COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXI 1970 FASC. 2

ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES AVEC PETIT PARAMÈTRE DANS LES ESPACES DE BANACH GÉNÉRAUX

PAR

MIROSLAV SOVA (PRAHA)

Considérons les problèmes de Cauchy abstraits

$$\varepsilon u_\varepsilon''(t)+u_\varepsilon'(t)+Au_\varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(0_+) = x, \quad u_\varepsilon'(0_+) = y,$$

$$u'(t)+Au(t) = 0, \quad u(0_+) = x. \tag{2}$$

Il s'agit de trouver les conditions sur A, les plus générales possibles, sous lesquelles

$$u_\varepsilon \to u \text{ lorsque } \varepsilon \to 0$$

dans un certain sens qui sera spécifié plus loin.

Les principaux résultats concernant ce problème se trouvent dans la section 4, en particulier dans les théorèmes 4.3 et 4.4. Pour l'historique et autres remarques, voir la section 5.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Soient

(1) R le corps des nombres réels,

(2) R^+ l'ensemble des nombres réels positifs,

(3) E un espace de Banach réel fixe,

(4) $\mathfrak{L}^+(E)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires définis dans une partie de E à valeurs dans E,

(5) $\mathfrak{L}(E)$ l'ensemble de tous les opérateurs de $\mathfrak{L}^+(E)$ définis partout et continus avec la norme usuelle,

(6) $M_1 \to M_2$ l'ensemble de toutes les transformations de l'ensemble M_1 dans l'ensemble M_2.

1.2. LEMME. *Si les fonctions $\Phi_j \in \mathfrak{L}(E)$ où $j = 1, 2, \ldots, k$ sont indéfiniment dérivables, la fonction $\prod_{j=1}^{k} \Phi_j$ l'est aussi et on a pour tout $\lambda > R^+$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$*

$$(1)\qquad \frac{d^p}{d\lambda^p}\prod_{j=1}^{k}\Phi_j(\lambda) = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=p\\ p_i\geqslant 0, i=1,\ldots,k}} \frac{p!}{p_1!p_2!\ldots p_k!}\Phi_1^{(p_1)}(\lambda)\Phi_2^{(p_2)}(\lambda)\ldots\Phi_k^{(p_k)}(\lambda).$$

1.3. LEMME. *Soient a et β deux constantes non-négatives. Si une fonction $f \in R^+ \to E$ est indéfiniment dérivable, la fonction $f\big(\beta(\lambda+a)\big)$ l'est aussi et on a pour tout $\lambda \in R^+$ et $p = 0, 1, 2, \ldots,$*

$$(1)\qquad \frac{d^p}{d\lambda^p} f\big(\beta(\lambda+a)\big) = \beta^p f^{(p)}\big(\beta(\lambda+a)\big).$$

Les démonstrations de 1.2 et 1.3 se réalisent par itération comme dans les cas classiques.

1.4. LEMME. *On a pour tout $\lambda > 0$, $k = 1, 2, \ldots,$ $p = 0, 1, 2, \ldots$ et $a \geqslant 0$*

$$(1)\qquad \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{(\lambda+a)^k} = (-1)^p\frac{(p+k-1)!}{(k-1)!}\frac{1}{(\lambda+a)^{p+k}}.$$

La démonstration se fait par itération.

1.5. LEMME. *On a pour $\varepsilon > 0, a \geqslant 0, \lambda > a$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$*

$$(1)\qquad (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\varepsilon\lambda+1}{\varepsilon\lambda^2+\lambda-a} \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-a},$$

$$(2)\qquad (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\varepsilon\lambda^2+\lambda-a} \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-a}.$$

Démonstration. Soit d'abord $a > 0$. On vérifie aisément par un calcul direct que

$$(3)\qquad \frac{\varepsilon\lambda+1}{\varepsilon\lambda^2+\lambda-a} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)\left(\lambda-\frac{2a}{1+\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1} + \\ +\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)\left(\lambda-\frac{2a}{1-\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1}.$$

D'une part, il est clair que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+4\varepsilon a}} \geqslant 0$$

et, d'autre part, il s'ensuit de 1.4 que

$$(4)\quad (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda-\frac{2a}{1+\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1} \geqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda-\frac{2a}{1-\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1},$$

$$(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda-\frac{2a}{1+\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1} \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-a},$$

ce qui entraîne (1) en vertu de (3).

En outre, on vérifie directement que

(5)

$$\frac{1}{\varepsilon\lambda^2+\lambda-a} = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon a}}\left[\left(\lambda-\frac{1}{1+\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1}-\left(\lambda-\frac{2a}{1-\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1}\right],$$

ce qui entraîne en vertu de 1.4

$$(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda-\frac{2a}{1-\sqrt{1+4\varepsilon a}}\right)^{-1} \geqslant 0.$$

Il en résulte (2) en vertu de (4) et (5).

Soit ensuite $a \doteq 0$. La formule (1) est alors immédiate et la formule (2) résulte de l'identité $(\varepsilon\lambda^2+\lambda)^{-1} = \lambda^{-1}-(\lambda+1/\varepsilon)^{-1}$ à l'aide de 1.4.

1.6. LEMME. *Admettons pour $f \in R^+ \to E$ et $M \in R$ que*

(α) *la fonction f est indéfiniment dérivable sur R^+,*

(β) *il existe pour chaque $\lambda \in R^+$ un a tel que $0 < a \leqslant \lambda$ et que*

$$f(\lambda+\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\eta^k}{k!}f^{(k)}(\lambda)$$

uniformément en $|\eta| \leqslant a$ (l'analyticité de la fonction f),

(γ) *il existe une constante $\chi \geqslant 0$ telle que*

$$(1)\qquad \|f^{(p)}(\lambda)\| \leqslant \frac{Mp!}{\lambda^{p+1}}$$

pour tout $\lambda > \chi$ et tout $p = 0, 1, 2, \ldots$

Alors l'inégalité (1) *reste en vigueur pour tout $\lambda > 0$ et tout $p = 0, 1, 2, \ldots$*

Démonstration. Soit $\xi \geqslant 0$ le plus petit nombre tel que l'on ait (1) pour tout $\lambda > \xi$. On a toujours $\xi \leqslant \chi$. Si $\xi = 0$, il n'y a rien à prouver. Supposons donc que $0 < \xi \leqslant \chi$ et posons $\varphi(\lambda) = \lambda^{-1}$ pour $\lambda > 0$. On vérifie aisément que (cf. 1.4) l'on a pour tout $p = 0, 1, \ldots$

$$(2)\qquad \|f^{(p)}(\xi)\| \leqslant \frac{Mp!}{\xi^{p+1}} = (-1)^p M\varphi^{(p)}(\xi).$$

On constate facilement l'existence d'un a tel que $0 < a \leqslant \xi$ et que l'on a pour tout $|\eta| \leqslant a$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi^{(p)}(\xi-\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^k}{k!} \varphi^{(p+k)}(\xi), \tag{3}$$

$$f^{(p)}(\xi-\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^p}{k!} f^{(p+k)}(\xi), \tag{4}$$

où la convergence des séries est uniforme en $|\eta| \leqslant a$. Il résulte alors de (2), (3) et (4) que

$$\begin{aligned} \|f^{(p)}(\xi-\eta)\| &\leqslant M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\eta|^k}{k!} (-1)^{p+k} \varphi^{(p+k)}(\xi) \\ &= M(-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-|\eta|)^k}{k!} \varphi^{(p+k)}(\xi) \\ &= M(-1)^p \varphi^{(p)}(\xi-|\eta|). \end{aligned} \tag{5}$$

Ceci étant, on conclut de (5) et 1.4 pour $0 \leqslant \eta \leqslant a$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$ que

$$\|f^{(p)}(\xi-\eta)\| \leqslant \frac{Mp!}{(\xi-\eta)^{p+1}},$$

ce qui contredit l'inégalité supposée sur ξ.

1.7. Lemme. *Soit $S, P \in \mathfrak{L}^+(E)$. Admettons que l'opérateur S est biunivoque, $S^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$, $PS^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \|(PS^{-1})^k\| < \infty$. Alors l'opérateur $S+P$ est également biunivoque, $(S+P)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ et*

$$(S+P)^{-1} = S^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-PS^{-1})^k. \tag{1}$$

Démonstration. La convergence de la série dans le membre droit de (1) est évidente. Le reste se vérifie par un calcul direct.

1.8. Lemme (de Post et Widder). *Lorsque la fonction $f \in R^+ \to E$ est continue et qu'il existe deux constantes K et $\varkappa$ telles que $\|f(t)\| \leqslant Ke^{\varkappa t}$ pour tout $t \in R^+$, on a pour tout $t \in R^+$*

$$\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{n}{t}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-n\tau/t} \tau^{n-1} f(\tau)\, d\tau \to f(t) \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

La démonstration est bien connue dans le cas classique $E = R$; le cas vectoriel est analogue.

1.9. LEMME. *Si* $|||\cdot|||$ *est une norme sur* E *et* M *est une constante telle que* $\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\|$ *pour tout* $x \in E$, *on a* $\|T\| \leqslant |||T||| \leqslant M\|T\|$ *pour tout* $T \in \mathfrak{L}(E)$.

1.10. LEMME. *Si les opérateurs* $T, S \in \mathfrak{L}(E)$ *sont commutatifs, biunivoques et tels que* $T^{-1}, S^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$, *on a*

$$T^{-1} - S^{-1} = (S-T)T^{-1}S^{-1}.$$

1.11. LEMME. *Soient* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ *et* $\lambda \in R$. *Si l'opérateur* $\lambda I + A$ *est biunivoque et tel que* $(\lambda I+A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$, *on a pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$(\lambda I+A)^{-1}Ax = x - \lambda(\lambda I+A)^{-1}x.$$

1.12. LEMME. *Soient* Λ *un intervalle ouvert,* $f_k \in R^+ \to R$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$ *et* $f, g \in R^+ \to E$. *Si les fonctions* f_k *sont continûment dérivables sur* Λ *et* $f_k(t)$ *converge vers* $f(t)$, *de même que* $f_k'(t)$ *vers* $g(t)$ *avec* $k \to \infty$ *localement uniformément sur* Λ, *la fonction* f *est aussi continûment dérivable sur* Λ *et on a* $f' = g$.

La démonstration est analogue à celle du cas classique.

2. *L'HYPOTHÈSE PRINCIPALE*

2.1. Admettons dorénavant qu'un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et deux constantes $M \geqslant 0$ et $\omega \geqslant 0$ sont donnés ayant les propriétés suivantes:

(I) l'opérateur A est défini densement,

(II) l'opérateur $\lambda^2 I + A$ est biunivoque et on a $(\lambda^2 I+A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ pour tout $\lambda > \omega$,

(III) $\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda(\lambda^2 I+A)^{-1} \right\| \leqslant \frac{Mp!}{\lambda^{p+1}}$ pour tout $\lambda > \omega$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$

2.2. PROPOSITION. *Il existe dans* E *une norme* $|||\cdot|||$ *assujettie aux conditions*

$$\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\| \quad \textit{pour tout } x \in E, \tag{1}$$

$$\left|\left|\left| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda(\lambda^2 I+A)^{-1} \right|\right|\right| \leqslant \frac{p!}{\lambda^{p+1}} \quad \textit{pour tout } \lambda > \omega \textit{ et } p = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Démonstration. Il existe d'après [3], [4] 3.2 (ou encore d'après [3], 6.1) une fonction-cosinus $\mathscr{C}$ telle que $\mathscr{C}{:} = -A$ et $\|\mathscr{C}(t)\| \leqslant M\operatorname{coh}(\omega t)$ pour tout $t \in R^+$ (voir [3], p. 8).

Posons

$$|||x||| = \sup_{t \in R^+} \|\mathscr{C}(t)x\|$$

pour tout $x \in E$. La condition (1) est évidente.

On conclut de [3], 2.10, que $|||\mathscr{C}(t)||| \leqslant \operatorname{coh}(\omega t)$ pour tout $t \in R^+$, ce qui entraîne (2), car

$$\lambda(\lambda^2 I + A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\mathscr{C}(\tau)x\,d\tau$$

pour tout $\lambda > 0$ et $x \in E$.

2.3. Proposition. *On a pour $\lambda > 0$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$*

(1) $$\left|\left|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda^2 I + A)^{-1}\right|\right|\right| \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Démonstration. On n'a qu'à écrire

$$(\lambda^2 I + A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}[\lambda(\lambda^2 I + A)^{-1}]$$

et à utiliser 1.2 et 1.4.

Remarque. La norme $|||\cdot|||$ qui vient d'être introduite et les inégalités 2.2 (1), 2.2 (2) et 2.3 (1) qui s'y rattachent jouera un rôle décisif dans la section 3 qui va suivre.

2.4. Proposition. *On a pour tout $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$*

(1) $$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda I + A)^{-1}\right\| \leqslant M(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda - \omega^2}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de [3], 4, 9 et [3], 3, 2.

2.5. Proposition. *On a pour tout $\lambda > \omega^2$ et $|\eta| \leqslant \frac{1}{2}(\lambda - \omega^2)$*

$$[(\lambda + \eta)I + A]^{-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\eta^k}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda I + A)^{-1},$$

où la série dans le membre droit converge uniformément en $|\eta| \leqslant \frac{1}{2}(\lambda - \omega^2)$.

La démonstration résulte de 2.4 (1).

3. ESTIMATIONS AUXILIAIRES

3.1. Lemme. *On a pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma \geqslant 0$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$*

(1) $$\left|\left|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda + \sigma)[\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 I + A]^{-1}\right|\right|\right| \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\lambda + \sigma}{\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 - \omega^2},$$

(2) $$\left|\left|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}[\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 I + A]^{-1}\right|\right|\right| \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 - \omega^2}.$$

Démonstration. En écrivant

$$\Phi_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2 I + A)^{-1}, \qquad \Phi_2(\lambda) = (\lambda^2 I + A)^{-1},$$

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - \omega^2)^{-1}, \qquad \varphi_2(\lambda) = (\lambda^2 - \omega^2)^{-1},$$

on tire de 2.2 (2) et 2.3 (1) à l'aide de 1.3

$$\left|\!\left|\!\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda+\sigma)[\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A]^{-1} \right|\!\right|\!\right| \leqslant \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d^p}{d\lambda^p} \Phi_1\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big) \right|\!\right|\!\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\sqrt{\varepsilon})^p \left|\!\left|\!\left| \Phi_1^{(p)}\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big) \right|\!\right|\!\right| \leqslant \frac{(-1)^p}{\sqrt{\varepsilon}} (\sqrt{\varepsilon})^p \varphi_1^{(p)}\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big)$$

$$= \frac{(-1)^p}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d^p}{d\lambda^p} \varphi_1\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big) = (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{\lambda+\sigma}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 - \omega^2},$$

$$\left|\!\left|\!\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}[\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A]^{-1} \right|\!\right|\!\right| = \left|\!\left|\!\left| \frac{d^p}{d\lambda^p} \Phi_2\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big) \right|\!\right|\!\right|$$

$$= (\sqrt{\varepsilon})^p \left|\!\left|\!\left| \Phi_2^{(p)}\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big) \right|\!\right|\!\right| \leqslant (-1)^p (\sqrt{\varepsilon})^p \varphi_2^{(p)}\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big)$$

$$= (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \varphi_2\big(\sqrt{\varepsilon}(\lambda+\sigma)\big) = (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 - \omega^2}.$$

3.2. LEMME. *On a pour tout* $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma \geqslant 0$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ *et* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\text{(1)} \qquad \left|\!\left|\!\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}\big(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\big)^{-k} \right|\!\right|\!\right| \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\big(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 - \omega^2\big)^k},$$

$$\text{(2)} \qquad \left|\!\left|\!\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}\big(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\big)^{-k} \right|\!\right|\!\right| \leqslant \frac{(p+2k-1)!}{(2k-1)!} \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{1}{(\lambda - \omega/\sqrt{\varepsilon})^{p+2k}}.$$

Démonstration. On a en effet d'après 1.2 et 3.1 (2)

$$\text{(3)} \qquad \left|\!\left|\!\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}\big(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\big)^{-k} \right|\!\right|\!\right|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=p \\ p_i \geqslant 0,\, i=1,\ldots,k}} \frac{p!}{p_1!p_2!\ldots p_k!} (-1)^{p_1} \frac{d^{p_1}}{d\lambda^{p_1}} \frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 - \omega^2} \ldots (-1)^{p_k} \frac{d^{p_k}}{d\lambda^{p_k}} \times$$

$$\times \frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 - \omega^2} = (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\big(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 - \omega^2\big)^k},$$

c'est-à-dire (1).

Il s'ensuit de 1.2 et 1.4 que

$$(4)\qquad (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left((\lambda+\sigma)^2 - \frac{\omega^2}{\varepsilon}\right)^{-k}$$

$$= (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\left(\lambda+\sigma+\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-k}\left(\lambda+\sigma-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-k}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{p} \frac{p!}{j!(p-j)!}\,\frac{(j+k-1)!}{(k-1)!}\left(\lambda+\sigma+\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-(j+k)}\times$$

$$\times \frac{(p-j+k-1)!}{(k-1)!}\left(\lambda+\sigma-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-(p-j+k)}$$

$$\leqslant \sum \frac{p!}{j!(p-j)!}\,\frac{(j+k-1)!}{(k-1)!}\left(\lambda-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-(j+k)}\times$$

$$\times \frac{(p-j+k-1)!}{(k-1)!}\left(\lambda-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-(p-j+k)}$$

$$= (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\left(\lambda-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-k}\left(\lambda-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-k}\right]$$

$$= (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-2k} = \frac{(p+2k-1)!}{(2k-1)!}\left(\lambda-\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-(p+2k)}.$$

Ainsi (3) et (4) entraînent (2).

3.3. Lemme. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\sigma \geqslant 0$. Alors*

(1) *la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\right)^{-1}\right]^k$$

est absolument convergente et indéfiniment dérivable en $\lambda > \sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$,

(2) *on a*

$$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\right)^{-1}\right]^k\right\| \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\,\frac{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2}$$

pour tout $\lambda > \sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$ et $p = 0, 1, \ldots$

Démonstration. Fixons un $\varepsilon > 0$, un $\sigma \geqslant 0$ et un $p = 0, 1, \ldots$

On conclut de 3.2 (2) que pour tout $\lambda > \omega/\sqrt{\varepsilon}$

$$(3)\qquad \left|\left|\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\sigma/2\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\right)^{-1}\right]^k \right|\right|\right|$$

$$\leqslant \left(\frac{\sigma}{2}\right)^k \frac{(p+2k-1)!}{(2k-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^k}\,\frac{1}{(\lambda-\omega/\sqrt{\varepsilon})^{p+2k}} = a_k(\lambda),$$

d'où

$$(4)\qquad \frac{a_{k+1}(\lambda)}{a_k(\lambda)} \leqslant \frac{(p+2k)(p+2k+1)}{2k(2k+1)}\,\frac{\sigma}{2\varepsilon}\,\frac{1}{(\lambda-\omega/\sqrt{\varepsilon})^2}.$$

Soit maintenant $\eta > 0$ quelconque. On a pour tout $\lambda \geqslant \sqrt{1+\eta}\,\sqrt{\sigma/2\varepsilon} + \omega/\sqrt{\varepsilon}$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon}\,\frac{1}{(\lambda-\omega\sqrt{\varepsilon})^2} \leqslant \frac{1}{1+\eta},$$

donc en vertu de (4) pour k suffisamment grand

$$\frac{a_{k+1}(\lambda)}{a_k(\lambda)} \leqslant \frac{1}{1+\eta/2},$$

ce qui entraîne d'après (3) que pour tout $\eta > 0$ la suite

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\right)^{-1}\right]^k$$

converge uniformément en $\lambda \geqslant \sqrt{1+\eta}\,\sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire qu'elle est localement uniformément convergente en $\lambda > \sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$.

. Grâce au lemme 1.12 on en déduit aisément la thèse (1) et, en outre, l'identité

$$(5)\qquad \frac{d^p}{d\lambda^p}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\right)^{-1}\right]^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2 I + A\right)^{-1}\right]^k$$

pour tout $\lambda > \sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$.

On montre par un raisonnement analogue en posant simplement $A = \omega^2 I$ que

(6) la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\,\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}\right]^k$$

est convergente et elle est indéfiniment dérivable en $\lambda > \sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$,

(7) on a

$$\frac{d^p}{d\lambda^p}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}\right]^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{\sigma}{2}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}\right]^k$$

pour tout $\lambda>\sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$.

Ceci étant, on n'a qu'à appliquer 3.2 (1) pour conclure de (5) et (7) que pour tout $\lambda>\sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A\right)^{-1}\right]^k\right|\right|\right| &\leqslant(-1)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{\sigma}{2}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}\right]^k\\ &=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}\right]^k\\ &=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{1-\dfrac{\sigma}{2}\dfrac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}}\\ &=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2},\end{aligned}$$

ce qui est la thèse (2).

3.4. Lemme. *On a pour tout* $\varepsilon>0,\sigma\geqslant0,\lambda>\sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$ *et* $p=0,1,\ldots$

$$\text{(1)}\quad\left|\left|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda+\sigma)\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A-\frac{\sigma}{2}I\right)^{-1}\right|\right|\right|\leqslant(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\lambda+\sigma}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2},$$

$$\text{(2)}\quad\left|\left|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A-\frac{\sigma}{2}I\right)^{-1}\right|\right|\right|\leqslant(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2}.$$

Démonstration. L'inégalité $\lambda>\sqrt{\sigma/2\varepsilon}+\omega/\sqrt{\varepsilon}$ en entraîne les deux suivantes: $\lambda>\omega/\sqrt{\varepsilon}$ et $\lambda>\sqrt{\sigma/2\varepsilon+\omega^2/\varepsilon}$, d'où $\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\sigma/2>\omega^2$. Par conséquent, l'opérateur

$$\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A-\frac{\sigma}{2}I\right)^{-1}$$

existe en vertu de 2.1 (II) et, en outre, les lemmes 3.1 et 3.3 sont applicables.

On peut donc écrire grâce à 1.7 et 3.3(1)

$$\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A-\frac{\sigma}{2}I\right)^{-1}=\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A\right)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A\right)^{-1}\right]^k,$$

d'où en vertu de 3.1, 3.3 et 1.2

$$\left\|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda+\sigma)\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A-\frac{\sigma}{2}I\right)^{-1}\right\|\right|$$
$$\leqslant(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\lambda+\sigma}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}\,\frac{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2}$$
$$=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\lambda+\sigma}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2},$$

ce qui est (1), et

$$\left\|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\varepsilon(\lambda+\sigma)^2I+A-\frac{\sigma}{2}I\right)^{-1}\right\|\right|$$
$$\leqslant(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}\,\frac{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2}$$
$$=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+\sigma)^2-\omega^2-\sigma/2},$$

ce qui est (2).

3.5. PROPOSITION. *On a pour tout* $\lambda>\omega^2$, $\varepsilon>0$ *et* $p=0,1,\ldots$

(1) $$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}\right\|\leqslant(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{M}{\lambda-\omega^2},$$

(2) $$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda^2I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}\right\|\leqslant(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{M}{\lambda-\omega^2}.$$

Démonstration. Ecrivons pour $\lambda>\omega^2$, $\varepsilon>0$ et $p=0,1,\ldots$

(3)
$$\left(\lambda^2I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}=\varepsilon(\varepsilon\lambda^2I+\lambda I+A)^{-1}=\varepsilon\left[\varepsilon\left(\lambda+\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2I+A-\frac{1}{4\varepsilon}I\right]^{-1},$$

(4) $$\left(\lambda+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}=\varepsilon\left(\lambda+\frac{1}{2\varepsilon}\right)\left[\varepsilon\left(\lambda+\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2I+A-\frac{1}{4\varepsilon}I\right]^{-1}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\lambda+\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2I+A-\frac{1}{4\varepsilon}I\right]^{-1}.$$

Considérons d'abord (4). En posant $\sigma = 1/2\varepsilon$ et $a = \omega^2$ on déduit de 3.4 et 1.5 (1) pour $\lambda > 1/2\varepsilon + \omega/\sqrt{\varepsilon}$

$$(5)\quad \left|\left|\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}\right|\right|\right|$$

$$\leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\varepsilon(\lambda+1/2\varepsilon)}{\varepsilon(\lambda+1/2\varepsilon)^2-\omega^2-1/4\varepsilon}+\frac{1}{2}(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+1/2\varepsilon)^2-\omega^2-1/4\varepsilon}$$

$$=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\lambda+1/2\varepsilon}{\lambda^2+\lambda/\varepsilon-\omega^2/\varepsilon}+\frac{1}{2\varepsilon}(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda^2+\lambda/\varepsilon-\omega^2/\varepsilon}$$

$$=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{\lambda+1/\varepsilon}{\lambda^2+\lambda/\varepsilon-\omega^2/\varepsilon}\leqslant(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-\omega^2}.$$

Considérons ensuite l'identité (3). On en déduit en vertu de 3.4 (2) et 1.5 (2) (en posant comme auparavant $\sigma = 1/2\varepsilon$, $a = \omega^2$ et $\lambda > 1/2\varepsilon + \omega/\sqrt{\varepsilon}$)

$$(6)\quad \left|\left|\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda^2 I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}\right|\right|\right| \leqslant \varepsilon(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\varepsilon(\lambda+1/2\varepsilon)^2-\omega^2-1/4\varepsilon}$$

$$=(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda^2+\lambda/\varepsilon-\omega^2/\varepsilon}\leqslant\varepsilon(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-\omega^2}.$$

Posons pour $\lambda > \omega^2$

$$(7)\quad \Phi_1(\lambda) = (\varepsilon\lambda+1)(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1},$$

$$(8)\quad \Phi_2(\lambda) = \varepsilon(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1}$$

et pour $\mu > 0$

$$(9)\quad \Psi_1(\mu) = \Phi_1(\mu+\omega^2),$$

$$(10)\quad \Psi_2(\mu) = \Phi_2(\mu+\omega^2).$$

Vu l'identité

$$(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1},$$

il s'ensuit de (5)-(10) pour $\mu > 1/2\varepsilon+\omega/\sqrt{\varepsilon}-\omega^2$

$$(11)\quad \left|\left|\left| \frac{d^p}{d\mu^p}\Psi_1(\mu)\right|\right|\right| \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\mu^p}\frac{1}{\mu},$$

$$(12)\quad \left|\left|\left| \frac{d^p}{d\mu^p}\Psi_2(\mu)\right|\right|\right| \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\mu^p}\frac{1}{\mu}.$$

En vertu de (7)-(10) et de 2.5, les fonctions Ψ_1 et Ψ_2 satisfont aux conditions (α) et (β) de 1.6. En vertu de (11) et (12) la condition (γ) avec $\chi = 1/2\varepsilon + \omega/\sqrt{\varepsilon} - \omega^2$ est également satisfaite.

On peut donc appliquer le lemme 1.6 et en conclure que l'on a les inégalités (11) et (12) pour tout $\mu > 0$. Si l'on écrit, pour $\lambda > \omega^2$, $\Phi_1(\lambda) = \Psi_1(\lambda - \omega^2)$ et $\Phi_2(\lambda) = \Psi_2(\lambda - \omega^2)$ conformément à (9) et (10), on obtient aussitôt (5) et (6) pour tout $\lambda > \omega^2$.

Il suffit maintenant de se servir de 1.9 et 2.2 (1) pour en déduire (1) et (2) en vertu de (5) et (6), ce qui achève la démonstration.

3.6. Proposition. *On a pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, $\lambda > \omega^2$, $\varepsilon > 0$ *et* $p = 0, 1, \ldots$

$$(1)\quad \left|\left|\left| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1} x - \frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda I + A)^{-1} x \right|\right|\right|$$
$$\leqslant \varepsilon(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{M}{\lambda - \omega^2}\|Ax\| + \frac{M^2}{(\lambda-\omega^2)^2}\|A^2 x\|\right].$$

Démonstration. On peut écrire en vertu des lemmes 1.10 et 1.11

$$(2)\quad \left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1} x - (\lambda I + A)^{-1} x$$
$$= \varepsilon\lambda(\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1}x + [(\varepsilon\lambda^2 + \lambda I + A)^{-1}x - (\lambda I + A)^{-1}x]$$
$$= \varepsilon\lambda(\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1}x - \varepsilon\lambda^2(\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1}(\lambda I + A)^{-1}x$$
$$= \varepsilon\lambda(\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1}\{x - \lambda(\lambda I + A)^{-1}x\}$$
$$= \lambda\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}(\lambda I + A)^{-1}Ax$$
$$= \left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}\{Ax - (\lambda I + A)^{-1}A^2 x\}.$$

Pour l'estimer, considérons les inégalités 3.5 (2) et 2.4 (1). On en déduit à l'aide de la formule de Leibnitz 1.2 (1) pour $k = 2$

$$(3)\quad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}(\lambda I + A)^{-1} \right\|$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{p} \frac{p!}{j!(p-j)!}(-1)^j \frac{d^j}{d\lambda^j}\frac{M}{\lambda-\omega^2}(-1)^{p-j}\frac{d^{p-j}}{d\lambda^{p-j}}\frac{M}{\lambda-\omega^2}$$
$$= \varepsilon(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{M^2}{(\lambda-\omega^2)^2}.$$

3.7. PROPOSITION. *Il existe pour tout $x \in E$ et $\delta > 0$ un $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel on a, quels que soient $\lambda > \omega^2$, $p = 0, 1, \ldots$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x-\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda I+A)^{-1}x\right\| \leqslant \delta(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{1}{\lambda-\omega^2}\,\frac{1}{(\lambda-\omega^2)^2}\right]. \tag{1}$$

Démonstration. Soient $x \in E$ et $\delta > 0$. $\mathfrak{D}(A^2)$ étant dense, il existe une suite $x_k \in \mathfrak{D}(A^2)$ convergeant vers x lorsque $k \to \infty$. En vertu de 3.5 (1), il existe donc un k_1 tel que l'on a pour tout $\lambda > \omega^2$, $\varepsilon > 0$, $p = 0, 1, \ldots$ et $k \geqslant k_1$

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}I+A\right)^{-1}(x-x_k)\right\| \leqslant \frac{\delta}{3}(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-\omega^2}. \tag{2}$$

En outre, il existe d'après 2.4 un k_2 tel que l'on a pour tout $\lambda > \omega^2$, $p = 0, 1, \ldots$ et $k \geqslant k_2$

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda I+A)^{-1}(x-x_k)\right\| \leqslant \frac{\delta}{3}(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-\omega^2}. \tag{3}$$

Fixons un k tel que $k \geqslant k_1$ et $k \geqslant k_2$. Il existe en vertu de 3.6 un $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'on a pour tout nombre positif $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I+\lambda\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x_k-\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda I+A)^{-1}x_k\right\| \leqslant \frac{\delta}{3}(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-\omega^2}+\delta(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{(\lambda-\omega^2)^2}. \tag{4}$$

Alors, (1) résulte de (2)-(4).

4. EXISTENCE ET CONVERGENCE DES SOLUTIONS

4.1. THÉORÈME D'EXISTENCE. *Il existe pour tout $x, y \in \mathfrak{D}(A)$ et tout $\varepsilon > 0$ une et une seule fonction $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ ayant les propriétés suivantes:*

(a) *u_ε est deux fois continûment dérivable,*

(b) *$u_\varepsilon(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,*

(c) *$\varepsilon u_\varepsilon''(t)u_\varepsilon'+(t)+Au_\varepsilon(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$,*

(d) *$u_\varepsilon(0_+) = x$, $u_\varepsilon'(0_+) = y$.*

En outre, si une fonction $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ satisfait pour un $\varepsilon > 0$ et pour un couple $x, y \in E$ aux conditions (a)-(d), *on a pour tout $t \in R^+$*

$$\|u_\varepsilon(t)\| \leqslant \dot{M}e^{\omega^2 t}(\|x\|+\varepsilon\|y\|), \tag{1}$$

et si l'on ajoute la condition $x \in \mathfrak{D}(A)$, *on a de plus*

(2) $$\|u'_\varepsilon(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t}(\|Ax\| + 2\|y\|).$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 6.1 de [4]. Il suffit d'y substituer l'opérateur $(1/\varepsilon)A$ à A, l'opérateur $(1/\varepsilon)I$ à B et utiliser les évaluations 3.5 (1) et 3.5 (2).

4.2. THÉORÈME D'EXISTENCE. *Il existe pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A)$ *une et une seule fonction* $u \in R^+ \to E$ *ayant les propriétés suivantes:*

(a) u *est continûment dérivable,*

(b) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t \in R^+$,

(c) $u'(t) + Au(t) = 0$ *pour tout* $t \in R^+$,

(d) $u(0_+) = x$.

En outre, si une fonction $u \in R^+ \to E$ *satisfait pour un* $x \in E$ *aux conditions* (a)-(d), *on a pour tout* $t \in R^+$:

(1) $$\|u(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t}\|x\|;$$

et si l'on ajoute la condition $x \in \mathfrak{D}(A)$ *on a de plus*

(2) $$\|u'(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t}\|Ax\|.$$

Démonstration. Il ne s'agit que d'une autre manière de formuler pour l'opérateur A le théorème de Hille et Yosida qui est applicable grâce à 2.4.

4.3. THÉORÈME D'ÉCART. *Pour toute famille de fonctions* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *où* $\varepsilon > 0$, *pour toute fonction* $u \in R^+ \to E$ *et pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, $y \in E$ *tels que les conditions* (a)-(d) *de* 4.1 *et* 4.2 *et les inégalités* 4.1(1) *et* 4.2(1) *sont satisfaites, on a pour tout* $t \in R^+$ *et* $\varepsilon > 0$

(1) $$\|u_\varepsilon(t) - u(t)\| \leqslant \varepsilon Me^{\omega^2 t}(\|Ax\| + tM\|A^2x\| + \|y\|).$$

Démonstration. L'opérateur A étant fermé, on peut vérifier aisément que pour $\lambda > \omega^2$

(2) $$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}u_\varepsilon(\tau)\,d\tau = \left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x + \\ + \left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}y,$$

(3) $$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}u(\tau)\,d\tau = (\lambda I + A)^{-1}x.$$

Comme

$$\frac{d^p}{d\lambda^p}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}u_\varepsilon(\tau)\,d\tau = (-1)^p\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p u_\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

et

$$\frac{d^p}{d\lambda^p}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}u(\tau)\,d\tau = (-1)^p\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p u(\tau)\,d\tau,$$

il résulte de 3.6 (1) et 3.5 (2) pour tout $\lambda > \omega^2$, $\varepsilon > 0$ et $p = 0, 1, \ldots$, compte tenu de (2) et (3) que

$$(4)\qquad \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p u_\varepsilon(\tau)\,d\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p u(\tau)\,d\tau\right\|$$
$$\leqslant \varepsilon(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{M}{\lambda-\omega^2}(\|Ax\|+\|y\|)+\varepsilon(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{M^2}{(\lambda-\omega^2)^2}\|A^2x\|.$$

En posant $\lambda = (p+1)/t$, il s'ensuit de (4) que l'on a pour tout $t \in R^+$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $p > t\omega^2$

$$(5)\qquad \left\|\frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1}\int_0^\infty e^{-(p+1)\tau/t}\tau^p u_\varepsilon(\tau)\,d\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1}\int_0^\infty e^{-(p+1)\tau/t}\tau^p u(\tau)\,d\tau\right\|$$
$$\leqslant \varepsilon M e^{\omega^2 t}(\|Ax\|+tM\|A^2x\|+\|y\|).$$

Reste à passer à la limite pour $p \to \infty$ dans (5) et de se servir du lemme de Post et Widder 1.8.

Les deux théorèmes qui suivent sont de simples conséquences de 4.1 et 4.2, A étant fermé et domaine $\mathfrak{D}(A)$ étant dense.

4.4. Théorème d'existence. *Il existe pour tout couple $x, y \in E$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, une et une seule fonction $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ ayant les propriétés suivantes:*

(a) *elle est continue sur R^+ et bornée dans l'intervalle ouvert* $(0, 1)$,

(b) $\int_0^t\int_0^\tau u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t \in R^+$,

(c) $\varepsilon u_\varepsilon(t) + \int_0^t u_\varepsilon(\tau)\,d\tau + A\int_0^t\int_0^\tau u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \varepsilon x + tx + \varepsilon ty$ *pour tout* $t \in R^+$.

En outre, si une fonction $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ satisfait pour un $\varepsilon > 0$ et un couple $x, y \in E$ aux conditions (a)-(c), *on a pour $t \in R^+$*

$$(1)\qquad \|u_\varepsilon(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t}(\|x\|+\varepsilon\|y\|).$$

4.5. Théorème d'existence. *Il existe pour tout $x \in E$ une et une seule fonction $u \in R^+ \to E$ ayant les propriétés suivantes:*

(a) *elle est continue sur R^+ et bornée dans l'intervalle ouvert* $(0, 1)$,

(b) $\int_0^t u(\tau)\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t \in R^+$,

(c) $u(t)+A\int\limits_0^t u(\tau)d\tau = x$ *pour tout* $t\in R^+$.

En outre, si une fonction $u\in R^+ \to E$ *satisfait pour un* $x\in E$ *aux conditions* (a)-(c), *on a pour* $t\in R^+$

(1) $$\|u(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t}\|x\|.$$

Il est facile d'établir les deux propositions suivantes, compte tenu que A est fermé:

4.6. PROPOSITION. *Les conditions* 4.4 (a)-(c) *subsistent pour tout couple* $x, y\in E$, *tout nombre* $\varepsilon > 0$ *et toute fonction* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$, *qui satisfont aux conditions* 4.1 (a)-(d).

4.7. PROPOSITION. *Les conditions* 4.5 (a)-(c) *subsistent pour tout* $x\in E$ *et tout* $u\in R^+ \to E$ *ayant les propriétés* 4.2 (a)-(d).

4.8. THÉORÈME DE CONVERGENCE. *Pour toute famille de fonctions* $u_\varepsilon\in R^+ \to E$ *où* $\varepsilon > 0$ *et pour toute fonction* $u\in R^+ \to E$ *pour lesquelles il existe des* $x, y\in E$ *tels que les conditions* (a)-(c) *de* 4.4 *et* 4.5 *et les inégalités* 4.4 (1) *et* 4.5 (1) *sont satisfaites et pour tout* $\delta > 0$, *il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel qu'on a pour tout* $t\in R^+$ *et* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

(1) $$\|u_\varepsilon(t)-u(t)\| \leqslant \delta(1+t)e^{\omega^2 t}.$$

Démonstration. La formule (1) résulte des propositions 3.7 et 3.5 (2) par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de 4.3.

Remarque. Il est à noter que les théorèmes précédents d'existence d'une part et ceux d'écart et de convergence d'autre part sont indépendants les uns des autres. Les théorèmes d'existence n'ont été établis ici que pour arrondir cette partie de la théorie.

5. COMMENTAIRE

Le comportement asymptotique des solutions u_ε et u considérées au début pour $\varepsilon \to 0_+$ a été étudié par plusieurs auteurs (voir l'introduction de [1] et les travaux y cités; voir aussi [2]). L'étude présente est, en ce qui concerne la forme abstraite du problème, analogue à celle de Kisyński [1] où l'opérateur A est autoadjoint non-négatif dans un espace de Hilbert. Ici, il s'agissait de trouver les conditions les plus générales sur A qui permettraient encore d'obtenir la relation asymptotique fondamentale (cf. théorèmes 4.3 et 4.4). Il semble naturel que les résultats acquis sous ces hypothèses plus générales, sont moins fins que ceux de Kisyński [1] en ce qui concerne la qualité du comportement asymptotique. Mais il n'est pas exclu que les estimations de l'écart dans 4.3 se laissent améliorer sous les mêmes hypothèses sur A (en utilisant par exemple des puissances fractionnaires de A). On remarquera aussi que la méthode de démonstration employée ici est tout à fait différente de celle de [1].

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Kisyński, *Sur les équations hyperboliques avec petit paramètre*, Colloquium Mathematicum 10 (1963), p. 331-343.

[2] J. Nedoma, *Cauchy problem for the hyperbolic equation with a small parameter* (en tchèque, avec un résumé anglais), Časopis pro pěstovaní matematiky 92 (1967), p. 392-417.

[3] M. Sova, *Cosine-operator functions*, Rozprawy Matematyczne 49 (1966), p. 1-47.

[4] — *Problème de Cauchy pour équations hyperboliques opérationnelles à coefficients constants non-bornés*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 22 (1968), p. 67-100.

ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES, PRAGUE

Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1968;
en version définitive le 22. 4. 1969