ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 2 (1967)

A. PLUCIŃSKA (Warszawa)

NIEZAWODNOŚĆ ZŁOŻONEGO UKŁADU PRZY UWZGLĘDNIENIU CEN POSZCZEGÓLNYCH ELEMENTÓW UKŁADU

W skład złożonego układu wchodzi N elementów określonego rodzaju. Oznaczmy przez $X_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ interesującą nas cechę każdego z tych elementów. Zakładamy, że zmienne losowe X_i są niezależne i że każda z nich ma funkcję gęstości daną wzorem

$$g_i(x) = \frac{2c_i}{c_i+C_i}\eta(-x)f_i(x; a_i, d_i, p) + \frac{2C_i}{c_i+C_i}\eta(-x)f_i(x; A_i, D_i, p), \tag{1}$$

gdzie

$$-\infty < x < +\infty, \quad c_i \geqslant 0, \ C_i \geqslant 0, \quad D_i \geqslant 1, A_i > 0, \ p > 0,$$

$$f_i(x; A_i, D_i, p) = \frac{p}{2\Gamma(D_i/p)A_i}\left|\frac{x}{A_i}\right|^{D_i-1}\exp\left\{-\left|\frac{x}{A_i}\right|^p\right\}, \tag{2}$$

oraz

$$n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad x = 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

W [3] i [4] zostały podane własności, metoda szacowania parametrów i przykład zastosowania funkcji (1). Szczególnymi przypadkami tej funkcji są funkcje gęstości rozkładu normalnego, wykładniczego, Weibulla, gamma, chi, chi-kwadrat, Maxwella oraz funkcja rozważana w pracy [4].

Jest oczywiste, że każdy masowy proces produkcyjny ma tę własność, że im elementy produkowane mają wartości cech bardziej zbliżone do wartości znamionowej, tym są droższe. Innymi słowy, im produkcja dokładniejsza, tym droższa.

W przypadku podziału wyjściowej populacji na klasy o różnej dokładności cech, elementy, których wartości cechy X bardzo nieznacznie różnią się od wartości znamionowej, są droższe od elementów, których wartości cech wykazują duże rozproszenie, tzn. pochodzą z klas o mniejszej dokładności.

Omówieniu zagadnienia niezawodności z uwzględnieniem cen, lecz bez matematycznych (tzn. w postaci wzorów) rozważań i wniosków, poświęcona jest praca [2].

Celem niniejszej pracy jest ustalenie takiego doboru elementów, by przy danej łącznej cenie wszystkich elementów całe urządzenie, czyli cały zespół rozważanych elementów, miało największą niezawodność.

Dla dowolnej zmiennej losowej Y o skończonym momencie centralnym rzędu $2k$ mamy

$$P(|Y-E(Y)| \geqslant c) \leqslant \frac{E[Y-E(Y)]^{2k}}{c^{2k}},$$

a więc niezawodność, czyli odpowiednio określone prawdopodobieństwo możemy oszacowywać za pomocą momentów centralnych rzędu parzystego, w szczególności zaś za pomocą wariancji.

Rozwiążemy następujące zagadnienie.

Określić metodę doboru elementów odpowiednio o cechach $X_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ tak, by przy danej łącznej ich cenie wariancja funkcji

$$Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_N), \tag{3}$$

charakteryzującej w danym urządzeniu łączne działanie wszystkich elementów, była najmniejsza.

Zamiast cen wyrażonych w jednostkach pieniężnych, mogą w tym zagadnieniu występować pewne współczynniki charakteryzujące trudności otrzymywania produkcji o określonym poziomie dokładności. W dalszym ciągu będziemy po prostu mówić o cenie elementów.

Momenty zwykłe dwu pierwszych rzędów zmiennej losowej X_i dane są następującymi wzorami:

$$E(X_i) = -\frac{c_i a_i}{c_i+C_i}\cdot\frac{\Gamma\big((d_i+1)/p\big)}{\Gamma(d_i/p)} + \frac{C_i A_i}{c_i+C_i}\cdot\frac{\Gamma\big(D_i+1)/p\big)}{(D_i/P)},$$

$$E(X_i^2) = \frac{c_i a_i^2}{c_i+C_i}\cdot\frac{\Gamma\big((d_i+2)/p\big)}{\Gamma_i(d/p)} + \frac{C_i A_i^2}{c_i+C_i}\cdot\frac{\Gamma\big((D_i+2)/p\big)}{\Gamma(D_i/p)}.$$

Jeżeli założymy, że rozkłady są symetryczne, czyli że

$$c_i = C_i, \quad a_i = A_i, \quad d_i = D_i, \tag{4}$$

to wartość przeciętna równa jest zero, wariancja zaś dana jest wzorem

$$D^2(X_i) = A_i^2 \frac{\Gamma\big((2+D_i)/p\big)}{\Gamma(D_i/p)}.$$

Oznaczając

$$h(D_i) = \frac{\Gamma\big((2+D_i)/p\big)}{\Gamma(D_i/p)},$$

mamy

$$D^2(X_i) = A_i^2 h(D_i). \tag{5}$$

W szczególnym przypadku, gdy $p = 1$ lub $p = 2$, wariancja określona jest wzorem

$$D^2(X_i) = A_i^2 \frac{D_i}{2}(2D_i+2)^{2-p}, \qquad p = 1 \text{ lub } p = 2. \tag{6}$$

Cena jest tym większa, im mniejsze jest rozproszenie wartości badanej cechy względem wartości znamionowej oraz tym mniejsza, im większe jest rozproszenie wartości badanej cechy. Pewną miarą rozproszenia jest wariancja. Zatem cena powinna rosnąć, gdy wariancja maleje.

Przyjmijmy, że cena $z(X_i)$ elementu, którego cecha X_i ma rozkład symetryczny określony wzorem (1) o parametrach A_i, D_i i p, jest funkcją postaci

$$z(X_i) = \frac{1}{(mA_i^2)^\mu} + \frac{1}{\big(nh(D_i)\big)^\mu}, \tag{7}$$

gdzie m, n i μ — dowolne parametry dodatnie.

Zauważmy również, że odcięta x_0 punktu, w którym funkcja (1) przyjmuje maksimum, dana jest wzorem

$$x_0 = A_i\left(\frac{D_i-1}{p}\right)^{1/p}.$$

Jest to — analogicznie jak wariancja określona wzorem (6) — funkcja rosnąca argumentów A_i i D_i. Przesuwanie się punktu x_0 w prawo oznacza wzrost rozproszenia badanej cechy, a to z kolei odpowiada obniżce ceny; x_0 jest proporcjonalne do wielkości A_i oraz $(D_i-1)^{1/p}$, zatem cena powinna wyrażać jakiś rodzaj zależności odwrotnie proporcjonalnej do A_i oraz D_i, a taki jest właśnie charakter związku wyrażonego wzorem (7).

Udowodnimy następujące

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli funkcja* (3) *jest symetryczna względem wszystkich N zmiennych i ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, a X_i* ($i = 1, 2, \ldots, N$) *są niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gę-*

stości danych wzorem (2) *oraz cena elementu o cesze* X_i *określona jest funkcją* $z(X_i)$ *daną wzorem* (7), *to wariancja zmiennej losowej* Y, *obliczana przy warunku*

$$\sum_{i=1}^{N} z(X_i) = \text{const} = \nu N, \tag{8}$$

przyjmuje najmniejszą wartość, gdy

$$h(D_1) = h(D_2) = \ldots = h(D_N), \tag{9}$$

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_N, \tag{9'}$$

$$mA_i^2 = nh(D_i). \tag{10}$$

Dowód. Z przyjętych założeń ([5], str. 245) wynika, że wariancja zmiennej losowej Y dana jest w przybliżeniu wzorem

$$D^2(Y) \approx \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 D^2(X_i).$$

Z symetrii funkcji g wynika równość pochodnych cząstkowych $\partial g/\partial x_i$. Jeżeli $(\partial g/\partial x_i)^2 = k$, wówczas

$$D^2(Y) \approx k \sum_{i=1}^{N} A_i^2 h(D_i). \tag{11}$$

Należy znaleźć minimum funkcji (11) przy warunku (7), tzn. minimum funkcji

$$\Phi = k \sum_{i=1}^{N} A_i^2 h(D_i) + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{(mA_i^2)^{\mu}} + \frac{1}{\big(nh(D_i)\big)^{\mu}} \right] - \nu N \right\}. \tag{12}$$

Obliczamy i przyrównywujemy do zera pochodne cząstkowe funkcji Φ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_i} = 2kA_i h(D_i) - 2\lambda \mu m^{-\mu} A_i^{-2\mu-1} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial D_i} = kA_i^2 h'(D_i) - \lambda \mu n^{-\mu} [h(D_i)]^{-\mu-1} h'(D_i) = 0. \tag{14}$$

Z równań (7), (13) i (14) wynika, że

$$\lambda = \frac{k}{\mu m n} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{(\mu+2)/\mu}, \tag{15}$$

$$A_i^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/\mu}, \tag{16}$$

$$h(D_i) = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/\mu}. \tag{17}$$

Należy sprawdzić, czy w znalezionym punkcie funkcja (12) istotnie przyjmuje najmniejszą wartość. Niech $h(D_i) = h_i$. Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji Φ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial A_i^2} = 2kh_i + 2\lambda\mu(2\mu+1)m^{-\mu}A_i^{-2\mu-2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h_i^2} = \lambda\mu(\mu+1)n^{-\mu}h_i^{-\mu-2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h_i \partial A_i} = 2kA_i.$$

Wartości tych pochodnych po podstawieniu za A_i i D_i wyrażeń danych wzorami (15), (16) i (17) są odpowiednio równe

$$a_i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial A_i^2} = 4\frac{k}{n}(\mu+1)\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/\mu},$$

$$\beta_i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h_i^2} = \frac{nk}{m}(\mu+1),$$

$$\gamma_i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h_i \partial A_i} = 2k\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/2\mu}.$$

Na to, aby funkcja Φ przyjmowała minimum potrzeba, żeby forma kwadratowa

$$\sum_{i=1}^{N} a_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N} \gamma_i y_i y_{i+1} \tag{18}$$

była dodatnio określona ([1], str. 349-352). Macierz tej formy, czyli macierz pochodnych rzędu drugiego, ma postać następującą:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_N & \gamma_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_N & \beta_N \end{Vmatrix},$$

Ponieważ $a_i > 0$, $\beta_i > 0$, $a_i\beta_i - \gamma_i^2 > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, N$, zatem wszystkie minory główne macierzy formy (18) są dodatnie, a więc forma kwadratowa jest dodatnio określona.

Tym samym dowód twierdzenia 1 został zakończony.

Uwaga 1. Zamiast funkcji (7) można w twierdzeniu 1 przyjąć, że cena jest funkcją postaci

$$z(X_i) = \mu e^{-mA_i^2 - nh(D_i)}, \quad \mu > 0,\ m \geqslant 0,\ n \geqslant 0. \tag{19}$$

Analogiczną metodą można udowodnić, że minimum wariancji jest wtedy, gdy spełnione są warunki (9), (9′) oraz (10).

Jeżeli założymy, że

$$z(X_i) = F\left[(mA_i^2)^a + \left(nh(D_i)\right)^a\right], \quad a \neq 0,\ m > 0,\ n > 0, \tag{20}$$

gdzie F jest daną funkcją klasy $C^{(1)}$ i równanie

$$\lambda F'(y) + \frac{k}{amn}\left(\frac{y}{2}\right)^{(2-a)/a} = 0,$$

w którym niewiadomymi są λ i y, ma rozwiązanie rzeczywiste, to można pokazać, że i przy tak ogólnym określeniu funkcji F pochodne cząstkowe funkcji

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} kA_i^2 h(D_i) + \lambda \sum_{i=1}^{N} z(X_i) \tag{21}$$

są równe zeru, gdy zachodzą równości (9), (9′) i (10).

Funkcja F jest rozważana tylko dla dodatnich wartości argumentu i przyjmuje wartości dodatnie. Załóżmy ponadto, że F jest funkcją malejącą oraz dążącą do plus nieskończoności, gdy argument dąży do zera. Ze wzoru (11) wynika, że wariancja jest funkcją rosnącą oraz dążącą do zera, gdy $A_i^2 \to 0$ i $h(D_i) \to 0$. Z geometrycznego punktu widzenia wynika, że funkcja (12) ma minimum w punkcie o współrzędnych danych wzorami (9), (9′) i (10).

Uwaga 2. Twierdzenie 1 ma charakter zupełnie podobny jak twierdzenia otrzymywane przy badaniu własności extremalnych w rozważaniach analityczno-geometrycznych, takich jak np. maksymalna wartość pola wieloboku w zależności od jego kształtu. Tezą udowodnionego twierdzenia 1 jest fakt, że extremum zachodzi w przypadku równości elementów określonego rodzaju. Jest to wynik zgodny z intuicją.

Uwaga 3. Założenie o ciągłości funkcji g i jej pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego można znacznie osłabić, żądając spełnienia tego warunku jedynie w takim otoczeniu rozważanego punktu, które odpowiada praktycznie możliwym wartościom zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_N$. Przy takim ujęciu zagadnienia można przeprowadzone rozważania odnieść np. do badania w odpowiednio przesuniętym układzie współrzędnych wariancji zmiennej losowej

$$Y = \frac{1}{1/X_1 + 1/X_2 + \ldots + 1/X_N}$$

określającej łączny opór N równolegle połączonych oporników przy założeniu, że maksymalny błąd nie może osiągać wartości równej 100% wartości znamionowej.

Rozważymy teraz przypadek, gdy niekoniecznie muszą być spełnione wszystkie założenia twierdzenia 1. W tym celu udowodnimy

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja* (3) *ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, a* $X_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach symetrycznych danych wzorem* (1) *oraz cena elementu o cesze* X_i *określona jest funkcją* (7), *to wariancja zmiennej losowej* Y *obliczana przy warunku* (8) *przyjmuje najmniejszą wartość, gdy*

$$A_i^2 = \frac{1}{m}(k_i)^{-1/(\mu+2)}\left[\frac{2}{\nu N}\sum_{i=1}^{N} k_i^{\mu/(\mu+2)}\right]^{1/\mu}, \tag{22}$$

$$h(D_i) = \frac{1}{n}(k_i)^{-1/(\mu+2)}\left[\frac{2}{\nu N}\sum_{i=1}^{N} k_i^{\mu/(\mu+2)}\right]^{1/\mu}. \tag{22'}$$

(W twierdzeniu 2 nie zakłada się więc symetrii funkcji g.)

Dowód. Analogicznie jak w twierdzeniu 1, wariancję zmiennej losowej Y przedstawiamy następująco:

$$D^2(Y) \approx \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 D^2(X_i).$$

Niech $k_i = (\partial g/\partial x_i)^2$. Wówczas

$$D^2(Y) \approx \sum_{i=1}^{N} k_i A_i^2 h(D_i).$$

Wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} k_i A_i^2 h(D_i) + \lambda\left\{\sum_{i=1}\left[\frac{1}{(mA_i^2)^\mu} + \frac{1}{\left(nh(D_i)\right)^\mu}\right] - \nu N\right\}.$$

Obliczamy i przyrównywujemy do zera pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_i} = 2k_i A_i h(D_i) - \lambda m^{-\mu} 2\mu A_i^{-2\mu-1} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial D_i} = k_i A_i^2 h'(D_i) - \lambda n^{-\mu}\mu[h(D_i)]^{-\mu-1} h'(D_i) = 0. \tag{24}$$

Rozwiązania układu równań (8), (23) i (24) są następujące:

$$A_i^2 = \frac{1}{m}(k_i)^{-1/(\mu+2)}\left[\frac{2}{\nu N}\sum_{i=1}^{N} k_i^{\mu/(\mu+2)}\right]^{1/\mu},$$

$$h(D_i) = \frac{1}{n}(k_i)^{-1/(\mu+2)}\left[\frac{2}{\nu N}\sum_{i=1}^{N} k_i^{\mu/(\mu+2)}\right]^{1/\mu}.$$

Obliczając pochodne cząstkowe drugiego rzędu i badając odpowiednią formę kwadratową, sprawdzamy analogicznie jak w twierdzeniu 1, że istotnie w znalezionym punkcie jest minimum funkcji, c.n.d.

Założenia twierdzenia 2 można również nieco osłabić, żądając spełnienia warunku o istnieniu i ciągłości pochodnych cząstkowych $\partial g/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ tylko w takim otoczeniu rozważanego punktu, które odpowiada praktycznie możliwym wartościom zmiennych losowych X_1, $X_2, \ldots, X_N$.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że rozkłady zmiennych losowych X_i są symetryczne, czyli że spełniony jest warunek (4). Rozważymy teraz przypadek gdy warunek ten nie jest spełniony.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli funkcja* (3) *jest symetryczna względem wszystkich N zmiennych i ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego a X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości* (1) *oraz cena elementu o cesze X_i określona jest funkcją*

$$z(X_i) = \frac{1}{(ma_i^2)^\mu} + \frac{1}{\big(nh(d_i)\big)^\mu} + \frac{1}{(M_1A_i^2)^\mu} + \frac{1}{\big(M_2h(D_i)\big)^\mu}$$

(m, n, M_1, M_2, μ *— stałe rzeczywiste dodatnie*), *to moment zwykły rzędu drugiego $E(Y^2)$ zmiennej losowej Y, obliczany przy warunku* (8), *przyjmuje najmniejszą wartość, gdy*

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_N, \quad A_1 = A_2 = \ldots = A_N,$$

$$h(d_1) = h(d_2) = \ldots = h(d_N), \quad h(D_1) = h(D_2) = \ldots = h(D_N).$$

Rozważmy teraz szczególny przypadek rozkładu niesymetrycznego, a mianowicie niech we wzorze (1) $c_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, N$. Wówczas wariancję zmiennej losowej X_i możemy przedstawić w następujący sposób:

$$D^2(X_i) = A_i^2\frac{\Gamma\big((2+D_i)/p\big)\Gamma(D_i/p) - \big[\Gamma\big((D_i+1)/p\big)\big]^2}{[\Gamma(D_i/p)]^2} = A_i^2H(D_i).$$

Dla rozkładu spełniającego warunek $c_i = 0$ udowodnić można następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli funkcja* (3) *jest symetryczna względem wszystkich N zmiennych i ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości* (1), *gdzie $c_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) oraz cena elementu o cesze X_i wyraża się wzorem*

$$z(X_i) = \frac{1}{(mA_i^2)^\mu} + \frac{1}{\big(nH(D_i)\big)^\mu} \quad (m > 0,\ n > 0,\ \mu > 0),$$

to wariancja zmiennej losowej Y, obliczana przy warunku (8), *przyjmuje najmniejszą wartość, gdy*

$$H(D_1) = H(D_2) = \ldots = H(D_N),$$

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_N, \qquad mA_i^2 = nH(D_i).$$

Dowody twierdzeń 3 oraz 4 są zupełnie podobne do dowodów twierdzeń 1 oraz 2 i dlatego nie podajemy ich.

Przykład zastosowania twierdzenia 1. W obwód elektryczny należy włączyć N szeregowo połączonych oporników. Dysponujemy trzema partiami oporników: I. oporniki 10 %, cena jednego opornika $z_1 = 18$ zł; II. oporniki 15 %, cena jednego opornika $z_2 = 10$ zł; III. oporniki 20 %, cena jednego opornika $z_3 = 6$ zł.

Funkcja Y określona przez (3) jest tu postaci

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N,$$

gdzie X_i oznacza opór i-tego opornika.

Jak należy dobrać oporniki, by przy tej samej łącznej cenie (odpowiadającej różnym metodom doboru) wszystkich N oporników wariancja zmiennej losowej Y była najmniejsza?

A więc np. dla $N = 4$, czy lepiej wziąć (i) jeden opornik 10 %, jeden opornik 15 % i dwa oporniki 20 %, czy też lepiej jest wziąć (ii) cztery oporniki 15 %. W obu przypadkach łączna cena wynosi 40 zł.

Odpowiedź na postawione pytanie otrzymamy w oparciu o twierdzenie 1 i zamieszczoną po nim uwagę 1. Przyjmujemy, że każdą partię oporników można scharakteryzować za pomocą funkcji (2) przy odpowiednim doborze parametrów (należy zaznaczyć, że różne partie oporników o tej samej klasie dokładności, np. oporników 10 %, mogą być scharakteryzowane przez różne zespoły parametrów A, D, p).

Niech parametrami charakteryzującymi partię I będą A_1^0, D_1^0, partię II — A_2^0, D_2^0, partię III — A_3^0, D_3^0. Załóżmy dla uproszczenia, że

(25) $$A_1^0 < A_2^0 < A_3^0, \qquad D_1^0 < D_2^0 < D_3^0.$$

Wykażemy, że przypadek (ii) jest korzystniejszy niż przypadek (i), czyli że wariancja zmiennej losowej Y jest w przypadku (ii) mniejsza niż w przypadku (i). W tym celu wystarczy wykazać, że funkcja (21) przyjmuje najmniejszą wartość wtedy, gdy

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_2^0, \tag{26}$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_2^0, \tag{26'}$$

gdzie A_i i D_i są to parametry funkcji gęstości zmiennej losowej X_i.

Przede wszystkim trzeba sprawdzić, czy spełnione są założenia dotyczące postaci funkcji ceny, tzn. czy istnieje funkcja F spełniająca wszystkie założenia wymienione w uwadze 1 oraz ponadto następujące warunki:

1° F przyjmuje w punktach $m(A_i^0)^2+nh(D_i^0)$ wartości z_i, tzn.

$$F\big(m(A_i^0)^2+nh(D_i^0)\big) = z_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

2° F ma tę własność, że najmniejszą wartością funkcji (21) jest

$$\Phi\big(A_2^0, \ldots, A_2^0, h(D_2^0), \ldots, h(D_2^0)\big)$$

(przyjęliśmy $a = 1$).

Z warunku (25) wynika, że dla dowolnych dodatnich m i n mamy

$$m(A_1^0)^2+nh(D_1^0) < m(A_2^0)^2+nh(D_2^0) < m(A_3^0)^2+nh(D_3^0).$$

Ponieważ $z_1 > z_2 > z_3$, więc narzucenie warunku 1° nie jest sprzeczne z faktem, że funkcja F jest malejąca.

Funkcja (21) przyjmuje minimum, gdy spełnione są zależności (9), (9') i (10). Niech m i n będą takie, że

$$m(A_2^0)^2 = nh(D_2^0). \tag{27}$$

Oznaczając

$$(A_i^0)^2 \frac{h(D_2^0)}{(A_2^0)^2} + h(D_i^0) = u_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

możemy warunek 1° zapisać w postaci

$$F(nu_i) = z_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{28}$$

Można policzyć, że funkcja

$$F(nu_i) = \frac{p_1}{(nu_i)^p} \exp\{-p_3(nu_i+p_4)^{2r+1}\}, \tag{29}$$

gdzie p_1, p_2, p_3 i n są dodatnie, a r jest liczbą naturalną, spełnia żądane warunki, bowiem jest malejąca dla dodatnich wartości argumentu, dąży do plus nieskończoności, gdy argument dąży do zera i można tak dobrać parametry p_1, p_2, p_3, p_4, n i r, by spełniony był układ trzech równań (28).

Wyobraźmy sobie teraz następujący abstrakcyjny model nieprzeliczalnej ilości partii oporników, z których każda scharakteryzowana jest pewną trójką parametrów A, D, p. Parametry A i D zmieniają się w sposób ciągły i każdej trójce parametrów A, D, p odpowiada pewna partia oporników. Niech cena oporników każdej partii będzie określona funkcją (29). Z tego zbioru partii mamy wybrać N oporników tak, aby przy łącznej określonej ich cenie wariancja funkcji (21) była najmniejsza.

Z twierdzenia 1, następującej po nim uwagi 1 oraz wzoru (27) wynika, że ze względu na minimum wariancji przy ustalonej cenie najkorzystniej jest wziąć elementy z partii o parametrach A_2^0 i D_2^0. Oznacza to, że powinny zachodzić związki (26) i (26'). Ostatecznie więc doszliśmy do wniosku, że przypadek (ii) jest korzystniejszy niż przypadek (i).

Prace cytowane

[1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom I, Warszawa 1965.

[2] M. C. Haddon, H. Chesebrough i R. E. Kirby, *Guaranted reliability at a minimum cost*, I. E. E. Transactions on Reliability 13 (1964), str. 8-13.

[3] A. Plucińska, *O pewnej uogólnionej postaci funkcji gęstości i jej zastosowaniu do badania rozkładu oporu oporników*, Zastosow. Matem. 9 (1966), str. 9-19.

[4] — *O pewnych zagadnieniach związanych z podziałem populacji normalnej na części*, Zastosow. Matem. 8 (1965), str. 117-125.

[5] Е. С. Вентцель, *Теория вероятностей*, Москва 1962.

Praca wpłynęła 12. 5. 1965;
nowa wersja 23. 3. 1966

А. ПЛЮЦИНЬСКА (Варшава)

НАДЁЖНОСТЬ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ ЦЕН ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается экономическо-математический вопрос такого отбора N элементов данной системы, чтобы вся система имела максимальную надёжность при условии, что совместная цена всех N элементов является заданной величиной. Предположим, что рассматриваемый признак X_i элементов системы является для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$ случайной величиной с функцией плотности (1) и что случайные величины X_i независимы.

Рассматриваются случая, когда цена элемента, имеющего признак X_i определяется либо формулой (7), либо (19), либо самой общей (20).

Если функция $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, описывающая совместное действие всех N элементов системы, симметрична, то дисперсия случайной величины (а в теореме 3 — второй момент случайной величины Y) принимает наименьшее значение, когда все N случайные величины X_i имеют одинаковые распеделения.

Если условие симметрии не соблюдено, то параметры распределений случайных величин X_i даны формулами (22) и (22').

A. PLUCIŃSKA (Warszawa)

THE RELIABILITY OF A COMPOUND SYSTEM UNDER CONSIDERATION OF THE SYSTEM ELEMENTS PRICES

SUMMARY

In the paper one considers the economical and mathematical problem of selecting the N elements of a given system in such a way that the whole system be of maximum reliability and under the condition that the sum of the costs of the N elements is given and constant. One assumes that the charecteristics X_i of the elements of the system in consideration is for all $i = 1, 2, \ldots, N$ a random variable with the density function (1), and that the random variables X_i are independent.

Considered are the cases when the price of the element with characteristics X_i is given either by formulas (7) or (19) or, in the most general case, by (20). If the function $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, which informs about the global behaviour of all N elements of the system, is symmetric, then the variance of the random variable Y (and in theorem 3 — the absolute moment of second order of the random variable Y) attains its minimum in the case of all N random variables X_i having the same distribution. If the symmetry condition does not hold, then the distribution parameters of the random variables X_i are given by formulas (22) and (22').