ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIII (1977)

Système d'inégalités aux différences finies du type elliptique

par MARIAN MALEC (Cracovie)

Résumé. Dans la note on considère un système d'inégalités aux différences finies du type elliptique

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{M} r_l^{Mij} + \sum_{j=1}^{n} b_{lj}^{M} r_l^{Mj} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{M} r_\mu^{M} \geqslant -\varepsilon_{1l}(h),$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{M} r_l^{Mij} + \sum_{i=1}^{n} b_{lj}^{M} r_l^{Mj} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{M} r_\mu^{M} \leqslant \varepsilon_{2l}(h)$$
$$(l = 1, \ldots, p)$$

où r_l^{Mj} et r_l^{Mij} désignent les quotients aux différences finies pour les dérivées partielles $\partial r_l/\partial x_i$ et $\partial^2 r_l/\partial x_i \partial x_j$ respectivement, au point nodal M.

On prouve que si les inégalités mentionnées sont satisfaites, on peut estimer supérieurement la valeur maximale de r_l^M et inférieurement la valeur minimale de r_l^M.

1. Dans la présente note on considère un système d'inégalités aux différences finies du type elliptique

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{M} r_l^{Mij} + \sum_{j=1}^{n} b_{lj}^{M} r_l^{Mj} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{M} r_\mu^{M} \geqslant -\varepsilon_{1l}(h), \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{M} r_l^{Mij} + \sum_{j=1}^{n} b_{lj}^{M} r_l^{Mj} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{M} r_\mu^{M} \leqslant \varepsilon_{2l}(h)\end{gathered} \tag{1.1}$$
$$(l = 1, \ldots, p),$$

où r_l^{Mj} et r_l^{Mij} $(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$ désignent les quotients aux différences finies pour les dérivées partielles $\partial r_l/\partial x_i$ et $\partial^2 r_l/\partial x_i \partial x_j$ respectivement, au point nodal M.

On prouve que si les inégalités (1.1) sont satisfaites, on peut estimer supérieurement la valeur maximale de r_l^M et inférieurement la valeur minimale de r_l^M (théorèmes 1 et 2).

Il est à noter que les inégalités aux différences finies du type elliptique ont été déjà analysées dans [1], où on a examiné les inégalités (1.1), mais seulement dans le cas particulier où $p = 1$.

Dans ce travail nous supposons que, chaque indice l étant fixé, la matrice $[a_{lij}^M]$ a une diagonale dominante (voir (3.2)).

Cette hypothèse est plus forte que celle qui demande que la matrice $[a_{lij}^M]$ soit positive (voir [3], p. 106). Donc les inégalités (1.1) ne comprennent pas toutes les inégalités elliptiques possibles.

Le résultat de notre étude peut être utilisé dans la démonstration de la convergence, de même que dans l'estimation de l'erreur de la méthode des différences finies pour un système d'équations non linéaires partielles elliptiques (voir [2]).

2. Supposons que N est un nombre naturel et $m_1, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers et soit

$$
\begin{aligned}
M &= (m_1, \ldots, m_n),\\
Z &= \{M: 0 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\},\\
Z_1 &= \{M: 1 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\},\\
Z_2 &= \{M: 0 \leqslant m_i \leqslant N-1,\ i = 1, \ldots, n\}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Introduisons les notations suivantes:

$$
\begin{aligned}
-i(M) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i-1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (M \in Z_1),\\
i(M) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i+1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (M \in Z_2)\\
&\qquad (i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

On suppose qu'à chaque multi-indice $M \in Z$ correspond un système de nombres réels

$$
r^M = (r_1^M, \ldots, r_p^M)
\tag{2.3}
$$

et on admet que

$$
\begin{aligned}
r_l^{Mi} &= \frac{1}{2h}\,(r_l^{i(M)} - r_l^{-i(M)}),\\
r_l^{+Mij} &= \frac{1}{2h^2}\,(-r_l^{i(M)} - r_l^{j(M)} - r_l^{-i(M)} - r_l^{-j(M)} + 2r_l^M + r_l^{i(j(M))} + r_l^{-i(-j(M))}),\\
r_l^{-Mij} &= \frac{1}{2h^2}\,(r_l^{i(M)} + r_l^{j(M)} + r_l^{-i(M)} + r_l^{-j(M)} - 2r_l^M - r_l^{i(-j(M))} - r_l^{-i(j(M))})\\
&\qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, p,\ M \in Z_1 \cap Z_2)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

où h est un nombre positif.

3. Dans tout ce travail nous admettrons que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

1) la valeur maximale et minimale de r_l^M sur l'ensemble Z est atteinte dans l'ensemble $Z_1 \cap Z_2$, c'est-à-dire

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} \max_{M \in Z} r_l^M &= r_l^{A(l)} \quad (A(l) \in Z_1 \cap Z_2), \\ \min_{M \in Z} r_l^M &= r_l^{B(l)} \quad (B(l) \in Z_1 \cap Z_2) \end{aligned} \qquad (l = 1, \ldots, p);$$

2) les nombres $c_l^{A(l)}$, $c_l^{B(l)}$, $b_{lj}^{A(l)}$, $b_{lj}^{B(l)}$, $a_{lij}^{A(l)}$, $a_{lij}^{B(l)}$, L, K, Γ et g sont donnés et tels que

$$(3.2)\qquad \begin{gathered} c_{ll}^{A(l)} \leqslant L < 0, \ 0 \leqslant c_{l\mu}^{A(l)} \leqslant K \ (\mu \neq 1), \ c_{ll}^{B(l)} \leqslant L, \ 0 \leqslant c_{l\mu}^{B(l)} \leqslant K \ (\mu \neq 1), \\ |b_{lj}^{A(l)}| \leqslant \Gamma, \quad |b_{lj}^{B(l)}| \leqslant \Gamma, \\ 0 < g \leqslant a_{lii}^{A(l)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{lij}^{A(l)}|, \quad g \leqslant a_{lii}^{B(l)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{lij}^{B(l)}| \\ (l = 1, \ldots, p, \ \mu = 1, \ldots, p, \ j = 1, \ldots, n, \ i = 1, \ldots, n) \end{gathered}$$

et

$$(3.3)\qquad \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0, \quad L + K(p-1) < 0;$$

3) les égalités suivantes sont satisfaites

$$(3.4)\quad a_{lij}^{A(l)} = a_{lji}^{A(l)}, \quad a_{lij}^{B(l)} = a_{lji}^{B(l)} \quad (l = 1, \ldots, p, \ i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n).$$

4. THÉORÈME 1. *Supposons que les hypothèses de 3 sont satisfaites et que*

$$(4.1)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{A(l)} r_l^{A(l)ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{lj}^{A(l)} r_l^{A(l)j} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{A(l)} r_\mu^{A(l)} \geqslant -\varepsilon_{1l}(h) \qquad (l = 1, \ldots, p)$$

où $\varepsilon_{1l}(h)$ $(l = 1, \ldots, p)$ *sont des nombres non négatifs et*

$$(4.2)\qquad r_l^{A(l)ij} = \begin{cases} r_l^{-A(l)ij} & \text{lorsque } a_{lij}^{A(l)} \leqslant 0 \text{ ou } i = j, \\ r_l^{+A(l)ij} & \text{lorsque } a_{lij}^{A(l)} \geqslant 0 \text{ et } i \neq j \end{cases}$$

(*voir* (2.4)).

Dans toutes ces hypothèses,

$$(4.3)\quad r_k^{A(k)} \leqslant -\frac{\varepsilon_1(h)}{L + K(p-1)} \quad \text{où} \quad r_k^{A(k)} = \max_{1 \leqslant l \leqslant p} r_l^{A(l)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_1(h) = \max_{1 \leqslant l \leqslant p} \varepsilon_{1l}(h).$$

Démonstration. Nous raisonnerons par l'absurde. Admettons que l'inégalité (4.3) ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire

$$(4.4)\qquad r_k^{A(k)} > -\frac{\varepsilon_1(h)}{L + K(p-1)}.$$

En utilisant la définition (4.2) et en tenant compte de (3.4), nous obtenons

$$(4.5)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{kij}^{A(k)}\cdot r_k^{A(k)ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{A(k)}\cdot r_k^{A(k)j} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)}\cdot r_\mu^{A(k)}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) + \frac{1}{2} b_{ki}^{A(k)}\Big](r_k^{i(A(k))} - r_k^{A(k)}) +$$

$$+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) - \frac{1}{2} b_{ki}^{A(k)}\Big](r_k^{-i(A(k))} - r_k^{A(k)}) +$$

$$+ \frac{1}{2h^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\,[(r_k^{i(s(k;i,j)j(A(k))} - r_k^{A(k)}) +$$

$$+ (r_k^{-i(-s(k;i,j)j(A(k))} - r_k^{A(k)})] + \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)}\cdot r_\mu^{A(k)}$$

où

$$(4.6)\qquad s(k;i,j) = \begin{cases} +1 & \text{pour } a_{kij}^{A(k)} \geqslant 0, \\ -1 & \text{pour } a_{kij}^{A(k)} \leqslant 0. \end{cases}$$

Il résulte des hypothèses (3.2) et (3.3) que

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) + \frac{1}{2} b_{ki}^{A(k)} \geqslant \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0, \\ &\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) - \frac{1}{2} b_{ki}^{A(k)} \geqslant \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

tandis qu'à partir de (3.1) on a

$$(4.8)\qquad \begin{aligned} &r_k^{i(A(k))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0, && r_k^{-i(A(k))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0, \\ &r_k^{i(s(k;i,j)j(A(k))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0, && r_k^{-i(-s(k;i,j)j(A(k))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0 \end{aligned}$$

$$(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n).$$

Remarquons aussi que

$$(4.9)\qquad \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_{\mu}^{A(k)} = c_{kk}^{A(k)} r_{k}^{A(k)} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq k}}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_{\mu}^{A(k)}$$

$$\leqslant c_{kk}^{A(k)} r_{k}^{A(k)} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq k}}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_{\mu}^{A(\mu)} \leqslant c_{kk}^{A(k)} r_{k}^{A(k)} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq k}}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_{k}^{A(k)}$$

$$\leqslant c_{kk}^{A(k)} r_{k}^{A(k)} + K(p-1) r_{k}^{A(k)} \leqslant L r_{k}^{A(k)} + K(p-1) r_{k}^{A(k)}$$

$$= [L+K(p-1)] r_{k}^{A(k)} < -\varepsilon_1(h) \leqslant -\varepsilon_{1k}(h)$$

(voir (4.4)).

Des formules (4.5)–(4.9) nous obtenons

$$(4.10)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{kij}^{A(k)} r_{k}^{A(k)ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{A(k)} r_{k}^{A(k)j} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_{\mu}^{A(k)} < -\varepsilon_{1k}(h)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse (4.1).

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

5. THÉORÈME 2. *Si les conditions de 3 sont satisfaites et*

$$(5.1)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{A(l)} r_{l}^{B(l)ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{lj}^{B(l)} r_{l}^{B(l)j} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{B(l)} r_{\mu}^{B(l)} \leqslant \varepsilon_{2l}(h) \qquad (l = 1, \ldots, p)$$

où $\varepsilon_{2l}(h)$ $(l = 1, \ldots, p)$ *sont des nombres non négatifs, tandis que* $r_l^{B(l)ij}$ *est défini d'une façon analogue à* $r_l^{A(l)ij}$ (*voir* (4.2)), *alors*

$$(5.2)\qquad r_k^{B(k)} \geqslant \frac{\varepsilon_2(h)}{L+K(p-1)} \quad \text{où} \quad r_k^{B(k)} = \min_{1\leqslant l\leqslant p} r_l^{B(l)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2(h) = \max_{1\leqslant l\leqslant p} \varepsilon_{2l}(h).$$

La démonstration du théoréme 2 étant pareille à celle du théorème 1, il est inutile de la présenter.

Travaux cités

[1] M. Malec, *Inégalités aux différences finies du type elliptique*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., Astronom. Phys. 13 (1975), p. 859–863.

[2] — *Schéma des différences finies pour un système d'équations non linéaires partielles elliptiques aux dérivées mixtes et avec des conditions aux limites du type de Dirichlet*, ce fascicule, p. 241–246.

[3] A. Mostowski et M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, 1958.

Reçu par la Rédaction le 9. 4. 1974