COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXVI 1976 FASC. 2

COMPORTEMENT À L'INFINI DE CERTAINES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

PAR

M. EMSALEM (ORSAY)

Dans tout le texte, $k \geqslant 3$ et a désignent des entiers naturels fixes; on désigne par Λ l'ensemble des nombres réels $\lambda_n = (n^k + a)^{1/k}$, où n parcourt $\boldsymbol{N}$. L'objet de la première partie de cette étude est de décrire l'espace des fonctions presque-périodiques à spectre dans Λ (fermeture pour la topologie de la convergence uniforme sur $\boldsymbol{R}$ de l'espace des sommes finies $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$). Dans la seconde partie, on s'occupe de l'espace plus large des fonctions moyenne-périodiques à spectre dans Λ (fermeture pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de l'espace des sommes finies $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$) et l'on estime la croissance à l'infini de ces fonctions (théorème 2).

1. Fonctions presque-périodiques à spectre dans Λ.

Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Λ est un ensemble de Sidon discret; c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute fonction presque-périodique f à spectre dans Λ de série de Fourier*

$$f(x) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x},$$

on ait

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| \leqslant C \operatorname*{Sup}_{x \in \boldsymbol{R}} |f(x)|.$$

COROLLAIRE 1. *Toute fonction moyenne-périodique bornée à spectre dans Λ est presque-périodique et sa série de Fourier est absolument convergente.*

Nous désignerons dans toute la suite par $\mathrm{PP}(\Lambda)$ (resp. $\mathrm{MP}(\Lambda)$) l'espace des fonctions presque-périodiques (resp. moyenne-périodiques) à spectre dans Λ.

La démonstration du théorème 1 utilise le lemme suivant (Y. Pourchet, voir [1]):

LEMME 1. *Soit I l'ensemble des entiers positifs non divisibles par une puissance k-ième d'un entier; alors la famille $q^{1/k}$, où q parcourt I, est Q-linéairement indépendante.*

Pour q élément de I, on désignera par Λ_q l'ensemble des λ de Λ qui s'écrivent sous la forme $\lambda = q^{1/k}j$, où $j \in N$. Nous allons voir que $\Lambda^* = \bigcup_{q \in I} \Lambda_q$ est un ensemble de Sidon, ce qui assurera que Λ est aussi un ensemble de Sidon. Pour cela admettons provisoirement la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $q \in I$ et pour toute fonction f de* $\mathrm{PP}(\Lambda_q)$ *de série de Fourier*

$$f(x) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda_q} a_\lambda e^{i\lambda x},$$

on ait

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_q} |a_\lambda| \leqslant C \operatorname*{Sup}_{x \in R} |f(x)|.$$

Alors, si

$$f = \sum_{q \in I} f_q$$

est une somme trigonométrique finie où chaque f_q a son spectre dans Λ_q, on a d'après [1], lemme 4,

$$\|f\|_\infty \geqslant \frac{1}{5}\Big(\sum_{q \in I} \|f_q\|_\infty\Big) \geqslant \frac{C}{5} \sum_{n \in Z} |a_n|,$$

si f s'écrit

$$f(x) = \sum_{n \in N} a_n \exp(i\lambda_n x);$$

Λ^* est donc un ensemble de Sidon.

Démonstration de la proposition 1. On note A_q l'ensemble des entiers $j > 0$ tels qu'il existe un entier naturel n_j vérifiant $qj^k - n_j^k = a$. L'ensemble A_q est fini (théorème de Thue, cf. [6]) et sa position est décrite par le lemme suivant dû à A. Blanchard:

LEMME 2. *Si j_1 et j_2 sont deux entiers appartenant à A_q et vérifiant $j_2 > j_1 \geqslant 4a$, alors $j_2 \geqslant 2j_1$.*

Soit j un élément de A_q; il existe n_j entier tel que

$$q - \frac{n_j^k}{j^k} = \frac{a}{j^k},$$

soit

$$\left(q^{1/k}-\frac{n_j}{j}\right)\left(q^{1-1/k}+q^{1-2/k}\frac{n_j}{j}+\ldots+\left(\frac{n_j}{j}\right)^{k-1}\right)=\frac{a}{j^k}.$$

Comme $q^{1/k}\geqslant 1$, cette égalité donne l'inégalité suivante:

$$q^{1/k}-\frac{n_j}{j}\leqslant\frac{a}{j^k}.$$

Soit maintenant deux éléments j_1 et j_2 de A_q vérifiant $j_2>j_1>4a$. L'inégalité précédente donne:

$$\left|\frac{n_{j_1}}{j_1}-\frac{n_{j_2}}{j_2}\right|\leqslant\frac{2a}{j_1^k};$$

comme, d'autre part n_{j_1}/j_1 et n_{j_2}/j_2 sont deux nombres distincts, on a

$$\left|\frac{n_{j_1}}{j_1}-\frac{n_{j_2}}{j_2}\right|\geqslant\frac{1}{j_1j_2}.$$

En comparant les deux dernières inégalités, on obtient

$$j_2\geqslant\frac{1}{2a}j_1^{k-1}$$

et $j_2\geqslant 2j_1$, compte tenu des hypothèses sur j_1, j_2 et k.

Remarque. Dans le cas $q\neq 1$, on obtient un résultat meilleur: sous les hypothèses $j_2>j_1\geqslant a$, on a

$$j_2\geqslant\frac{k}{2a}j_1^{k-1}.$$

Revenons à présent à la démonstration de la proposition 1.

Soit B_q l'ensemble A_q privé de $[0, 4a]$. B_q est un ensemble de Hadamard avec le rapport 2. Alors, d'après [7], il existe une constante C_1 indépendante de q telle que, pour toute somme finie $\sum_{\lambda\in B_q} a_\lambda e^{i\lambda x}$, on ait

$$\sum_{\lambda\in B_q}|a_\lambda|\leqslant C_1\operatorname*{Sup}_{x\in R}\left|\sum_{\lambda\in B_q}a_\lambda e^{i\lambda x}\right|.$$

On en déduit la même conclusion pour $A_q\subset[0,4a]\cup B_q$ et pour $\Lambda_q=q^{1/k}A_q$.

La démonstration du corollaire 1 se fait par régularisation de f moyenne-périodique bornée à spectre dans Λ (voir [3] pour ce type de méthode).

2. Fonctions moyenne-périodiques à spectre dans Λ.

Définition. Une fonction moyenne-périodique à spectre dans Λ est une limite uniforme sur tout compact de sommes finies $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$. On notera $\mathrm{MP}(\Lambda)$ l'espace des fonctions moyenne-périodiques à spectre dans Λ. Pour la définition du *spectre* d'une fonction moyenne-périodique et de sa *transformée de Fourier* on se reportera à [8] où est démontré le théorème d'analyse et de synthèse, théorème qui, dans notre cas, peut être obtenu directement à partir de [2] (théorème 1) ou de [4] (théorème 5, p. 11). Notons seulement qu'ici la suite des coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathrm{MP}(\Lambda)$ est une suite de carré sommable et que, pour λ fixé, l'application $f \to \hat{f}(\lambda)$ est une application continue.

Nous démontrons ici le théorème suivant:

THÉORÈME 2. (1) *Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de k et a telle que, pour toute fonction f appartenant à $\mathrm{MP}(\Lambda)$ et pour tout réel t,*

$$|f(t)| \leqslant (1+|t|)^{1/2k} C \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|.$$

(2) *$(1+|t|)^{1/2k}$ est le meilleur poids et $[-\pi,\pi]$ le plus petit intervalle possible: si $L > 0$ et $\omega(t)$ sont tels que, pour toute $f\in\mathrm{MP}(\Lambda)$ et pour tout t,*

$$|f(t)| \leqslant \omega(t) \sup_{x\in[-L,L]} |f(x)|,$$

il existe alors une constante $D > 0$ telle que $\omega(t) \geqslant D(1+|t|)^{1/2k}$ pour tout t et l'on a $L \geqslant \pi$.

Pour montrer l'existence d'un poids $\omega(t)$, nous suivrons la méthode de perturbation proposée dans [5]. Regardons une somme trigonométrique finie à spectre dans Λ

$$f(x) = \sum_{n\in N} a_n \exp(i\lambda_n x)$$

comme une perturbation de

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in N} a_n \exp(inx).$$

La correspondance $f \to \tilde{f}$ possède la propriété suivante (on désignera dans la suite par la lettre C toutes les constantes intervenant):

PROPOSITION 2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout réel t et pour toute $f\in\mathrm{MP}(\Lambda)$,*

$$|f(t)| \leqslant (1+|t|)C\|\tilde{f}\|_\infty.$$

On a en effet

$$f(t) = \tilde{f}(t) + \sum a_n \exp(int)[\exp(ir_n t) - 1],$$

si l'on a posé $r_n = \lambda_n - n$. Notons

$$g(t) = \sum a_n \exp(int)[\exp(ir_n t) - 1];$$

l'inégalité de Schwarz donne

$$|g(t)| \leqslant \Big(\sum |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum |\exp(ir_n t) - 1|^2\Big)^{1/2} \leqslant |t| \Big(\sum |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum r_n^2\Big)^{1/2}.$$

La série $\sum r_n^2$ est convergente ($r_n \sim a/kn^{k-1}$) et donc $(\sum r_n^2)^{1/2} \leqslant C_1$ constante absolue. Il en résulte

$$|g(t)| \leqslant |t| C_1 \|\tilde{f}\|_{L^2} \leqslant |t| C_2 \|\tilde{f}\|_\infty \tag{1}$$

et cette dernière inégalité donne la proposition.

PROPOSITION 3. *Les normes* $\operatorname*{Sup}_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$ *et* $\operatorname*{Sup}_{x\in[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(x)|$ *sont équivalentes sur l'espace des sommes trigonométriques finies f à spectre dans Λ.*

C'est une conséquence de la proposition 2, de l'inégalité (1) et de [4] (théorème 5, p. 11), qui montre que les normes

$$\|\tilde{f}\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx/2\pi\Big)^{1/2}$$

sont équivalentes.

Pour t fixé, l'application $\tilde{f} \to f(t)$ est une forme linéaire continue sur les fonctions continues périodiques de période 2π: c'est donc une mesure sur $[-\pi, \pi]$;

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) d\mu_t(x)$$

et donc

$$|f(t)| \leqslant \|\mu_t\| \operatorname*{Sup}_{[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(x)|;$$

ce qui, compte-tenu de la proposition 3, donne

$$|f(t)| \leqslant C \|\mu_t\| \operatorname*{Sup}_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|.$$

D'où l'existence d'un poids $\omega(t) = \|\mu_t\|$, où μ_t, portée par $[-\pi, \pi]$, est telle que $\hat{\mu}_t(-n) = \exp(i\lambda_n t)$.

Il reste à controler $\|\mu_t\|$ lorsque t tend vers l'infini, ce qui est l'objet de la suite.

Nous allons remplacer μ_t par une fonction de L^1: appelons a_t la *masse unité au point* $s \in]-\pi, \pi]$ défini par $s \equiv -t \pmod{2\pi}$ et δ_0 la mesure de Dirac à l'origine. Posons $\theta_t = \mu_t * a_t - \delta_0$ (le produit de convolution est défini mod 2π). Le comportement asymptotique de $\|\theta_t\|$ est le même que celui de $\|\mu_t\|$. La relation de Parseval montre que $\theta_t \in L^2[-\pi, \pi]$ et que sa norme est $O(t)$. Le but de ce qui suit est d'estimer de façon plus précise $\|\theta_t\|_1$.

Une partition de l'unité servira à découper la série de Fourier de θ_t en blocs dyadiques. Construisons une fonction paire a: $\boldsymbol{R} \to [0, +\infty[$ de classe C^1 à support dans $[2/3, 8/3]$ et telle que, pour $x \neq 0$,

$$\sum_{k \in \boldsymbol{Z}} a\left(\frac{x}{2^k}\right) = 1;$$

soit $0 < \varepsilon < 1/3$ et β une fonction positive, de classe C^1 telle que $\beta(1-\varepsilon) = 0$, $\beta(1+\varepsilon) = 1$, $\beta'(1-\varepsilon) = \beta'(1+\varepsilon) = 0$; on définit a de la façon suivante:

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon \text{ ou } 2+2\varepsilon < x, \\ \beta(x) & \text{si } 1-\varepsilon < x \leqslant 1+\varepsilon, \\ 1 & \text{si } 1+\varepsilon < x \leqslant 2-2\varepsilon, \\ 1-\beta(x/2) & \text{si } 2-2\varepsilon < x \leqslant 2+2\varepsilon. \end{cases}$$

On complète pour les x négatifs par parité et on vérifie que la fonction a ainsi définie a bien les propriétés annoncées. On pose alors

$$\varphi_{t,j}(x) = \sum_n [\exp(ir_n t) - 1] a\left(\frac{n}{2^j}\right) \exp(inx)$$

(c'est une somme finie) de sorte que $\theta_t = \sum_j \varphi_{t,j}$ et l'on majorera $\|\theta_t\|_{L^1}$ par $\sum_j \|\varphi_{t,j}\|_{L^1}$. On va séparer la somme $\sum_j \varphi_{t,j}$ en deux groupes: $\sum_{j<J} \varphi_{t,j}$ et $\sum_{j \geqslant J} \varphi_{t,j}$.

Etude de $\sum_{j<J} \varphi_{t,j}$. Pour $j \leqslant -1$, $\varphi_{t,j} = 0$; en effet, si $j \leqslant -1$ et si $n \in \boldsymbol{Z}$, $a(2^{-j}n) = 0$. La somme $\sum_{j<J} \varphi_{t,j}$ est donc finie. On majore la norme L^1 par la norme L^2 et la relation de Parseval donne

$$\Big\| \sum_{j<J} \varphi_{t,j} \Big\|_{L^1} \leqslant C\sqrt{2^J}. \tag{2}$$

Etude de $\|\varphi_{t,j}\|$ pour $j \geqslant J$. On utilisera le lemme suivant:

LEMME 3. *Soit $b \in A(\boldsymbol{R})$ (transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\boldsymbol{R})$). Alors $\beta = b|_{\boldsymbol{Z}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\boldsymbol{T})$ et $\|\beta\|_{A(\boldsymbol{Z})} \leqslant \|b\|_{A(\boldsymbol{R})}$.*

On va donc remplacer l'étude de $\hat{\varphi}_{t,j}$ par celle de

$$\beta_{t,j}(y) = \left[\exp\left(it(\sqrt[k]{y^k + a} - y)\right) - 1\right] a\left(\frac{y}{2^j}\right).$$

C'est une fonction de classe C^1 à support compact, donc transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\boldsymbol{R})$. Pour calculer sa norme dans $A(\boldsymbol{R})$, nous utiliserons le lemme suivant (Carleson):

LEMME 4. *Soit a et b deux nombres réels ($a < b$). Il existe une constante $C > 0$, telle que, pour toute fonction β de classe C^1 à support dans $[a, b]$,*

$$\|\beta\|_{A(\boldsymbol{R})} \leqslant C\sqrt{\|\beta\|_\infty \|\beta'\|_\infty}.$$

Effectuons d'abord le changement de variable $y = 2^j u$, ce qui n'affecte pas la norme dans $A(\boldsymbol{R})$. Posons

$$f_j(u) = 2^{kj}u[(1+a\cdot 2^{-kj}u^{-k})^{1/k}-1].$$

Alors

$$\beta_{t,j}(y) = \gamma_{t,j}(u) = \left[\exp\left(i\cdot 2^{-(k-1)j}tf_j(u)\right)-1\right]a(u).$$

On a

$$\|\gamma_{t,j}\|_\infty \leqslant 2$$

et

$$\gamma'_{t,j}(u) = a'(u)\left[\exp\left(i\cdot 2^{-(k-1)j}tf_j(u)\right)-1\right]+ \\ +i\cdot 2^{-(k-1)j}tf'_j(u)\,a(u)\exp\left(i\cdot 2^{-(k-1)j}tf_j(u)\right);$$

donc

$$|\gamma'_{t,j}(u)| \leqslant |t|\cdot 2^{-(k-1)j}\left(|a'(u)||f_j(u)|+|a(u)|\,|f'_j(u)|\right).$$

Il nous reste à trouver une majoration uniforme par rapport à j de $|f_j(u)|$ et de $|f'_j(u)|$:

$$f_j(u) = ak^{-1}u^{-(k-1)}+u^{-(k-1)}\varepsilon_1(2^ju),$$

où ε_1 est une fonction continue sur $[1/2, +\infty[$ et telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_1(x) = 0;$$

en particulier, ε_1 est bornée et pour u parcourant $[1/2, 3]$, intervalle qui contient le support de a, $|f_j(u)| \leqslant C_1$, constante indépendante de j.

Un calcul analogue pour $f'_j(u)$ donne

$$f'_j(u) = (ak^{-1}-1)u^{-k}+u^{-k}\varepsilon_2(2^ju),$$

où ε_2 possède les mêmes propriétés que ε_1. On en déduit pareillement que, pour $u\in[1/2, 3]$, $|f'_j(u)| \leqslant C_2$, constante indépendante de j. Il en résulte

$$|\gamma'_{t,j}(u)| \leqslant C_3|t|\cdot 2^{-(k-1)j}.$$

Finalement, le lemme 4 donne

$$\|\varphi_{t,j}\|_{A(\boldsymbol{Z})} \leqslant \|\beta_{t,j}\|_{A(\boldsymbol{R})} \leqslant C'\,|t|^{1/2}\cdot 2^{-(k-1)j/2}.$$

Cette dernière inégalité et la formule (2) donnent alors

$$\|\theta_t\|_1 \leqslant C\cdot 2^{J/2} + C'|t|^{1/2}\cdot 2^{-(k-1)J/2}. \tag{3}$$

Il nous reste à choisir J en fonction de t, pour rendre cette majoration la meilleure possible: nous prendrons 2^J de l'ordre de $|t|^a$ ($J(t)$ tel que $2^{J(t)} \leqslant |t|^a < 2^{J(t)+1}$). Pour a donné, (3) implique

$$\|\theta_t\|_{L^1} \leqslant C_1|t|^{a/2} + C_1'|t|^{1/2-[(k-1)/2]a}.$$

$\operatorname{Sup}\{a/2, 1/2-[(k-1)/2]a\}$ est minimum lorsque $a = 1/k$; on obtient ainsi la majoration

$$\|\theta_t\|_{L^1} \leqslant C|t|^{1/2k},$$

où C est une constante, ce qui donne la première partie du théorème 2.

Démonstration de la deuxième partie du théorème 2.

$[-\pi, \pi]$ est l'intervalle le plus petit possible: c'est une conséquence de la théorie générale des fonctions moyenne-périodiques.

$(1+|t|)^{1/2k}$ est le meilleur poids possible. Pour tout $t > L$, nous allons construire une somme trigonométrique finie Q à spectre dans Λ qui vérifie:

$$|Q(t)| \geqslant A|t|^{1/k} \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{x\epsilon[-L,L]} |Q(x)| \leqslant B|t|^{1/2k},$$

où A et B sont deux constantes positives.

Supposons que l'on ait une inégalité du type

$$|P(t)| < \omega(t) \operatorname*{Sup}_{x\epsilon[-L,L]} |P(x)|,$$

pour toute somme $P(x)$ à spectre dans Λ; en particulier, pour Q,

$$|Q(t)| \leqslant \omega(t) \operatorname*{Sup}_{x\epsilon[-L,L]} |Q(x)|$$

et donc, pour $|t|$ assez grand,

$$A|t|^{1/k} \leqslant \omega(t) B|t|^{1/2k};$$

d'où

$$\omega(t) \geqslant \frac{A}{B}|t|^{1/2k},$$

ce qui démontre la dernière partie du théorème 2.

Construction de Q. Soit $\lambda_n = \sqrt[k]{n^k+a}$; posons

$$P_N(x) = \sum_{N+1}^{2N} \exp(i\lambda_n x)$$

(N sera choisi ultérieurement en fonction de t). Nous utilisons la majoration suivante ([9], p. 198):

LEMME 5 (Van der Corput). *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ deux fois dérivable et qui vérifie $f''(u) \geqslant \varrho > 0$ pour tout $u \in [a, b]$; si l'on note $F(u) = e^{2\pi i f(u)}$, on a*

$$\Big| \sum_{a \leqslant n \leqslant b} F(n) \Big| \leqslant \big(|f'(b) - f'(a)| + 2\big)(A + 2\varrho^{-1/2}),$$

où A est une constante absolue.

Ici

$$f(u) = \frac{t}{2\pi}(u^k + a)^{1/k}, \qquad f'(u) = \frac{t}{2\pi}(1 + au^{-k})^{-1+1/k},$$

$$f''(u) = \frac{t}{2\pi}(k-1)a(u^k + a)^{-2+1/k}u^{k-2}.$$

Sur $[N, 2N]$, $f''(u) \geqslant C|t|N^{-(k+1)} = \varrho(N)$, où C est une constante positive. D'autre part, nous avons

$$f'(2N) - f'(N) = \frac{t}{2\pi}(1 - k^{-1})a(1 - 2^{-k})N^{-k} + N^{-k}\varepsilon(N)$$

$$\text{avec } \lim_{N \to +\infty} \varepsilon(N) = 0;$$

donc $|f'(2N) - f'(N)| \leqslant C'|t|N^{-k}$, où C' est une constante. On en déduit

$$|P_N(t)| \leqslant (C'|t|N^{-k} + 2)(A + 2C^{-1/2}N^{(k+1)/2}|t|^{-1/2}),$$

et en modifiant les constantes:

$$\sup_{[t-L, t+L]} |P_N(x)| \leqslant (A_1|t|N^{-k} + A_2)(A_3 + A_4N^{(k+1)/2}|t|^{-1/2}).$$

Prenons maintenant N de l'ordre de $|t|^a$ $(N_t \leqslant t^a < N_t + 1)$:

$$\sup_{[t-L, t+L]} |P_{N_t}(x)| \leqslant C_1 + C_2|t|^{1-ka} + C_3|t|^{[(k+1)a-1]/2} + C_4|t|^{[1+(1-k)a]/2},$$

où C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes positives. On constate aisément que

$$\operatorname{Sup}\left\{1 - ka, \frac{a(k+1)}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{a(k-1)}{2}\right\}$$

est minimum lorsque $a = 1/k$ et dans ce cas, il vaut $1/2k$. On a alors

$$\sup_{[t-L, t+L]} |P_{N_t}(x)| \leqslant C|t|^{1/2k},$$

où C est une constante. Posons $Q_{N_t}(x) = P_{N_t}(x + t)$; Q_{N_t} vérifie:

$$\sup_{[-L, L]} |Q_{N_t}(x)| \leqslant C|t|^{1/2k} \quad \text{et} \quad Q_{N_t}(-t) = P_{N_t}(0) = N_t \geqslant D|t|^{1/k}.$$

TRAVAUX CITÉS

[1] F. Gramain et Y. Meyer, *Ensembles de fréquences et fonctions presque périodiques*, Colloquium Mathematicum 30 (1974), p. 269-275.

[2] A. E. Ingham, *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series*, Mathematische Zeitschrift 41 (1936), p. 367-379.

[3] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées*, Annales de l'Institut Fourier 7 (1957).

[4] Y. Meyer, *Trois problèmes sur les sommes trigonométriques*, Astérisque 1, Société Mathématique de France, 1973.

[5] — *Théorie L^p des sommes trigonométriques apériodiques*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris (à paraître).

[6] L. J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press 1969.

[7] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience 1960 (par. 5.7).

[8] L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Annals of Mathematics 48 (1947), p. 857-929.

[9] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press 1959.

Reçu par la Rédaction le 5. 10. 1975