] \leqslant \sup_{z\in K\setminus e}\big[\lim_{m\to\infty}(M(z))^{1/m}\big] \leqslant 1.$$

Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante finie M_ε telle que $\|P\|_K \leqslant M_\varepsilon\exp(\varepsilon d^0P)$ $\forall P\in\Phi$.

(c) (iii)⇒(i). On reprend un argument utilisé dans [6].

Soient n et N deux entiers positifs, on pose pour tout $\varrho\in\,]0,1[$:

$$E_n^N(\varrho) = \{z\in K:\ \varrho^n|P_n(z)| > N\},$$

$$E^N(\varrho) = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n^N.$$

On a en raison de la relation $\int_K |P_n|^2\,d\mu = 1$

$$\mu\big(E^N(\varrho)\big) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\mu\big(E_n^N(\varrho)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varrho^{2n}}{N^2} = \frac{1}{N^2(1-\varrho^2)}.$$

Donc, on a μ — presque partout sur K

$$\operatorname*{Sup}_n \varrho^n |P_n(z)| < +\infty.$$

Puisque (iii) est vraie par hypothèse, ceci implique

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M_\varepsilon \text{ telle que } \varrho^n \|P_n\|_K \leqslant M_\varepsilon e^{\varepsilon n}\ \forall n.$$

Le caractère arbitraire de $\varrho \in]0, 1[$ et de $\varepsilon > 0$ donne

$$\limsup_{n\to\infty} (\|P_n\|_K)^{1/n} \leqslant 1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Démonstration du théorème. Dans l'hypothèse du théorème, un résultat du Widom [8] donne

$$\lim_{n\to\infty} (\|P_n\|_K)^{1/n} = 1.$$

Donc (K, μ) vérifie $(\mathscr{L}^*)$, d'après la proposition précédente.

Remarque. Le théorème se généralise facilement au cas de p variables complexes avec $K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_p$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_p$ où K_j est un compact régulier du plan C et μ_j la mesure harmonique sur K_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

On donne une extension du lemme 1.

PROPOSITION. *Soit E une partie borélienne de C non effilée au point a, soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes complexes à valeurs dans un espace localement convexe complexe X et soit q une semi-norme continue sur X. Si $q[P_i(z)] \leqslant M(z) < +\infty$ $\forall z \in E$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et une contante finie $M > 0$ tels que:*

$$q[P_i(z)] \leqslant M(1+\varepsilon)^{d^0 P_i} \quad \forall z \in V, \forall i \in I.$$

Démonstration. On peut supposer qu'aucun des P_i ne soit constant. E contient nécessairement un compact K de capacité positive. Posons $K_n = \{z \in K\colon q[P_i(z)] \leqslant n\ \forall i\}$, chaque K_n est compact et $\bigcup_1^\infty K_n = K$. Par conséquent, il existe n_0 tel que K_{n_0} soit de capacité positive. On a:

$$q[P_i(z)] \leqslant n_0 \quad \forall z \in K_{n_0},\ \forall i \in I.$$

D'après une généralisation du Lemme de Bernstein dû à J. Siciak (*A polynomial lemma and analytic mappings* ..., Séminaire P. Lelong, 1970–1971), on a:

$$q[P_i(z)] \leqslant n_0 \exp d^0 P_i G(z, D, \infty)$$

où $G(z, D, \infty)$ désigne la fonction de Green avec pôle à l'infini de la composante connexe non bornée D de $C \setminus K_{n_0}$. Il en résulte que la famille $\left\{\frac{1}{d^0 P_i} \log q[P_i(z)]\right\}_{i\in I}$ est localement bornée supérieurement sur C.

On considère les fonctions

$$V_n(z) = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{n}\log q[P_i(z)]:\ d^0P_i = n\right\},$$

$$V_n^*(z) = \operatorname{Regsup} V_n(z), \qquad V(z) = \limsup_n V_n^*(z),$$

$$V^*(z) = \operatorname{Regsup} V(z);$$

en raisonnant sur ces fonctions comme à propos du Lemme 1, on a $V^*(a) = 0$. La conclusion s'ensuit, grâce au Lemme de Hartogs.

Remarque. Cette proposition implique un résultat de Siciak (*A generalization of a polynomial lemma of Leja*, Ann. Polon. Math. 25 (1971), p. 149–156). Cependant, elle n'entraîne pas un résultat du même genre de Siciak et Bochnak (*Analytic functions in topological vector spaces*, Studia Math. 39 (1971), p. 77–112).

Bibliographie

[1] R. M. Dudley and B. Randol, *Implications of pointwise bounds on polynomials*, Duke Math. J. 29 (3) (1962), p. 455–458.

[2] F. Leja, *Sur les suites de polynômes bornés presque partout sur la frontière d'un domaine*, Math. Ann. 108 (1933), p. 517–524.

[3] P. Lelong, *On a problem of M. A. Zorn*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), p. 12–19.

[4] — *Théorème de Banach–Steinhaus pour les polynômes — Applications entières d'espaces vectoriels complexes*, Lectures Notes Springer n° 205, exposé n° 9, 1970.

[5] A. Martineau, *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel*, J. d'Analyse Math. 11 (1963), p. 1–164.

[6] Nguyen Thanh Van, *Croissance et meilleure approximation polynomiale des fonctions entières*, Ann. Polon. Math 26 (1972), p. 325–333.

[7] J. Siciak, *Separately analytic function and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of C^n*, Ann. Polon. Math. 22 (1969), p. 145–171.

[8] H. Widom, *Polynomials associated with measures in the complex plane*, J. Math. Mech. 16 (1967), p. 997–1013.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
TOULOUSE CEDEX

Reçu par la Rédaction le 24. 7. 1973