ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIII (1970)

Sur l'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle du premier ordre avec le paramètre retardé

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dans la note [1] nous avons démontré un théorème sur l'existence d'une solution périodique de l'équation

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t), x(t-h), x'(t-h)\big),$$

où la fonction $f(t, x, y, u, v)$ est continue et croissante par rapport à x, y, u, v. Dans la note présente nous démontrons des théorèmes sur l'existence des solutions périodiques d'une équation du premier ordre

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big), \quad h > 0, \tag{1}$$

où la fonction $f(t, x, y)$ est périodique par rapport à t avec la période h et croissante par rapport à y ou à x. Dans ce cas la croissance de f n'est pas suffisante pour l'existence de la solution périodique de l'équation (1). Dans les théorèmes 1 et 2 nous avons donné certaines autres conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de l'équation (1).

1. Hypothèses A. *La fonction $f(t, x, y)$ est continue par rapport à t, x, y périodique par rapport à t avec la période h et croissante par rapport à y.*

Hypothèses B. 1° *Il existe une fonction $V(t, x)$ de classe C^1. $V(t, x) > 0$ pour $x \neq 0$ et deux constantes $M > 0, R > 0$ telles que*

$$\left|\frac{V_t(t, x)}{V_x(t, x)}\right| \leqslant M \quad \textit{pour } |x| > R, 0 \leqslant t \leqslant h, \tag{1.1}$$

$$V_x(t, x)x > 0, \; V_t(t, x) \geqslant 0 \quad \textit{pour } |x| > R, t \in [0, h]. \tag{1.2}$$

2° *Il existe une fonction $g(r)$ croissante pour $r \geqslant R$ et la constante $k > 1$ telles que*

$$g(r) \geqslant kr \quad \textit{pour } r \geqslant R, \tag{1.3}$$

$$k > 1 \tag{1.4}$$

$$V_t(t, x) + V_x(t, x)f(t, x, y) < 0 \quad \textit{pour } y^2 \leqslant g(x^2), |x| \geqslant R. \tag{1.5}$$

3° *$f(t, x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à x.*

Lemme 1. *Les hypothèses A, B étant supposées, il existe une constante $R_1 \geqslant R$ telle que pour chaque fonction $\varphi(t)$ continue et périodique avec la période h, $|\varphi(t)| \leqslant R_1$, il existe au moins une solution périodique $x_\varphi(t)$ de l'équation*

$$x'(t) = f\big(t, x(t), \varphi(t)\big). \tag{1.6}$$

Démonstration. La fonction $f\big(t, x, \varphi(t)\big)$ étant périodique avec la période h (par rapport à t) il suffit de démontrer qu'il existe dans l'intervalle $[0, h]$ une solution $x_\varphi(t)$ telle que

$$x_\varphi(0) = x_\varphi(h). \tag{1.7}$$

Une telle solution de (1.6) peut être prolongé sur tout intervalle $(-\infty, +\infty)$ d'une manière périodique. Dans la démonstration nous nous servirons du théorème de Brouwer sur l'existance d'un point fixe d'une transformation continue.

Posons

$$R_1 = \max\left(R, \frac{Mh+p}{\sqrt{k}-1}\right), \tag{1.8}$$

où p est une constante positive quelconque.

Désignons par $\sigma_i(t)$ des solutions des équations

$$\sigma_i' = -\frac{V_t\big(t, \sigma_i(t)\big)}{V_x\big(t, \sigma_i(t)\big)} \quad \text{pour } i = 1, 2, \tag{1.9}$$

telles que

$$\sigma_1(0) = R_1 + Mh, \qquad \sigma_2(0) = -R_1 - Mh. \tag{1.10}$$

En vertu de (1.1) on a

$$|\sigma_i'(t)| \leqslant M \tag{1.11}$$

pour tout les t tel que $|\sigma_i(t)| \geqslant R_1$. On a

$$|\sigma_i(0)| = R_1 + Mh > R_1.$$

En vertu de (1.11) on a donc

$$\sigma_1(t) \geqslant \sigma_1(0) - Mt, \qquad \sigma_2(t) \leqslant \sigma_2(0) + Mt$$

pour $t \geqslant 0$ tel que

$$\sigma_1(0) - Mt \geqslant R_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2(0) + Mt \leqslant -R_1.$$

En vertu de (1.10) on a donc

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &\geqslant R_1 + Mh - Mt \geqslant R_1 \\ \sigma_2(t) &\leqslant -R_1 - Mh + Mt \leqslant -R_1 \end{aligned} \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,$$

d'où en vertu de (1.2) et (1.9) on obtient

$$\begin{aligned} &(1.12) \qquad \sigma_1'(t) \leqslant 0 \\ &(1.13) \qquad \sigma_2'(t) \geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,$$

et par suite

$$R_1 \leqslant \sigma_1(h) \leqslant \sigma_1(0), \tag{1.14}$$

$$-R_1 \geqslant \sigma_2(h) \geqslant \sigma_2(0). \tag{1.15}$$

Désignons par Z l'ensemble suivant

$$t = 0, \quad |x| \leqslant R_1 + Mh + p = R_2. \tag{Z}$$

Envisageons l'équation (1.6) pour

$$|\varphi(t)| \leqslant R_1 + Mh + p.$$

En vertu de B 3° on peut introduire la transformation suivante

$$T_\varphi(x) = x_\varphi(h; x), \tag{T_φ}$$

où $x_\varphi(t; x)$ désigne la solution unique de l'équation (1.6) telle que $x_\varphi(0; x) = x$. La transformation $T_\varphi(x)$ est continue dans Z. Nous démontrons que $T_\varphi(Z) \subset Z$. De l'hypothèse (1.5) et (1.2) il vient

$$-\frac{V_t(t, x)}{V_x(t, x)} > f(t, x, y) \quad \text{pour } y^2 \leqslant g(x^2),\ x \geqslant R_1, \tag{1.16}$$

$$-\frac{V_t(t, x)}{V_x(t, x)} < f(t, x, y) \quad \text{pour } y^2 \leqslant g(x^2),\ x \leqslant -R_1. \tag{1.17}$$

Pour $x = \sigma_1(t)$ on a

$$g\big(\sigma_1^2(t)\big) \geqslant g\big(\sigma_1^2(h)\big) \geqslant g(R_1^2) \geqslant kR_1^2. \tag{1.18}$$

En vertu de (1.8) on a

$$R_1 \geqslant \frac{Mh+p}{\sqrt{k}-1}$$

d'où

$$(\sqrt{k}-1)R_1 \geqslant Mh+p, \qquad \sqrt{k}R_1 \geqslant R_1 + Mh + p$$

d'où en vertu de (1.18) on a

$$g(x^2) \geqslant (R_1 + Mh + p)^2 = R_2^2 \quad \text{pour } x = \sigma_1(t),$$

d'où il vient que pour $\varphi^2 \leqslant R_2^2$ on a

$$\sigma_1'(t) = -\frac{V_t\big(t, \sigma_1(t)\big)}{V_x\big((t, \sigma_1(t)\big)} > f\big(t, \sigma_1(t), \varphi(t)\big) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h.$$

De la théorie des inégalités différentielles (cf. [2]) nous obtenons pour $\xi \epsilon Z$

(1.19) $$x_\varphi(t;\xi) < \sigma_1(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,$$

et par suite

$$T_\varphi(\xi) < \sigma_1(h) \leqslant \sigma_1(0).$$

D'une façon analogue on obtient

$$\sigma_2'(t) = -\frac{V_t(t,\sigma_2(t))}{V_x(t,\sigma_2(t))} < f(t,\sigma_2,\varphi(t)) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,$$

et par suite

$$x_\varphi(t;\xi) > \sigma_2(t) > \sigma_2(0) \quad \text{pour } t \epsilon [0,h]$$

d'où

$$T_\varphi(\xi) = x_\varphi(h;\xi) > \sigma_2(h) > \sigma_2(0)$$

et par suite

$$T_\varphi(\xi) \epsilon Z \quad \text{pour } \xi \epsilon Z,$$

c'est-à-dire on a $T_\varphi(Z) \subset Z$. La transformation T_φ étant continue dans l'intérvale Z (férmé) on peut donc se servir du théorème de Brauer sur l'existence d'un point fixe de la transformation $T_\varphi(\xi)$, d'où il vient qu'il existe au moins un point $\xi_\varphi \epsilon Z$ tel que

$$T_\varphi(\xi_\varphi) = \xi_\varphi$$

c'est-à-dire

(1.21) $$x_\varphi(h;\xi_\varphi) = x_\varphi(0;\xi_\varphi) = \xi_\varphi \epsilon Z.$$

2. Hypothèses H. *La fonction $\psi_1(t)$ est continue et périodique avec la période h,*

(2.1) $$\sigma_2(t) < \psi_1(t) \leqslant R_2.$$

Envisageons la fonction $\psi_2(t)$ continue et périodique avec la période h et telle que

(2.2) $$\psi_2'(t) = f(t,\psi_2(t),\psi_1(t)),$$

(2.3) $$\sigma_2(t) < \psi_2(t) < \psi_1(t).$$

Lemme 2. *Les hypothèses* A, B *et* H *étant supposées, il existe au moins une solution $\psi_3(t)$ de l'équation*

(2.4) $$x' = f(t,x,\psi_2(t)),$$

périodique avec la période h et telle que

(2.5) $$\sigma_2(t) < \psi_3(t) < \psi_2(t).$$

Démonstration. Envisageons l'ensemble

(Z^*) $$\sigma_2(0) \leqslant x \leqslant \psi_2(0), \quad t = 0,$$

et la transformation

$$(T^*) \qquad T^*(x) = \psi(h; x)$$

où $\psi(t; x)$ est la solution de l'équation (2.4) telle que

$$\psi(0; x) = x.$$

Nous démontrons que

$$T^*(Z^*) \subset Z^*.$$

Dans le lemme 1 nous avons démontré que pour chaque fonction $\varphi(t)$ telle que $|\varphi(t)| \leqslant R_2 = R_1 + Mh + p$ on a

$$\sigma_2' = -\frac{V_t\big(t, \sigma_2(t)\big)}{V_x\big(t, \sigma_2(t)\big)} < f\big(t, \sigma_2(t), \varphi(t)\big) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h$$

et par suite pour $\varphi(t) = \psi_2(t)$ on a (cf. [2])

$$\sigma_2(t) < \psi(t; x) \quad \text{pour } t \in (0, h],\ \sigma_2(0) \leqslant x. \tag{2.6}$$

Il reste de prouver que

$$\psi(t; x) < \psi_2(t) \quad \text{pour } x \leqslant \psi_2(0),\ t \in (0, h].$$

On a par définition

$$\psi'(t; x) = f\big(t, \psi(t; x), \psi_2(t)\big)$$

d'où $f(t, x, y)$ étant croissante par rapport à y on a en vertu de (2.3)

$$\psi'(t; x) < f\big(t, \psi(t; x), \psi_1(t)\big)$$

et par suite (cf. [2]) en vertu de (2.2) on a

$$\psi(t; x) < \psi_2(t) \quad \text{pour } x \leqslant \psi_2(t; 0),\ t \in (0, h].$$

Ainsi nous avons démontré que $T(Z^*) \subset Z^*$. Par consequence, la transformation T^* étant continue dans l'intérvalle férmé Z il existe au moins un point $x^* \in Z^*$ tel que $T^*(x^*) = x^*$.

Posons par définition $\psi_3(t) = \psi(t; x^*)$. La fonction $\psi_3(t)$ ainsi définie est la solution de l'équation (2.4) telle que

$$\psi_3(h) = T^*(x^*) = x^* = \psi_3(0), \tag{2.7}$$

$$\sigma_2(t) < \psi_3(t) < \psi_2(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h. \tag{2.8}$$

Le lemme 2 est ainsi démontré.

3. Théorème 1. *Les hypothèses* A, B *étant supposées l'équation*

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big) \tag{3.1}$$

admette au moins une solution périodique avec la période h. La solution en question peut être obtenue comme la limite uniforme d'une suite $\{\varphi_n(t)\}$ des solutions périodiques des équations

$$(3.2_n) \qquad \varphi_n'(t) = f\big(t, \varphi_n(t), \varphi_{n-1}(t)\big).$$

Démonstration. Désignons par $\varphi_0(t)$ une fonction continue dans intérvalle $[0, h]$ telle que

$$(3.3) \qquad \varphi_0(0) = \varphi_0(h),$$

$$(3.4) \qquad \sigma_1(0) = R_1+Mh < \varphi_0(t) \leqslant R_2 = R_1+Mh+p.$$

En vertu de lemme 1 il existe au moins une solution $x_{\varphi_0}(t)$ de l'équation (3.2_1) périodique avec la période h

$$(3.5) \qquad \sigma_2(t) < x_{\varphi_0}(t) < \sigma_1(t) < \varphi_0(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h.$$

Désignons par $\varphi_1(t)$ une telle solution. En vertu de (2.5)

$$\sigma_2(t) < \varphi_1(t) < \varphi_0(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(h),$$

$$(3.2_1) \qquad \varphi_1'(t) = f\big(t, \varphi_1(t), \varphi_0(t)\big).$$

Du lemme 2 il vient qu'il existe la fonction $\varphi_2(t)$ périodique avec la période h et telle que

$$\varphi_2'(t) = f\big(t, \varphi_2(t), \varphi_1(t)\big),$$

$$\sigma_2(t) < \varphi_2(t) < \varphi_1(t) \quad \text{pour } t \in 0, h.$$

D'une façon analogue on obtient l'existence d'une fonction $\varphi_{n+1}(t)$ périodique avec la période h et telle que

$$(3.2_{n+1}) \qquad \varphi_{n+1}'(t) = f\big(t, \varphi_{n+1}(t), \varphi_n(t)\big),$$

$$\sigma_2(t) < \varphi_{n+1}(t) < \varphi_n(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,$$

$$(3.3_{n+1}) \qquad \varphi_{n+1}(h) = \varphi_{n+1}(0).$$

Pour démontrer l'existence de φ_{n+1} il suffit de poser dans lemme 2

$$\psi_1(t) = \varphi_{n-1}(t), \qquad \psi_2(t) = \varphi_n(t) \qquad \text{et} \qquad \psi_3(t) = \varphi_{n+1}(t).$$

Ainsi nous avons obtenue une suite decroissante et bornée de fonctions périodiques $\varphi_n(t)$. La suite est donc convergente. Il existe une constante $N > 0$ telle que $|f(t, x, y)| < N$ pour $|x| \leqslant R_2$, $|y| \leqslant R_2$ et par suite de l'inégalité $|\varphi_n(t)| \leqslant R_2$ il vient $|\varphi_n'(t)| \leqslant N$, d'où il vient que la convergence de $\{\varphi_n(t)\}$ est uniforme. On a uniformement

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_n(t) \to \varphi^*(t) \\ &\varphi_n'(t) \to f\big(t, \varphi^*(t), \varphi^*(t)\big) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } t \in [0, h],$$

d'où il vient que

$$\frac{d}{dt}\varphi^*(t) \equiv f\big(t, \varphi^*(t), \varphi^*(t)\big).$$

De (3.3_n) on obtient

$$\varphi^*(h) = \varphi^*(0).$$

Le théorème 1 est ainsi démontré.

4. Exemple. Comme une exemple on peut envisagé l'équation

$$x'(t) = a(t)x(t) + b\big(t, x(t-h)\big)$$

où $a(t)$ est une fonction continue et périodique avec la période h et la fonction $b(t, y)$ est continue et croissante par rapport à y, périodique par rapport à t avec la période h

$$\frac{b(t, kx)}{x} < -a(t) \quad \text{pour } x > R,$$

$$\frac{b(t, kx)}{x} > -a(t) \quad \text{pour } x < -R.$$

On verifie facilement que pour la fonction $V(t, x)$ on peut prendre la fonction x^2.

5. Hypothèses A*. *La fonction $f(t, x, y)$ est continue par rapport à (t, x, y), périodique par rapport à t avec la période h et croissante par rapport à x.*

Hypothèses B*. 1° *Il existe une fonction $V(t, x)$ de classe C^1, $V(t, x) > 0$ pour $x \neq 0$ et deux constantes $M > 0, R > 0$ telles que*

$$\left|\frac{V_t(t, x)}{V_x(t, x)}\right| \leqslant M \quad \textit{pour } |x| \geqslant R, 0 \leqslant t \leqslant h, \tag{5.1}$$

$$V_x(t, x)x > 0, \quad V_t(t, x) \leqslant 0 \quad \textit{pour } 0 \leqslant t \leqslant h. \tag{5.2}$$

2° *Il existe une fonction $g(r)$ croissante pour $r \geqslant R$ et la constante $k > 1$ telles que*

$$g(r) > kr \quad \textit{pour } r \geqslant R, \tag{5.3}$$

$$k > 1, \tag{5.4}$$

$$V_t(t, x) + V_x(t, x)f(t, x, y) > 0 \quad \textit{pour } y^2 \leqslant g(x^2), |x| \geqslant R. \tag{5.5}$$

3° *$f(t, x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à x.*

Lemme 3. *Les hypothèses* A, B, *étant supposées l'équation*

$$x'(t) = f\big(t, x(t), \varphi(t)\big) \tag{5.6}$$

ne peut pas avoir plus qu'une seule solution périodique avec la période h.

Démonstration. Supposons que la fonction $x_0(t)$ est une solution périodique de l'équation (5.6). On a

$$x_0(t) = \int_0^t f(s, x(s), \varphi(s))\,ds + x_0(0). \tag{5.7}$$

La fonction $x_0(t)$ étant périodique on a

$$\int_0^h f(s, x_0(s), \varphi(s))\,ds = 0. \tag{5.8}$$

Supposons que aussi la fonction $y(t)$ est la solution périodique de (5.6) et $y(t) \not\equiv x_0(t)$. On a $y(0) \neq x_0(0)$ ou $y(0) = x_0(0)$. Envisageons le cas où $y(0) \neq x_0(0)$ par exemple

$$y(0) > x_0(0), \tag{5.9}$$

De la croissance de la fonction $f(t, x, \varphi(t))$ il vient que

$$y'(0) > x_0(0)$$

et par suite $y(t) > x_0(t)$ pour $t \geqslant 0$ dans un voisinage de 0. On a donc

$$y'(t) = f(t, y(t), \varphi(t)) > f(t, x_0(t), \varphi(t)) = x_0'(t)$$

pour $t \geqslant 0$ tel que $y(t) > x_0(t)$ et par suite pour tout $t \geqslant 0$. On a

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s)\,ds > y(0) + \int_0^t x_0'(s)\,ds$$

et en vertu de (5.8) pour $t = h$ on obtient

$$y(h) = y(0) + \int_0^h y'(s)\,ds > y(0) + \int_0^h x_0'(s)\,ds = y(0)$$

ce qui est impossible. Le même raisonnement démontre qu'il ne peut pas être $x_0(0) > y(0)$.

Supposons que $y(0) = x_0(0)$, $y(t) \not\equiv x_0(t)$. Il existe un t_1, $0 < t_1 < h$, tel que

$$y(t) \neq x_0(t) \quad \text{pour } t_1 < t < t_1 + \varepsilon,$$

$$y(t) = x_0(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Envisageons le cas où

$$y(t) > x_0(t) \quad \text{pour } t_1 < t < t_1 + \varepsilon$$

on a donc

$$y'(t) = f(t, y(t), \varphi(t)) > f(t, x_0(t), \varphi(t)) = x_0'(t) \quad \text{pour } t_1 < t < t_1 + \varepsilon$$

d'où il vient

$$y(t) > x_0(t) \quad \text{pour } t_1 < t \leqslant h,$$

et

$$y'(t) > x_0'(t) \quad \text{dans tout intervalle } (t_1, h],$$

$$y'(t) = x_0'(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

On a donc

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s)\,ds > y(0) + \int_0^t x_0'(s)\,ds \qquad \text{pour } t > t_1$$

et pour $t = h$ on a

$$y(0) = y(h) > y(0).$$

D'une façon analogue on obtient la contradiction dans le cas

$$x_0(t) > y(t) \qquad \text{pour } t_1 < t \leqslant t_1 + \varepsilon.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré.

6. LEMME 4. *Les hypothèses* A*, B* *étant supposées il existe une constante* $R_1 \geqslant R$ *telle que pour chaque fonction* $\varphi(t)$ *continue dans l'intervalle* $[0, h]$ *et telle que*

(6.1) $$\varphi(0) = \varphi(h), \qquad |\varphi(t)| \leqslant R_1$$

l'équation

(6.2) $$x'(t) = f\big(t, x(t), \varphi(t)\big),$$

possède une solution unique $x_\varphi(t)$ *satisfaisante à la condition*

(6.3) $$x_\varphi(0) = x_\varphi(h),$$

Démonstration. Désignons par R_1 un nombre positif tel que

(6.4) $$(k-1)R^2 - 2MhR - (Mh)^2 > 0 \qquad \text{pour } R \geqslant R_1.$$

Désignons par $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, des solutions des équations

(6.5) $$\lambda_i(t) = -\frac{V_t\big(t, \lambda_i(t)\big)}{V_x\big(t, \lambda_i(t)\big)}, \qquad i = 1, 2, \text{ pour } |\lambda_i| > R,$$

$$\lambda_1(0) = R_1, \qquad \lambda_2(0) = -R_1.$$

En vertu de (5.2) et (6.5) on a

$$\lambda_1'(t) \geqslant 0, \qquad \lambda_2'(t) \leqslant 0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,$$

et par suite

(6.6) $$\lambda_1(h) \geqslant \lambda_1(t) \geqslant \lambda_1(0) = R_1,$$

(6.7) $$\lambda_2(h) \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \lambda_2(0) = R_1.$$

Envisageons une fonction quelconque continue $\varphi(t)$ satisfaisante à (1.6) et

(6.8) $$|\varphi(t)| \leqslant R_1 + Mh.$$

Nous démontrons que pour $x = \lambda_i(t)$ on a

$$g(\lambda_i^2(t)) \geqslant \varphi^2(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h.$$

On a

$$\lambda_i^2(t) \geqslant \lambda_i^2(0) \quad \text{(cf. (6.6) et (6.7))},$$

$$g(\lambda_i^2(t)) \geqslant g(\lambda_i^2(0)) = g(R_1^2);$$

en vertu de (5.3) on a

$$g(\lambda_i^2(t)) \geqslant g(R_1^2) > kR_1^2 = R_1^2 + (k-1)R_1^2$$

et en vertu de (6.4) et (6.8)

(6.9) $$g(\lambda_i^2(t)) > R_1^2 + 2MhR_1 + (Mh)^2 = (R_1 + Mh)^2 \geqslant |\varphi(t)|^2.$$

On peut donc poser dans (5.5) $x = \lambda_i(t)$, $y = \varphi(t)$;

$$V_t(t, \lambda_i(t)) + V_x(t, \lambda_i(t)) f(t, \lambda_i(t), \varphi(t)) > 0$$

d'où en vertu de (5.2) on a

$$\lambda_1'(t) = -\frac{V_t(t, \lambda_1(t))}{V_x(t, \lambda_1(t))} < f(t, \lambda_1(t), \varphi(t))$$

et par suite (cf. [2]) on a

(6.10) $$\lambda_1(t) < x_\varphi(t; \lambda_1(0)) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h$$

où $x_\varphi(t; \xi)$ est la solution de (6.2) telle que $x_\varphi(0; \xi) = \xi$.

D'une façon analogue on obtient

$$\lambda_2(t) > x_\varphi(t; \lambda_2(0)).$$

Désignons par Z l'ensemble suivant

(Z) $$\lambda_2(0) \leqslant x \leqslant \lambda_1(0), \quad t = 0.$$

Pour la transformation continue

(T_φ) $$T_\varphi(x) = x_\varphi(h; x)$$

on a

$$Z \subset T_\varphi(Z),$$

et pour la transformation inverse T_φ^{-1} on a

$$T_\varphi^{-1}(T_\varphi(Z)) = Z \subset T_\varphi(Z).$$

Posons $Z^* = T_\varphi(Z)$. On a

$$T^{-1}(Z^*) \subset Z^*.$$

On vérifie facilement que la transformation T_φ^{-1} est continue dans l'intervalle $[T_\varphi(\lambda_2(0)), T_\varphi(\lambda_1(0))]$. En vertu de théorème de Brouwer il existe donc un point fixe de la transformation T_φ^{-1} appartenant à Z^*. C'est-à-dire il existe au moins un point $\xi_\varphi \epsilon Z^*$ tel que

$$T_\varphi^{-1}(\xi_\varphi) = \xi_\varphi$$

et par suite

$$T_\varphi(\xi_\varphi) = \xi_\varphi. \tag{6.11}$$

La fonction $x_\varphi(t) = x(t; \xi_\varphi)$ est donc la solution de (6.2) satisfaisante à (6.1) et tel que

$$-R_1 - Mh \leqslant \sigma_2(t) < x_\varphi(t) < \sigma_1(t) \leqslant R_1 + Mh \tag{6.12}$$

(cf. (5.1) et (6.9)).

En vertu de lemme 3 il n'existe pas aucune autre solution de (6.2) satisfaisante à (6.1).

7. Théorème 2. *Les hypothèses* A*, B* *étant supposées il existe au moins une solution périodique de l'équation*

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big). \tag{7.1}$$

Démonstration. Envisageons l'ensemble Ω dans l'espace de Banach des fonctions φ continues dans l'intervalle $[0, h]$ défini par des conditions suivantes

$$\varphi(0) = \varphi(h), \tag{7.2}$$

$$|\varphi(t)| \leqslant R_1 + Mh, \tag{7.3}$$

$$|\varphi(\bar{t}) - \varphi(\bar{\bar{t}})| \leqslant L|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|, \tag{7.4}$$

où L est telle constante que

$$|f(t, x, y)| \leqslant L \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h,\ |x| \leqslant R_1 + Mh,\ |y| \leqslant R_1 + Mh. \tag{7.5}$$

L'ensemble Ω est compacte et convexe. Envisageons la transformation $W(\varphi(\cdot))$ suivante

$$W(\varphi(\cdot)) = x_\varphi(\cdot), \tag{7.6}$$

où $x_\varphi(t)$ est la solution de (6.2) satisfaisant à (6.1). Pour démontrer qu'on peut se servir du théorème de Schauder on doit démontrer que la transformation W est continue dans l'ensemble Ω et que $W(\Omega) \subset \Omega$. En vertu de (6.12), (6.11) et (7.5) on a

$$W(\Omega) \subset \Omega.$$

Il reste de prouver que la transformation W est continue dans Ω. Envisageons une suite quelconque $\{\varphi_n(\cdot)\} \epsilon \Omega$ convergente dans l'intervalle $[0, h]$

$$\varphi_n(t) \to \varphi_0(t) \quad \text{(uniformement)}.$$

Supposons que

$$w_n(t) = W(\varphi_n(t)), \quad w_0(t) = W(\varphi_0(t)).$$

On a

$$w_n'(t) = f(t, w_n(t), \varphi_n(t)), \quad |w_n(t)| \leqslant Mh+R_1$$

et par suite

$$|w_n'(t)| \leqslant L.$$

On peut donc choisir une suite $w_{a_n}(t)$ convergent à la limite $w_0^*(t)$. Supposons que $w^*(t) \not\equiv w_0(t)$,

$$w_{a_n}(t) \to w^*(t) \not\equiv w_0(t) \quad \text{uniformement dans } [0, h].$$

On a

$$(w^*(t))' = f(t, w^*(t), \varphi_0(t)), \quad w(h) = w(0).$$

Mais en vertu de lemme 3 il n'existe pas une autre solution de l'équation

$$x' = f(t, x, \varphi_0(t))$$

satisfaisante à la condition $x(h) = x(0)$, que la solution $w_0(t)$. Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Du théorème de Schauder il vient qu'il existe un point fixe de la transformation $W(\varphi)$. Désignons par $\tilde{\varphi}(t)$ un tel point. On a

$$\tilde{\varphi}'(t) = f(t, \tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(t)), \quad \tilde{\varphi}(h) = (0).$$

Posons $\tilde{\varphi}(t+nh) = \tilde{\varphi}(t)$ pour $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; t \in [0, h]$.

Exemple 2. Comme un exemple on peut envisager l'équation suivante

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t, x(t-h)),$$

où $a(t) > 0$, $a(t)$ continue et périodique, $b(t, y)$ continue. Supposons que il existe une constante $k > 1$ et $R > 0$ telles que

$$\frac{b(t, y)}{x} > -a(t) \quad \text{pour } \frac{y^2}{x^2} \leqslant k,\ |x| \geqslant R.$$

On vérifie facilement qu'on peut poser $V(t, x) = x^2$.

Travaux cités

[1] Z. Mikołajska, *Une remarque sur l'existence d'une solution périodique d'une équation différo-différentielle au deuxième membre croissant*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), pp. 53-58.

[2] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

Reçu par la Rédaction le 26. 6. 1968