ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1966)

Теория обобщенного аналитического вектора

Б. В. Боярский (Варшава)

В настоящей работе мы излагаем общие свойства и граничные задачи для обобщенного аналитического вектора. Теория обобщенного аналитического вектора есть распространение теории И. Н. Векуа [7] скалярных обобщенных аналитических функций на векторные функции. В полной аналогии с этой теорией даны формулы общего представления обобщенного аналитического вектора, аналог формулы Помпею и формулы Коши и на этой основе рассмотрены некоторые граничные задачи. По существу теория обобщенного аналитического вектора есть теория решений общих эллиптических систем первого порядка на плоскости.

Общие системы эллипстического типа и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта в односвязной области были предметом исследований Беккерта [1] однако в этих исследованиях не получено никаких результатов о сопряженной задаче, индексе итп. Системой уравнений являющейся частным случаем системы уравнений для Q-голоморфного аналитического вектора занимался А. Даглис [9] предлагая для этой цели введение специальных гиперкомплексных величин. Результаты эти однако не получили пока никаких применений к граничным задачам. Задачей Римана-Гильберта для общей системы эллиптического типа на плоскости независимо от автора занимался А. И. Вольперт [8] опираясь на некоторые построения Я. Б. Лопатинского.

Основные результаты этой работы были опубликованы в [3] и [4]. Публикация развернутого изложения, по ряду причин, затянулась до настоящего времени (см. также [5] и [6].

§ 1. Каноническая комплексная форма системы уравнений эллиптического типа первого порядка

Система линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial y} + Bu + F, \tag{1.1}$$

где

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix}, \qquad A \text{ и } B$$

$2n \times 2n$ действительные матрицы, зависящие от точки (x, y) некоторой области D, F — $2n$-компонентный вектор, называется *эллиптической*, если

$$|A - \lambda E| \neq 0 \tag{1.2}$$

для всех действительных λ и для всех точек (x, y) области D, где рассматривается система (1.1).

В случае $n = 1$, как хорошо известно, при единственном предположении однократной дифференцируемости матрицы A в области D, заменой зависимой переменной по формуле

$$u' = Pu \tag{1.3}$$

(P — дифференцируемая матрица) и подходящей заменой независимой переменной

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y) \tag{1.4}$$

система (1.1) может быть приведена к каноническому виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1'}{\partial \xi} - \frac{\partial u_2'}{\partial \eta} &= au_1' + bu_2' + f_1, \\ \frac{\partial u_1'}{\partial \eta} + \frac{\partial u_2'}{\partial \xi} &= cu_1' + du_2' + f_2. \end{aligned} \tag{1.1'}$$

Существование неособенных преобразований (1.3) и (1.4) во всей области D гарантируется условием (1.2). Для системы вида (1.1'), в комплексной записи

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = \tilde a w + \tilde b \bar w + f, \qquad w = u_1' + iu_2, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

И. Н. Векуа была построена обширная теория, обобщающая теорию аналитических функций. Разработанный при этом аппарат оказался очень удобным для глобального рассмотрения краевых задач для системы (1.1').

Ниже указывается, что исходя из некоторой канонической формы системы (1.1), также для таких систем возможно построить теорию, аналогичную теорий обобщенных аналитических функций.

Остановимся сейчас на вопросе о приведении системы (1.1) к каноническому виду. Пусть для начала A в (1.1) постоянная матрица. Тогда существует неособенная действительная постоянная матрица P, такая, что матрица

$$A' = PAP^{-1} \tag{1.5}$$

имеет действительную нормальную жорданову форму $A' = \{A'_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, где A'_i — диагональные клетки квазидиагональной матрицы A' — имеют вид

$$A'_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & 0 & \ldots & 0 \\ aE & \tilde{A}_i & & \\ 0 & aE & \ddots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & aE & \tilde{A}_i \end{bmatrix} \text{(}^1\text{)} \tag{1.6}$$

причем $\tilde{A}_i$ — матрица второго порядка вида

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \mu_i & \varkappa_i \\ -\varkappa_i & \mu_i \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

E — единичная матрица порядка 2, a — действительное число. При этом число $\lambda_i = \mu_i + \sqrt{-1}\,\varkappa_i$ есть характеристический корень матрицы A. Согласно (1.2) $\varkappa_i \neq 0$. Обычно в (1.6) полагают $a = 1$. Однако тривиальным замечанием ([2]) является обобщение на тот случай, когда a — любое, заранее избранное число, отличное от нуля. Возможность выбора числа a сколь угодно малым, позволяет ввести в дальнейшем изложении некоторые фактические упрощения.

Матрица A'_i имеет порядок $2r_i$, где r_i — кратность одного из элементарных делителей, отвечающих корню λ_i; $\sum r_i = n$.

Заметим, что мы не предполагаем, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $j \neq i$. Поэтому в (1.6), если $r_i > 1$, то $a \neq 0$. Элементарным делителем кратности 1, отвечающим одному и тому же характеристическому корню λ в (1.6), отвечают клетки с различными номерами.

Произведя преобразование неизвестных по формуле

$$v = Pu$$

мы придем к системе

$$v_x = A'v_y + Bv + f'\,. \tag{1.1''}$$

([1]) (1.6) есть „блочная“ матрица, 0 в (1.6) обозначает матрицу $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

([2]) Оно сводится к простому добавочному преобразованию, зависящему лишь от a.

Главная часть системы (1.1″) состоит из отдельных клеток, соответствующих клеткам A'_i матрицы A'. Клетка, соответствующая A'_1, имеет вид

$$
(1.8)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x} &= \mu_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+\varkappa_1\frac{\partial v_2}{\partial y}+\dots,\\
\frac{\partial v_2}{\partial x} &= -\varkappa_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial v_2}{\partial y}+\dots,\\
\frac{\partial v_3}{\partial x} &= a\frac{\partial v_1}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial v_3}{\partial y}+\varkappa_1\frac{\partial v_4}{\partial y}+\dots.\\
\frac{\partial v_4}{\partial x} &= a\frac{\partial v_2}{\partial y}-\varkappa_1\frac{\partial v_3}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial v_4}{\partial y}+\dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial v_{2r_1-1}}{\partial x} &= a\frac{\partial v_{2r_1-3}}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial v_{2r_1-1}}{\partial y}+\varkappa_1\frac{\partial v_{2r_1}}{\partial y}+\dots,\\
\frac{\partial v_{2r_1}}{\partial x} &= a\frac{\partial v_{2r_1-2}}{\partial y}-\varkappa_1\frac{\partial v_{2r_1-1}}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial v_{2r_1}}{\partial y}+\dots
\end{aligned}
$$

Членов нулевого порядка не записываем, так как они не имеют для нас никакого значения.

Пусть $\varkappa_1 > 0$; тогда, вводя комплексные переменные

$$
(1.9)\qquad
\begin{aligned}
w_1 &= v_1+iv_2,\\
w_2 &= v_3+iv_4,\\
&\dots\dots\\
w_{r_1} &= v_{2r_1-1}+iv_{2r_1},
\end{aligned}
$$

систему (1.8) запишем в виде

$$
(1.10)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial w_1}{\partial y}=\dots,\\
&\frac{\partial w_2}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial w_2}{\partial y}-a\frac{\partial w_1}{\partial y}=\dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial w_{r_1}}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial w_{r_1}}{\partial y}-a\frac{\partial w_{r_1-1}}{\partial y}=\dots,
\end{aligned}
$$

где

$$\lambda_1 = \mu_1 - i\varkappa_1,$$

или, вводя еще операторы

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

в виде

$$
\begin{aligned}
&(1+\lambda_1 i)\frac{\partial w_1}{\partial \bar z}+(1-\lambda_1 i)\frac{\partial w_1}{\partial z}=\dots,\\
(1.11)\qquad &(1+\lambda_1 i)\frac{\partial w_2}{\partial \bar z}+(1-\lambda_1 i)\frac{\partial w_2}{\partial z}+ai\left(\frac{\partial w_1}{\partial \bar z}-\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)=\dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(1+\lambda_1 i)\frac{\partial w_{r_1}}{\partial \bar z}+(1-\lambda_1 i)\frac{\partial w_{r_1}}{\partial z}+ai\left(\frac{\partial w_{r_1-1}}{\partial \bar z}-\frac{\partial w_{r_1-1}}{\partial z}\right)=\dots
\end{aligned}
$$

Пологая

$$(1.12)\qquad q_1=\frac{1-\lambda_1 i}{1+\lambda_1 i},\qquad 1+\lambda_1 i=1+\varkappa_1+i\mu_1\neq 0\,,\qquad \text{ибо}\qquad \varkappa_1>0\,,$$

из (1.11) получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial \bar z}+q_1(z)\frac{\partial w_1}{\partial z}=\dots,\\
(1.13)\qquad &\frac{\partial w_2}{\partial \bar z}+q_1(z)\frac{\partial w_2}{\partial z}+\beta(q_1+1)\frac{\partial w_1}{\partial z}=\dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial w_{r_1}}{\partial \bar z}+q_1(z)\frac{\partial w_{r_1}}{\partial z}+(q_1+1)\left(\beta\frac{\partial w_{r_1-1}}{\partial z}+\beta^2\frac{\partial w_{r_1-2}}{\partial z}+\dots+\beta^{r-1}\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)=\dots,
\end{aligned}
$$

где

$$(1.14)\qquad \beta=\frac{-a_i}{1+\lambda_1 i}\,.$$

Пусть сейчас $\varkappa_1<0$. Полагая тогда

$$
\begin{aligned}
&w_1=v_1-iv_2\,,\\
(1.9')\qquad &w_2=v_3-iv_4\,,\\
&\dots\dots\\
&w_{r_1}=v_{2r_1-1}-iv_{2r_1}\,,
\end{aligned}
$$

мы придем опять к системе (1.10) и (1.13), причем на этот раз $\lambda_1=\mu_1+i\varkappa_1$. Поэтому также $1+\lambda_1 i=1-\varkappa_1+i\mu_1\neq 0$ ибо $\varkappa_1<0$. В обоих случаях будет, очевидно,

$$(1.15)\qquad |q_1|<1\,.$$

Поступая аналогично с другими „клетками“, входящими в систему (1.1″), мы приходим к следующему выводу: любая система уравнений эллиптического типа (1.1) с постоянными коэффициентами, после замены зависимых переменных вида (1.3) и введения комплексных переменных может быть записана в канонической форме

$$(1.16)\qquad \frac{\partial w}{\partial \bar z}-Q(z)\frac{\partial w}{\partial z}=Aw+B\bar w+F\,,$$

где Q — квазидиагональная матрица $Q = \{Q_j\}$ с диагональными клетками вида

$$
(1.17) \qquad Q_j = \begin{bmatrix} q_j & 0 & \ldots & 0 \\ (1+q_j)\beta_j & q_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (1+q_j)\beta_j^{r_j-1} & \ldots & (1+q_j)\beta_j & q_j \end{bmatrix},
$$

где q_j и β_j комплексные числа, причем

$$
(1.17') \qquad |q_j| < 1 ,
$$

$$
(1.17'') \qquad |\beta_j| \leqslant \varepsilon , \quad \text{если} \quad \alpha < \frac{\varepsilon|(1+\lambda_j i)|}{2} .
$$

Выбирая α заранее удовлетворяющим условию

$$
\alpha < \max \frac{\varepsilon|(1+\lambda_j i)|}{2}
$$

мы можем считать, что β_j — сколь угодно малые числа. Матрицы вида (1.17) образуют подкласс класса всех матриц квазидиагонального типа, введенных в следующем параграфе.

Если коэффициенты системы (1.1) не постоянны в рассматриваемой области D, то для применимости подстановок (1.9), (1.9′) необходимо, чтобы нормальная жорданова форма матрицы была одинаковой во всех точках области D. Это будет иметь место тогда и только тогда, когда

1. кратность корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения

$$
|A - \lambda E| = 0
$$

постоянна в D,

2. ранг матрицы

$$
A - \lambda_k E
$$

постоянен в D.

Иными словами 1 и 2 означают, что кратность элементарных делителей матрицы $A - \lambda E$ постоянна во всей области D.

В предположении, что матрица A непрерывно дифференцируема (один раз) в некоторой замкнутой области $D_1 \subset D$ И. Г. Петровским ([10], стр. 54-62) проведено подробное доказательство существования во всей области D_1 (односвязной) непрерывно дифференцируемого преобразования P, если выполнены условия 1 и 2, причем добавочно требуется, чтобы кратность всех элементарных делителей матрицы $A - \lambda E$, согласно условию 2 постоянна в D, была равна 1. Без этого добавочного предположения, лишь при условиях 1 и 2, в [11] проведено подробное доказательство существования преобразования P в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in D$. Дальнейшие указанные преобразования одинаково годятся в случае постоянных и переменных коэффициентов и позволяют записать систему (1.8) в комплексной форме (1.16) во всей области. Неравенствам (1.17') можно удовлетворить во всей области.

Таким образом, при выполнении необходимых условий И. Г. Петровского 1 и 2 преобразование (1.1) к виду (1.8) в любой замкнутой ограниченной односвязной области возможно также для широких классов систем с переменными коэффициентами.

Заметим однако, что в дальнейшем мы будем использовать лишь тот факт, что матрица $Q(z)$ в (1.16) есть (нижняя) матрица квазидиагонального типа (см. § 2). Это значительно более общо, чем класс матриц вида (1.17). В этом более общем случае необходимо лишь условие 1, второе же условие заведомо может не выполняться (например функция β_j может быть равна нулю в некоторых точках или частях области D, что в (1.17), ввиду (1.14) не может иметь места).

§ 2. Некоторые предположения из теории Q-голоморфного вектора

1. Определение Q-голоморфного вектора. Нижнюю (верхнюю) треугольную матрицу $A = \{a_{ij}\}$ порядка r назовем *матрицей диагонального типа*, если элементы каждой диагонали матрицы A, параллельной главной диагонали, равны между собой, т. е. $a_{ij} = a_{i+s,j+s}$ при любом s $(i+s \leqslant r,$ $j+s \leqslant r)$ и

$$a_{ij} = 0 \quad \text{для } i < j \quad (\text{или} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{для } j < i)\,.$$

Матрицу A назовем *нижней* (*верхней*) *матрицей квазидиагонального типа*, если A есть квазидиагональная матрица $A = \{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, и все диагональные клетки A_i матрицы A являются нижними (верхними) матрицами диагонального типа. Порядок матрицы A_i обозначим через r_i. Отметим следующее легко проверяемое свойство нижних (верхних) матриц квазидиагонального типа.

Лемма 2.1. *При фиксированных порядках $r_1, r_2, \ldots, r_l$, если A и B нижние (верхние) матрицы квазидиагонального типа, то также $A+B$ и AB есть матрица квазидиагонального типа, причем*

$$AB = BA\,.$$

В § 1 мы видели, что при приведении к канонической форме системы уравнений первого порядка естественно возникает матрица $Q(z)$ (1.17) квазидиагонального типа; при этом, в силу эллиптичности системы выполняется условие

$$|q_{ii}| < q_0 < 1 \tag{2.1}$$

и, можно обеспечить условие: при каждом j

$$\sum_{j \leqslant i} |q_{ij}| < q_0' < 1\,, \tag{2.2}$$

где q_0 и q_0' постоянные. Условие (2.1) есть равномерная форма неравенства (1.17′); условие (2.2) следует непосредственно из (1.17″), если ε заранее избрать достаточно малым. В дальнейшем мы будем предполагать, что Q — любая матрица квазидиагонального типа, удовлетворяющая неравенствам (2.1) и (2.2) и сформулированным ниже условиям (2.4) ([3]).

Q-голоморфным вектором $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ мы будем называть решения системы

$$L\Phi \equiv \Phi_{\bar z} - Q(z)\Phi_z = 0 \tag{2.3}$$

где $Q(z)$ — описанная выше матрица.

Систему типа (2.3) удобнее всего рассматривать во всей плоскости комплексного переменного z. Мы это будем делать при следующих предположениях:

$$\begin{aligned} &1)\ Q(z) \in W_p'(\varepsilon) \text{ при некотором } p > 2,\\ &2)\ Q(z) \equiv 0 \text{ вне некоторого достаточно большого круга } K. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Наряду с системой (2.3), будем рассматривать систему

$$L^*\Psi \equiv -\Psi_{\bar z} + (Q'\Psi)_z = 0, \quad (' \text{ обозначает транспозицию}). \tag{2.5}$$

2. Построение ядра Коши. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим частным матричным решением системы (2.3), свойства и существование которого устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 2.1. *При принятых предположениях система* (2.3) *всегда допускает матричное решение* $V(t; z)$, *определенное для всех* z *и* t, $z \neq t$, *и обладающее следующими свойствами*:

1) $V(t, z)$ *есть матрица квазидиагонального типа*,

2) *как функция переменного* z, *при фиксированном* $t \neq z$, $V(t; z)$ *есть решение системы* (2.3),

3) *как функция переменнего* t, *при фиксированном* $z \neq t$, $V'(t, z)$ *есть решение системы* (2.5),

4) $\lim\limits_{t\to\infty} tV(t; z) = E$ ([4]) *при любом фиксированном* z,

5) $\lim\limits_{z\to\infty} zV(t; z) = \widetilde{V}(t)$, $\det \widetilde{V}(t) \neq 0$ *для каждого* t, *включая* $t = \infty$,

6) *для любой непрерывной в точке* z_0 *функции* $w(z)$ *имеет место формула*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} V(t, z)\, d_Q t\, w(t) = w(z_0),$$

([3]) Для эллиптичности необходимо лишь неравенство (2.1); однако, замечание о том, что всегда можно обеспечить выполнение условия (2.2) позволяет иногда более прозрачно провести рассуждения и в дальнейшем удобно воспользоваться этим обстоятельством.

([4]) E — единичная матрица.

где Γ_δ — окружность радиуса δ с центром в точке z_0. Здесь и в дальнейшем мы пользуемся сокращенной записью криволинейных интегралов ([5])

$$\int_\Gamma (dt + Q(t)d\bar{t}) f(t) = \int_\Gamma d_Q t f(t) .$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что система (2.3) всегда допускает решение $\zeta(z)$ вида

$$\zeta(z) = zE - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{E}} \frac{\omega(t)}{t-z} d\sigma_t \qquad (\mathcal{E} \text{ — вся плоскость}) \tag{2.6}$$

(E — единичная матрица), где ω некоторая матрица $\in L_p(\mathcal{E})$, $p > 2$ ([6]).

В самом деле, подставляя (2.6) в (2.3), получим для определения ω систему сингулярных интегральных уравнений

$$\omega - Q(z)S(\omega) = Q , \tag{2.7}$$

где

$$S(\omega) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{E}} \frac{\omega(t)}{(t-z)^2} d\sigma_t \tag{2.8}$$

сингулярный интегральный оператор из $L_p(\mathcal{E})$ в $L_p(\mathcal{E})$. Система (2.7) позволяет определить отдельные столбцы матрицы $\omega = (\overset{1}{\omega}, \overset{2}{\omega}, \ldots, \overset{n}{\omega})$. Для этого (2.7) рассматриваем как систему уравнений, относительно n — компонентного вектора $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_n)$. Определяя в пространстве таких векторов норму $\|\tilde{\omega}\|_{L_p}$ формулой $\|\tilde{\omega}\|_{L_p} = \sum_{i=1}^{n} \|\tilde{\omega}_i\|_{L_p}$ в силу неравенства Минковского получим оценку

$$\|QS(\tilde{\omega})\|_{L_p} = \sum_i \Big\| \sum_j q_{ij} S(\tilde{\omega}_j) \Big\|_{L_p} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \max_z |q_{ij}(z)| \cdot \|S(\tilde{\omega}_j)\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant A_p \sum_j \|\tilde{\omega}_j\|_{L_p} \Big(\sum_i \max_z |q_{ij}(z)| \Big) \leqslant q_0' A_p \|\tilde{\omega}\|_{L_p}$$

где A_p норма оператора S в $L_p(\mathcal{E})$. Как известно $A_2 = 1$. A_p непрерывна в точке $p = 2$. Поэтому, согласно нашему предположению (2.1) и (2.2), из предыдущего неравенства для p достаточно близких к 2 получим

$$\|QS(\tilde{\omega})\|_{L_p} \leqslant \tilde{q}\|\tilde{\omega}\|_{L_p}, \qquad \tilde{q} = \text{const} < 1 ,$$

что, в силу принципа сжатых отображений, означает однозначную разрешимость системы (2.7) при любой правой части. При этом, очевидно, матричное решение уравнения (2.7) будет нижней матрицей квазидиагонального типа.

([5]) Дифференциал $d_Q t$ в интеграле $\int_\Gamma d_Q t f(t)$ есть матрица, а $f(t)$ есть вектор; по этой причине мы пишем дифференциал впереди подинтегральных функций.

([6]) Под этим мы понимаем, что каждый элемент матрицы ω принадлежит L_p.

Элементы ζ_{ii} главной диагонали матрицы $\zeta(z)$ являются решениями вида

$$(2.9)\qquad \zeta_{ii} = z - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{E}} \frac{\omega_{ii}(t)}{t-z}\,d\sigma_t$$

системы Белтрами

$$(2.10)\qquad (\zeta_{ii})_{\bar z} - q_{ii}(z)(\zeta_{ii})_z = 0\,.$$

Отсюда и из предположений (2.1) следует (см. [7], теоремы 2.1, 2.2, 2.3), что ω_{ii} обладает обобщенными производными из $L_p, p>2$, и в частности, непрерывно по Гельдеру. Для остальных элементов матриц $\zeta(z)$, получим из (2.3), как легко видеть, неоднородные уравнения вида (2.10), правые части которых принадлежат W^p, $p>2$.

В силу известных теорем (см. [7]) заключим, что и остальные элементы матрицы $\omega(z)$ непрерывны по Гельдеру, а само решение обладает вторыми производными $\zeta_{zz}, \zeta_{z\bar z}, \zeta_{\bar z\bar z}$, принадлежащими $L_p(\mathcal{E})$, причем первые производные ζ_z и $\zeta_{\bar z}$ непрерывны по Гельдеру.

Кроме того, так как в силу известных теорем из теории систем Бельтрами (2.10) (⁷) функции $\zeta_{ii}(z)$ осуществляют гомеоморфное отображение плоскости z на плоскости ζ_{ii}, то имеют место неравенства

$$(2.11)\qquad \zeta_{ii}(z)-\zeta_{ii}(t)\neq 0 \quad \text{при} \quad z\neq t\,,$$

$$(2.12)\qquad (\zeta_{ii})_z \neq 0 \quad \text{для всех } z\,.$$

Неравенства (2.11) и (2.12) означают, что существуют матрицы

$$(2.12')\qquad [\zeta(t)-\zeta(z)]^{-1}\,,\quad z\neq t \quad \text{и} \quad [\zeta_z]^{-1}\,.$$

Матрицы (2.12′) являются матрицами квазидиагонального типа. Положим

$$(2.13)\qquad V(t;z) = \frac{\zeta_t(t)}{[\zeta(t)-\zeta(z)]}$$

и проверим, что матрица $V(t;z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1:

1) Выполняется в силу леммы 2.1, 2) и 3) следует из уравнения (2.3) непосредственным дифференцированием, если заметить, что в силу леммы 2.1, матрицы $\zeta(z)[\zeta(z)-\zeta(t)]^{-1}$ и их производные коммутируют друг с другом. 4) и 5) следуют из (2.12′) и формулы (2.6). В силу непрерывной дифференцируемости матрицы $\zeta(z)$ имеем (⁷)

$$\zeta(z)-\zeta(t) = \zeta_t(t)[(z-t)+Q(t)(\bar z-\bar t)] + \varepsilon(z,t)\,,$$

$$|\varepsilon(z,t)| \leqslant c_1|z-t|^{1+\alpha}, \qquad \alpha>0\,.$$

(⁷) Оценка $|\varepsilon(z,t)| < c_1|z-t|^{1+\alpha}$ проще всего получается из формулы $\varepsilon(z,t) = (z-t)\int\limits_0^1 [\zeta_t(t+s|z-t|)-\varphi_t(t)]ds + (\bar z-\bar t)\int\limits_0^1 [\zeta_{\bar z}(t+s(z-t))-\zeta_t(t)]ds$ и непрерывности по Гельдеру производных ζ_z и $\zeta_{\bar z}$.

Поэтому

(2.13′) $V(t,z) = [(z-t)+Q(t)(\bar z-\bar t)]^{-1}+\varepsilon_1(z,t)\,, \qquad |\varepsilon_1(z,t)| \leqslant \dfrac{c_2}{|z-t|^{1-\alpha}}\,.$

Полагая $t-z=\varrho e^{i\varphi}$, $dt = i\varrho e^{i\varphi_t}d\varphi_t$, получаем что

$$\int_{\Gamma_\varrho} V(t,z)d_Q t = -i\int_0^{2\pi}\left(E+Q(t)e^{-2i\varphi_t}\right)^{-1}\left(E-Q(t)e^{-2i\varphi_t}\right)d\varphi_t + \\ +\varrho_t\int_0^{2\pi}\varepsilon(z,t)\left(E-Q(t)e^{-2i\varphi_t}\right)d\varphi_t\,,$$

откуда

(2.14) $\lim\limits_{\varrho\to 0}\int_{\Gamma_\varrho} V(t,z)d_Q t = -i\int_0^{2\pi}\left(E+Q(z)e^{-2i\varphi}\right)^{-1}\left(E-Q(z)e^{-2i\varphi}\right)d\varphi = -2\pi i E.$

Отметим еще, что непосредственно из формулы (2.13) и (2.13′) следует оценка

(2.15) $\qquad |V(t;z)| < \dfrac{c}{|t-z|}$ для всех z и t; c — const

ибо матрица $\left[E+Q\dfrac{\bar z-\bar t}{z-t}\right]^{-1}$ ограничена. Неравенство (2.15) мы понимаем как неравенство для всех элементов матрицы $V(t;z)$. Последнее условие теоремы 2.1 следует из (2.14) и (2.15). Матрицу $V(t,z)$, построенную выше, будем называть *фундаментальным решением* или *ядром Коши* системы (2.3).

3. Разложение Помпею. Формула Коши. Интеграл типа Коши. Утверждение 3) теоремы 2.1 означает, что каждая строка $\overset{\sigma}{v}$ матрицы $V(t,z)$ при $t\neq z$ является решением уравнения

(2.16) $\qquad L^*\overset{\sigma}{v} = -\overset{\sigma}{v}_{\bar t}+(Q'\overset{\sigma}{v})_t = 0\,.$

Пусть $W(z)$ непрерывная вектор-функция в области $D+\Gamma$, класса W_p^1, $p\geqslant 1$ в D. Во избежание недоразумений здесь и всюду в дальнейшем будем считать, что Γ — кривая Ляпунова (многие результаты верны, однако, при более слабых предположениях). Интегрируя соотношение ([8])

$$(\overset{\sigma}{v}, L_w) - (L^*\overset{\sigma}{v}, w) = (\overset{\sigma}{v}, w)_{\bar t} - (\overset{\sigma}{v}, Qw)_t$$

по области $D-D_\varrho$, где D_ϱ — круг радиуса ϱ с центром в точке z, обычным путем, используя свойства 2), 3) и 5) теоремы 2.1, и переходя к пределу при $\varrho\to 0$, получим следующую формулу

(2.17) $\qquad w(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)d_Q t w(t) - \dfrac{1}{\pi}\iint_D V(t,z)\omega(t)d\sigma_t\,,$

([8]) Скобками (v,w) обозначено скалярное произведение $\sum v_i w_i$.

причем

$$\omega(t) = w_{\bar{t}} - Q(t) w_t .$$

Формулу (2.17), справедливую для любой области D и любой непрерывной вектор-функции из W_p^1, $p \geqslant 1$, будем называть *разложением Помпею*, соответствующим системе (2.3), ввиду полной аналогии этой формулы с известными формулами (см. [7]). Формула (2.17) восстанавливает в области D решение неоднородного уравнения $Lw = \omega$, по его значениям на границе Γ области D. В частности она содержит *формулу Коши*

$$(2.18) \qquad \begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t, z)\, d_Q t\, w(t) \qquad \text{для} \quad z \in D, \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t, z)\, d_Q t\, w(t) \qquad \text{для} \quad z \notin D+\Gamma \end{aligned}$$

для Q-голоморфного вектора ($\omega \equiv 0$) и в пределе дает решение управления $Lw = \omega$, исчезающее на бесконечности, для любой финитной функции ω

$$W(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E V(t, z)\,\omega(t)\, d\sigma_t .$$

Интегралом типа Коши с плотностью $\mu(t)$ будем называть выражение

$$(2.19) \qquad W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t, z)\, d_Q t\, \mu(t)$$

определенное для $z \notin \Gamma$. Вне Γ (2.19) есть Q-голоморфный вектор.

Имеет место следующая

Лемма 2.2. *Если плотность $\mu(t)$ непрерывна по Гельдеру на Γ, то интеграл* (2.19) *непрерывен по Гельдеру в $D^+ + \Gamma$ и $D^- + \Gamma$, причем его граничные значения на Γ, $W^+(z_0)$ и $W^-(z_0)$ вычисляются по формулам*

$$(2.20) \qquad \begin{aligned} W^+(z_0) &= \frac{\mu(z_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t, z_0)\, d_Q t\, \mu(t), \\ W^-(z_0) &= -\frac{\mu(z_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t, z_0)\, d_Q t\, \mu(t) . \end{aligned}$$

В частности

$$(2.21) \qquad W^+(z_0) - W^-(z_0) = \mu(z_0) .$$

Интеграл в (2.20) *понимается в смысле главного значения по Коши.*

Доказательство следует обычным образом из формул (2.18). Действительно, продолжим $\mu(t)$, до некоторой функции $\mu(z)$, непрерывной по Гельдеру в окрестности линии Γ. Будем иметь

$$
\begin{aligned}
W(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)d_Q t[\mu(t)-\mu(z)]+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)\,d_Q t\mu(z) \equiv \\
&\equiv I(z)+\mu(z)\,, \\
W(z) &= I(z) \quad \text{для} \quad z\in D^-\,,
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

где через $I(z)$ обозначен первый интеграл в (2.22).

В силу оценки (2.15) и известных лемм теории потенциала I есть функция, непрерывная по Гельдеру в окрестности Γ и на Γ. Поэтому непрерывность по Гельдеру вектор-функции $W(z)$ в $D^+ + \Gamma$ и в $D^- + \Gamma$ получается непосредственно. Чтобы получить формулы (2.20) и (2.21) достаточно заметить, что

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} V(t,z)d_Q t \to \frac{1}{2}E
\tag{2.23}
$$

при $|z-z_0|<\delta$, $z\in D^+$, $\delta\to 0$, если Γ_δ — часть кривой Γ, вырезываемая из Γ окружностью радиуса δ с центром в z_0. Если Γ_δ^+ и Γ_δ^- дуги указанной окружности лежащие в D^+ и D^- соответственно, то (2.23) следует из легко проверяемого соотношения

$$
\int_{\Gamma_\delta^+} V(t,z)d_Q t - \int_{\Gamma_\delta^-} V(t,z)d_Q t \to 0
$$

при $\delta\to 0$ и формул (1.15):

$$
\begin{aligned}
&\int_\Gamma V(t,z)d_Q t = 2\pi i E\,, \\
&\int_{\Gamma_\delta} V(t,z)d_Q t - \int_{\Gamma_\delta^+} V(t,z)d_Q t = 2\pi i E\,, \\
&\int_{\Gamma_\delta} V(t,z)d_Q t + \int_{\Gamma_\delta^-} V(t,z)d_Q t = 0\,.
\end{aligned}
$$

Аналогично построению ядра Коши системы (2.3), может быть определено ядро Коши для сопряжений системы (2.5). Это ядро мы будем обозначать через $\hat V(t,z)$. Разложение Помпею (2.17) принимает в этом случае вид

$$
\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \hat V(t,z)d_Q t\Psi(t)+\frac{1}{\pi}\iint_D \hat V(t,z)\omega(t)\,d\sigma_t\,,
\tag{2.17'}
$$

где

$$\omega(t) = -\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{t}} + \frac{\partial(Q'\Psi)}{\partial t}.$$

Нетрудно вывести соотношение

(2.17'') $$\hat{V}(t, z) = -V'(z, t).$$

Отметим, что формулы Племеля-Сохоцкого для интеграла

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V'(z, t)d_{Q'}t\mu(t)$$

имеют следующий вид

(2.20') $$\begin{aligned}\Psi^+(t_0) &= -\frac{\mu(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V'(t_0, t)d_{Q'}t\mu(t),\\ \Psi^-(t_0) &= +\frac{\mu(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V'(t_0, t)d_{Q'}t\mu(t).\end{aligned}$$

4. Решение задачи Дирихле в односвязной области. Сейчас укажем простой способ решения задачи Дирихле

(2.24) $$\operatorname{re} w = f(t) \quad \text{на } \Gamma$$

для Q-голоморфного вектора $w(z)$ в том случае, когда D — односвязная область. Сначала рассмотрим случай круга K: $|z| \leqslant 1$ и предположим, что заданный вектор $f(t)$ непрерывен по Гельдеру на Γ с показателем $\mu > \frac{1}{2}$.

Пусть $\Phi(z)$ — голоморфный вектор, решающий задачу (2.24), определяемый, например, интегралом Шварца. В силу нашего предположения и одной теоремы Гарди-Литльвуда будем иметь $\Phi'(z) \in L_p(K)$ при некотором $p > 2$.

Воспользуемся следующим интегральным представлением всех функций $W(z) \in W_p^1(D)$, $p > 2$, удовлетворяющих условию (2.24).

(2.25) $$W(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_K \left[\frac{\omega(t)}{t-z} + \frac{z\overline{\omega(t)}}{1-z\bar{t}}\right]d\sigma_t + \Phi(z) + iC,$$

где $\omega \in L_p(K)$.

В силу (2.3) для ω получаем систему двумерных сингулярных интегральных уравнений

(2.26) $$\omega - QS_1(\omega) = Q\Phi',$$

где

$$S_1(\omega) \equiv -\frac{1}{\pi}\iint_K \left[\frac{\omega}{(t-z)^2} + \frac{\bar{\omega}}{(1-z\bar{t})^2}\right]d\sigma_t$$

ограниченный оператор в $L_p(K)$. Как известно $\|S_1\|_{L_p} = A_p \to 1$ при $p \to 2$. Аналогично, как для уравнения (2.7), убеждаемся, что уравнение (2.26) однозначно разрешимо методом последовательных приближений при любой правой части из $L_p(K)$.

Итак, мы доказали разрешимость задачи Дирихле (2.24) для круга. Общий случай любой ограниченной односвязной области сводится к рассмотренному при помощи конформного отображения на единичный круг, ибо, как легко видеть, вид системы (2.3) и предположения (2.1) и (2.2) не нарушаются при таком отображении. Поэтому мы пришли к лемме

Лемма 2.3. *Задача Дирлихле* (2.24) *для Q-голоморфного вектора разрешима в классе W_p^1, с точностью до произвольного постоянного вектора ic, c — действителен, для любой функции $f(t)$, для которой разрешима задача* (2.24) *в классе голоморфных вектор-функций (таких, что $\Phi' \in L_p(D)$, $p > 2$) и любой односвязной ограниченной области D, ограниченной кривой Ляпунова.*

В дальнейшем будет удобно располагать решением задачи Дирихле для Q-голоморфного вектора для любой непрерывной по Гельдеру функции $f(t)$. Так как тогда в классе W_p^1, $p > 2$, решение может не существовать, то приведенный выше метод непосредственно неприменим. Однако, нетрудно видеть, что имеет место следующая

Лемма 2.3'. *Если $f(t)$ непрерывная по Гельдеру на Γ, то существует решение задачи Дирихле* (2.24) *непрерывное по Гельдеру в замкнутой области $D+\Gamma$.*

Для доказательства напомним, прежде всего, что задача Дирихле (2.24) для системы Коши-Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0$$

имеет решение Φ-непрерывное по Гельдеру, если $f(t)$ непрерывна по Гельдеру на Γ.

Заметим далее, что задача Дирихле для системы

$$(*) \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = a_1 \frac{\partial b_1}{\partial z} + a_2 \frac{\partial b_2}{\partial \bar{z}}$$

имеет решение, непрерывное по Гельдеру в $D+\Gamma$, если $a_i \in W_p^1$, $p > 2$, и b_i непрерывные по Гельдеру в $D+\Gamma$ (но $\partial b_i/\partial z$ и $\partial b_i/\partial \bar{z}$, возможно, не принадлежат L_p, $p > 2$).

Без ограничения можно считать, что $a_2 = 0$.

Достаточно показать, что система $(*)$ имеет хоть одно решение, непрерывное по Гельдеру в замкнутой области $D+\Gamma$. Таким решением будет функция

$$w_0(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{a \partial b/\partial t}{t-z} d\sigma_t .$$

В самом деле

$$w_0(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{b\partial a/\partial t}{t-z}\,d\sigma_t - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{ab}{(t-z)^2}\,d\sigma_t - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{ab}{t-z}\,d\bar{t}\,.$$

Первый интеграл непрерывен по Гельдеру в $D+\Gamma$, ибо, по предположению $\partial a/\partial t \in L_p$, $p > 2$. Непрерывность второго и третьего очевидна, ибо a и b, по предположению, непрерывны по Гельдеру в $D+\Gamma$.

Из сказанного следует, путем замены независимого переменного, что задача Дирихле для системы

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z)\frac{\partial w}{\partial z} = a_1\frac{\partial b_1}{\partial z} + a_2\frac{\partial b_2}{\partial \bar{z}}$$

имеет решение, непрерывное по Гельдеру в $D+\Gamma$, если $q \in W_p^1$, $p > 2$; $a_i \in W_p^1$ $(p > 2)$, b_i непрерывны по Гельдеру в $D+\Gamma$. Это решение однако может не принадлежать никакому классу W_p^1, $p > 2$. Из многократного применения последнего замечания, в свою очередь, следует доказательство леммы 2.3.

В самом деле, выписывая систему (2.3) в явном виде, мы видим, что первое уравнение системы (2.3) имеет вид

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} - q_1(z)\frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

и, согласно нашему замечанию, задача Дирихле $\mathrm{re}\, w_1 = f_1$ имеет решение, непрерывное по Гельдеру в $D+\Gamma$. Для w_2 будем иметь неоднородное уравнение

$$\frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} - q_1(z)\frac{\partial w_2}{\partial z} = q\frac{\partial w_1}{\partial z}$$

и оно в силу сделанных замечаний позволяет заключить, что вторая компонента w_2 непрерывна по Гельдеру в $D+\Gamma$. Продолжая этот процесс дальше, мы убедимся, что вектор w непрерывен по Гельдеру в $D+\Gamma$.

При решении задачи Дирихле в области внешней к ограниченной кривой Γ (сначала Γ: $|z| = 1$) мы потребуем, чтобы

(2.27) $$w(\infty) = 0\,.$$

Задача (2.24), (2.27) вообще говоря, может не иметь решения. В самом деле, после отображения $\mathfrak{z} = 1/z$ мы придем к задаче (2.24) для круга $|\mathfrak{z}| \leqslant 1$ с условием

(2.28) $$w(0) = 0\,,$$

т. е. согласно (2.25)

(2.27′) $$-\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\omega(t)}{t}\,d\sigma_t + \Phi(0) + ic = 0\,.$$

Так как ω определяется однозначно из системы (2.26), независимо от $\Phi(0)$ и c (например $\Phi(0) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma f(t)ds$), то равенство (2.27') может и не выполняться. Однако, из вида условия (2.27') следует, что в этом случае всегда однозначна разрешима видоизменная задача Дирихле

$$\text{(2.29)} \qquad \operatorname{re} w = f(t) + \hat{c}\,, \qquad w(\infty) = 0\,,$$

в которой действительный вектор $\hat{c}$ заранее не задается. Он однозначно определяется из соотношения (2.27'). Условие (2.27') определяет также однозначно вектор c. В силу сказанного мы приходим к следующей лемме

Лемма 2.3''. *В условиях леммы 2.3' и 2.3, видоизмененная задача Дирихле* (2.29) *для внешней области, всегда однозначно разрешима.*

Наши рассмотрения о Q-голоморфных векторах мы закончим выводом представления любого Q-голоморфного вектора непрерывного по Гельдеру в $D+\Gamma$, интегралом типа Коши с действительной плотностью. Этим представлением удобно воспользоваться при изучении граничных задач.

Теорема 2.2. *Любой Q-голоморфный вектор $w(z)$ непрерывный по Гельдеру в замкнутой области $D+\Gamma$ допускает представление вида*

$$\text{(2.30)} \qquad w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma V(t,z)\,d_Q t\,\mu(t) + ic$$

где $\mu(t)$ — действительный вектор, непрерывный по Гельдеру на Γ, $\mu(t)$ определяется на Γ_j, $j \geqslant 1$, однозначно с точностью до постоянного вектора; действительный вектор c и $\mu(t)$ на Γ_0 (9) *определяется вектором $w(z)$ однозначно.*

Доказательство. По обобщенной формуле Коши

$$\text{(2.31)} \qquad w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)\,d_Q t\,w(t)\,.$$

Пусть $\Phi(z)$ Q-голоморфный вектор в односвязной области D_j^-, $j \geqslant 1$, являющийся решением задачи Дирихле

$$\text{(2.32)} \qquad \operatorname{im}\Phi^-(t) = \operatorname{im} w^+(t) \qquad \text{на } \Gamma_j$$

и решением видоизменной задачи Дирихле в D_0^-

$$\text{(2.32')} \qquad \operatorname{im}\Phi^-(t) = \operatorname{im} w^+(t) - c \qquad \text{на } \Gamma_0.$$

Согласно (2.18) для $z \in D$ будет

$$\text{(2.33)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)\,d_Q t\,\Phi^-(t) = 0\,.$$

Вычитая (2.33) и (2.31) и полагая

$$w^+(t) - \Phi^-(t) = 2\mu(t) \quad \text{на } \Gamma_j\,,\ j \geqslant 1\,, \qquad w^+(t) - \Phi^-(t) = 2\mu(t) + ic \quad \text{на } \Gamma_0$$

(9) Напомним, что Γ_0 — внешний контур.

получим

$$w(z) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j} V(t, z) d_Q t \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} V(t, z) d_Q t i c =$$
$$= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} V(t, z) d_Q t \cdot \mu(t) + ic$$

ибо вектор ic есть Q-голоморфный вектор в ограниченной области ограниченной кривой Γ_0. Возможность представления (2.30) доказана. Пусть сейчас в формуле (2.30) $w(z) \equiv 0$ для $z \in D$. Рассмотрим (2.30) как интеграл типа Коши. В силу формул (2.21) будем иметь на Γ_j $w^- - w^+ = -\mu$, т. е. $w = -\mu$, и $\operatorname{im} w^- = 0$ на Γ_j, $j \geqslant 0$. В силу единственности задачи Дирихле (лемма 2.3) получим отсюда $w^- = \text{const}$ на Γ_j, $j \geqslant 0$. На Γ_0 мы также будем иметь $\operatorname{im} w^- = 0$ и кроме того $w(\infty) = -ic$. Поэтому $w^- = ic$ и $\mu = 0$ на Γ_0; тогда формула (2.30) примет вид $0 = ic$ для $z \in D$, т. е. $c = 0$. Итак, мы доказали, что при $w = 0$ в D, $c = \mu = 0$ на Γ_0, $\mu = \text{const}$ на Γ_j, $j \geqslant 1$, что требовалось.

§ 3. Интегральное представление обобщенного аналитического вектора

Рассуждения настоящего параграфа посвящены изучению решений системы

(3.1) $$L(w) = w_{\bar{z}} - Q w_z - Aw - B\bar{w} = 0$$

где $w_{\bar{z}} - Q w_z = 0$ система уравнений вида (2.3), A, B ограниченные матрицы функции, определенные в некоторой области D. Относительно матрицы Q мы сохраняем предположения предыдущего параграфа.

Регулярным решением в области D системы (3.1) назовем непрерывный в $D + \Gamma$ вектор $w(z)$, обладающий обобщенными производными w_z и $w_{\bar{z}} \in L_p(D')$, $D' \subset D$, $p > 2$, удовлетворяющими уравнению (3.1) почти всюду. Такие векторы будем также называть обобщенными аналитическими векторами. Формула (2.17) позволяет связать с системой (3.1) следующую систему интегральных уравнений типа Фредгольма

(3.2) $$K(w) = w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D V(t, z)[Aw + B\bar{w}] d\sigma_t = \Phi(z) .$$

Система (3.2) эквивалентна системе (3.1) в том смысле, что любое регулярное решение системы (3.1) есть решение системы интегральных уравнений (3.2) причем $\Phi(z)$ Q-голоморфный вектор определяемый формулой

(3.3) $$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} V(t, z) d_Q t w(t)$$

и, наоборот, если $w(z)$ решение уравнения (3.2), причем $\Phi(z)$ Q-голоморфный вектор, то $w(z)$ есть решение системы (3.1). Эти утверждения следуют из формулы (2.14).

Оператор

$$T(\omega) = -\frac{1}{\pi}\iint_D V(t, z)\,\omega(t)\,d\sigma_t \tag{3.4}$$

в силу оценки (2.13′), (2.15) преобразует пространство $L_p(D)$, $p > 2$, и пространство функций, непрерывных по Гельдеру и равных нулю на бесконечности. При этом в силу теорем вложения С. Л. Соболева это преобразование вполне непрерывно (см. [7]). При $n = 1$ и $Q \equiv 0$ система (3.2) переходит в систему интегральных уравнений, положенную И. Н. Векуа в основе развитой им теории обобщенных аналитических функций [7]. При $n > 1$ (даже при $Q \equiv 0$) система (3.2) может оказаться неразрешимой при любой правой части. Это значить, что однородная система (3.2) может допускать конечное число $w_1, w_2, \ldots, w_N$ нетривиальных линейно независимых решений ([10]). Как это следует из (2.15), (2.17) и указанных свойств оператора T любое такое решение продолжается непрерывным образом на всю плоскость переменного z как Q-голоморфный вектор, равный нулю на бесконечности. Внутри D оно есть решение системы (3.1). Наоборот, легко видеть, что любой вектор $w(z)$ из класса W_p^1, исчезающий на бесконечности, — голоморфный вне D и удовлетворяющий системе (3.1) внутри D, является решением однородной системы (3.2).

Итак, мы видим, что отсутствие или наличие нетривиальных решений у однородной системы (3.2) равносильно справедливости или несправедливости обобщения теоремы Лиувилля о целых ограниченных функциях на дифференциальные системы (3.1). Но нетрудно убедиться что системы вида (3.1), для которых обобщение теоремы Лиувилля неверно, существуют.

Пусть $v_1, \ldots, v_N$ — полная система линейно независимых решений однородной системы интегральных уравнений, сопряженной с (3.2) относительно скалярного произведения

$$[w, v] = \operatorname{re}\iint_D (w, \bar v)\,d\sigma_t\,, \qquad (w, \bar v) = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar v_i\,. \tag{3.5}$$

Это значит, что для любого вектора $w(z) \in W_p^1$

$$[K(w), v_j] = 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{3.6}$$

В развернутом виде сопряженная система к (3.2) имеет вид

$$K^*(v) = v + \frac{\overline{A'(z)}}{\pi}\iint_D \overline{V'(z, t)}\,V(t)\,d\sigma_t + \frac{B'(z)}{\pi}\iint_D V'(z, t)\,\overline{V(t)}\,d\sigma_t\,. \tag{3.6′}$$

([10]) Можно показать, что в случае постоянных матриц A и B, $Q \equiv 0$, такое явление невозможно; обобщение теоремы Лиувилля тогда верно.

Из сказанного следует, что уравнение (3.2) разрешимо лишь при выполнении равенств

(3.7) $$[\Phi, v_j] = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Итак, мы видим, что в отличие от случая $n = 1$ при $n > 1$, вообще говоря, соответствие между Q-голоморфными векторами и обобщенными аналитическими векторами, устанавливаемые формулой (3.3) не является взаимо однозначным.

В дальнейшем будем считать, что система $v_1, v_2, \ldots, v_N$ и система $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ортонормированы:

(3.8) $$[w_i, w_j] = [v_i, v_j] = \delta_{ij}\,.$$

Вместо системы (3.2) рассмотрим систему интегральных уравнений

(3.9) $$K_1(w) = K(w) + \sum_{k=1}^{N} c_k(w)\, w_k(z) = \Phi(z)\,,$$

где

(3.9′) $$c_k(w) = [w, w_k]\,, \quad k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Если $w(z)$ решение системы (3.9), то из (3.8) и (3.6) следует, что

(3.10) $$c_k(u) = [\Phi, v_k]\,, \quad k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Легко видеть, что однородная система (3.9) ($\Phi \equiv 0$) не имеет нетривиальных решений. Действительно, если $K_1(w_0) = 0$ то, согласно (3.10), все $c_k(w_0) = 0$; поэтому также $K(w_0) = 0$ т. е. $w_0 = \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k w_k$ при некоторых действительных постоянных $\hat{c}_k$. В силу (3.9′) однако, $\hat{c}_k = [w_0, w_k] = 0$, т. е. $w_0 = 0$. Поэтому интегральное уравнение (3.9) однозначно разрешимо при любом Φ и из теории резольвент уравнений Фредгольма получим, что существуют ядра $\Gamma_1(z, t)$ и $\Gamma_2(z, t)$ такие, что

(3.11) $$w(z) = \Phi(z) + \iint_D \Gamma_1(z, t)\Phi(t)\, d\sigma_t + \iint_D \Gamma_2(z, t)\overline{\Phi(t)}\, d\sigma_t$$

если только уравнение (3.9) имеет место.

Свойства ядер $\Gamma_1(z, t)$ и $\Gamma_2(z, t)$ могут быть получены из уравнений резольвент, которые, как нетрудно проверить, в применении к системе (3.9), имеют вид

(3.12) $$0 = \Gamma_1(z, t) + \frac{1}{\pi} V(t, z) A(t) +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \iint_D V(\tau, z)[A(\tau)\, \Gamma_1(\tau, t) + B(\tau)\overline{\Gamma_2(\tau, t)}]\, d\sigma_t + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \{v_k(z), v_k(t)\}\,,$$

$$(3.13)\quad \Gamma_2(z,t)+\frac{1}{\pi}V(t,z)B(t)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_D V(\tau,z)[A(\tau)\Gamma_2(\tau,t)+B(\tau)\overline{\Gamma_1(\tau,t)}]\,d\sigma_t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\{v_k(z),v_k(t)\}=0$$

для всех z и $t\in D$.

Кроме того, матрицы $\Gamma_1(z,t)$ и $\Gamma_2(z,t)$ удовлетворяют еще следующей системе интегральных уравнений:

$$(3.12')\quad \Gamma_1'(t,z)+\frac{A'(z)V'(z,t)}{\pi}+\frac{A'(z)}{\pi}\iint_D V'(z,\tau)\Gamma_1'(t,\tau)\,d\sigma_t+$$
$$+\frac{\overline{B'(z)}}{\pi}\iint_D\overline{V'(z,\tau)}\Gamma_2(t,\tau)\,d\sigma_t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\{w_k(z),\overline{w}_k(t)\}=0,$$

$$(3.13')\quad \Gamma_2(t,z)+\frac{B'(z)V'(z,t)}{\pi}+\frac{\overline{A'(z)}}{\pi}\iint_D\overline{V'(z,\tau)}\Gamma_2(t,\tau)\,d\sigma_\tau+$$
$$+\frac{B'(z)}{\pi}\iint_D V'(z,\tau)\Gamma_2(t,\tau)\,d\sigma_\tau+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\{w_k(z),\overline{w_k(t)}\}=0.$$

Уравнения (3.12′) и (3.13′) можно получить, если в систему интегральных уравнений для резольвент $\Gamma_1^*(z,t)$ и $\Gamma_2^*(z,t)$ системы, союзной с (3.9), подставить (3.21) и воспользоваться соотношениями (3.20).

В формулах (3.12) и (3.13) фигурные скобки $\{v,w\}$ обозначают диадное произведение векторов: $\{v,w\}$ есть квадратная матрица $n\times n$, причем $\{v,w\}_{ij}=v_iw_j$, $i,j=1,\dots,n$. Наряду с дифференциальной системой (3.1) будем рассматривать сопряженную дифференциальную систему

$$(3.14)\quad L^*(\Psi)=-\frac{\partial\Psi}{\partial\bar z}+\frac{\partial(Q'\Psi)}{\partial z}-A'\Psi-\overline{B'}\overline{\Psi}.$$

Решения системы (3.14), регулярные на всей плоскости (вне D полагаем $A=B=0$) и исчезающие на бесконечности, будем обозначать через $\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\dots,\Psi_{N^*}$ ([11]).

Без ограничения общности можно считать, что векторы связаны с векторами v_j соотношениями

$$(3.15)\quad \Psi_j(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_D V'(z,t)\overline{v_j(t)}\,d\sigma_t,\qquad j=1,2,\dots,N,$$

$$(3.16)\quad \frac{\partial\Psi_j}{\partial\bar z}-\frac{\partial(Q'\Psi_j)}{\partial z}=-\overline{v_j(t)},$$

([11]) Из формул (3.15) и (3.16) следует $N=N^*$.

что немедленно следует из формул (2.17), (2.17′). В силу формул (2.17) и (3.15) условия (3.7) выражаются через векторы $\Psi_j(z)$ следующим образом

$$\text{(3.17)}\qquad \operatorname{im}\int_\Gamma \left(\Phi(t),\, d_{Q'}t\Psi_j\right) = 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Формула (3.11) дает решение системы (3.9) для любого квадратичного суммируемого вектора $\Phi(z)$. Однако, если $\Phi(z)$ — есть Q-голоморфный вектор, удовлетворяющий условиям (3.17) и (3.7), то формула (3.11) дает решение дифференциальной системы (3.1). При этом Φ дается формулой (3.3). Этим путем можно получить все решения системы (3.1), за исключением решений $w_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, для которых формула (3.3) дает $\Phi(z) \equiv 0$. Учитывая это, мы запишем общее представление обобщенного аналитического вектора через Q-голоморфный вектор в виде

$$\text{(3.18)}\qquad w(z) = \Phi(z) + \iint_D \Gamma_1(z, t)\Phi(t)\,d\sigma_t + \iint_D \Gamma_2(z, t)\overline{\Phi(t)}\,d\sigma_t + \sum_{k=1}^{N} c_k w_k =$$
$$= K[\Phi] + \sum_{k=1}^{N} c_k w_k(z)\,,$$

где Φ — определяется формулой (3.3) и удовлетворяет условиям (3.14).

Покажем, что

$$\text{(3.19)}\qquad [K[\Phi], w_k(z)] = [\Phi, v_k]\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Для этого заметим, что согласно (3.9) $K_1(w_k) = v_k$, откуда получаем соотношение

$$\text{(3.20)}\qquad w_k(z) = v_k(z) + \iint_D \Gamma_1(z, t)V_k(t)\,d\sigma_t + \iint_D \Gamma_2(z, t)\overline{V_k(t)}\,d\sigma_t\,.$$

Так как резольвенты $\Gamma_1^*(z, t)$ и $\Gamma_2^*(z, t)$ системы союзной с (3.9) связаны с резольвентами $\Gamma_1(z, t)$ и $\Gamma_2(z, t)$ соотношениями

$$\text{(3.21)}\qquad \Gamma_1^*(z, t) = \overline{\Gamma_1'(t, z)}\,, \qquad \Gamma_2^*(z, t) = \Gamma_2'(t, z)\,,$$

то, аналогично (3.20), выводим соотношения

$$\text{(3.22)}\qquad v_k(z) = w_k(z) + \iint_D \overline{\Gamma_1'(t,z)}w_k(t)\,d\sigma_t + \iint_D \Gamma_2'(t, z)\overline{w_k(t)}\,d\sigma_t\,.$$

(3.19) следует непосредственно из (3.20). Из (3.18), учитывая (3.19) и (3.7), получаем следующие выражения для постоянных c_k из формулы (3.8)

$$\text{(3.23)}\qquad c_k = [w, w_k]\,.$$

Итак, мы видим, что представление (3.18) при условии (3.7), осуществляет разложение решения $w(z)$ на составляющую $K[\Phi]$, ортогональную всем w_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, и проекцию $\sum_{k=1}^{N} c_k w_k$ на конечномерное пространство регулярных решений, равных нулю на бесконечности.

Подставляя (3.3) в (3.18) получим формулу Коши для обобщенного аналитического вектора

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, t) d_Q t w(t) - \Omega_2(z, t) \overline{d_Q t} \overline{w(t)} + \sum_{k=1}^{N} c_k w_k, \tag{3.24}$$

где

$$\Omega_1(z, t) = V(t, z) + \iint_{D} \Gamma_1(z, \sigma) V(t, \sigma) d\sigma_\sigma. \tag{3.25}$$

и

$$\Omega_2(z, t) = \iint_{D} \Gamma_2(z, \sigma) \overline{V(t, \sigma)} d\sigma_\sigma. \tag{3.26}$$

Умножая (3.12) и (3.13) слева на $V(t, \sigma)$, интегрируя по области D и учитывая (3.17), получаем следующие интегральные уравнения для ядер $\Omega_1(z, t)$ и $\Omega_2(z, t)$

$$\Omega_1(z, t) - V(t, z) + \frac{1}{\pi} \iint_{D} V(\tau, z)[A(\tau)\Omega_1(\tau, t) + B(\tau)\Omega_2(\tau, t)] d\sigma_\tau - \\ - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{N} \{v_k(z), \Psi_k(z)\} = 0, \tag{3.27}$$

$$\Omega_2(z, t) + \frac{1}{\pi} \iint_{D} V(\tau, z)[A(\tau)\Omega_2(\tau, z) + B(\tau)\overline{\Omega_1(\tau, t)}] d\sigma_\tau - \\ - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{N} \{v_k(z), \overline{\Psi_k(t)}\} = 0. \tag{3.28}$$

Из уравнений (3.12′) и (3.13′) аналогично выводим вторую систему интегральных уравнений для ядер $\Omega_1(z, t)$ и $\Omega_2(z, t)$

$$\Omega_1'(t, z) - V'(z, t) + \frac{1}{\pi} \iint_{D} V'(z, \tau)[A'(\tau)\Omega_1'(t, \tau) + \overline{B'(\tau)}\Omega_2'(t, \tau)] d\sigma_\tau + \\ + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \{\tilde{w}_k(z), w_k(t)\} = 0, \tag{3.27′}$$

$$\Omega_2'(t, z) + \frac{1}{\pi} \iint_{D} \overline{V'(z, \tau)}[\overline{A'(\tau)}\Omega_2(t, \tau) + B'(\tau)\Omega_1'(t, \tau)] d\sigma_\tau + \\ + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \{\overline{\tilde{w}_k(z)}, w_k(t)\} = 0, \tag{3.28′}$$

где

$$\widetilde{w}_k = \iint\limits_D V'(z,\tau)\overline{w_k(\tau)}\,d\sigma_\tau\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

В то время как система (3.27)-(3.28) может быть использована для исследования ядер $\Omega_1(z,t)$ и $\Omega_2(z,t)$ как функций параметра z, система (3.27')-(3.28') позволяет исследовать эти ядра как функции параметра t.

В дальнейшем воспользуемся следующей теоремой:

Теорема 3.1. *Для того, чтобы вектор $w(t)$, определенный и непрерывный по Гельдеру на Γ, был граничным значением $w(t) = w^+(t)$ обобщенного аналитического вектора $w(z)$ в области D, непрерывного по Гельдеру в $D+\Gamma$, необходимо и достаточно, чтобы*

(3.29) $$1)\ \operatorname{im}\int\limits_\Gamma \big(d_Q t w(t),\, \Psi_k(t)\big) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N\,,$$

(3.30) $$2)\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \Omega_1(z,t)\,d_Q t w(t) - \Omega_2(z,t)\,\overline{d_Q t}\,\overline{w(t)} + \sum_{k=1}^N c_k w_k(z) = 0$$

для $z \notin D+\Gamma$ и некоторых действительных постоянных c_k.

Доказательство. Интегрируя тождество

$$\big(L(w),\,\Psi\big) - \big(w,\,L^*(\Psi)\big) = (w,\,\Psi)_{\bar z} - (Qw,\,\Psi)_z - 2i\operatorname{im}(B\overline{w},\,\Psi)$$

по области D и применяя формулы Римана-Грина

$$\iint\limits_D f_z\,d\sigma = -\frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma f\,d\bar z\,, \qquad \iint\limits_D f_{\bar z}\,d\sigma = \frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma f\,dz$$

получаем следующее тождество Грина для системы (3.1)

(3.31) $$\operatorname{im}\iint\limits_D (B\overline{w},\,\Psi)\,d\sigma = \int\limits_\Gamma (\Psi,\,d_Q t w)$$

справедливое для любых регулярных решений системы (3.1) и (3.14). При $\Psi = \Psi_k$ из (3.31) получается (3.29). Для доказательства (3.30) рассмотрим вектор

(3.32) $$\begin{aligned} \widetilde{u}(z) &= \widetilde{u}_1(z) - w(z)\,, && z \in D\,,\\ \widetilde{u}(z) &= \widetilde{u}_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \Omega_1(z,t)\,d_Q t w(t) - \Omega_2(z,t)\,\overline{d_Q t}\,\overline{w(t)}\,, && z \in D^-. \end{aligned}$$

Из (3.27) и (3.28), учитывая (3.29), получим уравнение

(3.33) $$\widetilde{u}_1(z) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma V(t,z)\,d_Q t w(t) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D V(\tau,z)\big[A(\tau)\widetilde{u}_1(\tau) + B(\tau)\overline{\widetilde{u}_1(\tau)}\big]\,d\sigma_\tau\,.$$

Откуда, учитывая формулы (3.20), получим

$$\widetilde{u}^{+}-\widetilde{u}^{-}=-w(t)+[\widetilde{u}_1^{+}-\widetilde{u}_1^{-}]=0$$

что означает, что $\widetilde{u}$ есть непрерывное на всей плоскости решение интегральной системы (3.2). Поэтому

$$\widetilde{u}=\sum_{k=1}^{N}c_k w_k \tag{3.34}$$

при некоторых действительных постоянных c_k; равенство (3.34), для $z\notin D+\Gamma$ и есть доказываемое соотношение (3.30). Необходимость условий (3.29) и (3.30) доказана.

Переходя к доказательству достаточности условий (3.29) и (3.30) также рассматриваем вектор $\widetilde{u}_1(z)$; в силу (3.33) $\widetilde{u}_1(z)$ есть обобщенный аналитический вектор. Из формулы $\widetilde{u}_1^{+}-\widetilde{u}_1^{-}=w(t)$ учитывая что, согласно предположению (3.30), $\widetilde{u}_1^{-}=-\sum\limits_{k=1}^{N}c_k w_k$ получим $w(t)=\widetilde{u}_1^{+}+\sum\limits_{k=1}^{N}c_k w_k$, т. е. $w(t)$ граничное значение на Γ обобщенного аналитического вектора $\widetilde{u}_1(z)+\sum\limits_{k=1}^{N}c_k w_k(z)$, что требовалось.

Аналогично, из (3.27′), (3.28′) и (3.31) выводим следующую теорему:

Теорема 3.2. *Для того, чтобы вектор $\Psi(t)$, определенный и непрерывный по Гельдеру на Γ, был граничным значением $\Psi(t)=\Psi^{+}(t)$ обобщенного регулярного решения $\Psi(z)$, системы* (3.14), *непрерывного по Гельдеру в $D+\Gamma$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{1) } \operatorname{im}\int_{\Gamma}\big(d_{Q'}t\Psi, w_k(t)\big)=0\,,\qquad k=1,2,\dots,N\,, \tag{3.29′}$$

$$\text{2) } \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\Omega_1'(t,z)d_{Q'}t\Psi-\overline{\Omega_2'(t,z)}\,\overline{d_{Q'}t}\,\overline{\Psi(t)}]+\sum_{k=1}^{N}c_k\Psi_k(z)=0 \tag{3.30′}$$

для $z\notin D+\Gamma$ и некоторых действительных постоянных c_k.

§ 4. Граничные задачи для обобщенного аналитического вектора

В этом параграфе в качестве приложений разработанного выше аппарата мы исследуем основные граничные задачи для обобщенного аналитического вектора.

1. Граничная задача Гильберта. Граничную задачу Гильберта для обобщенного аналитического вектора мы формулируем следующим образом: пусть Γ некоторый контур плоскости, состоящий из конечного числа кривых

Ляпунова. Требуется найти кусочно непрерывный обобщенный аналитический вектор $w(z)$, с линией скачков Γ, по условию сопряжения на Γ

$$w^+(t) = Gw^- + H\overline{w}^- + f \tag{4.1}$$

и условию

$$|w(z)| \leqslant c|z|^r \quad \text{при} \quad |z| \to \infty , \tag{4.2}$$

где G и H — заданные комплексные матрицы, непрерывные по Гельдеру на Γ, f — комплексный вектор, непрерывный по Гельдеру на Γ, r — целое число. При этом условие (4.2) означает, что каждая компонента вектора $w(z)$ удовлетворяет этому соотношению.

Так как случай $r \neq -1$ легко сводится к случаю $r = -1$ поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $r = -1$. Наряду с задачей (4.1)-(4.2) рассматривается однородная сопряженная задача, которая формулируется следующим образом: найти исчезающие на бесконечности решения $\Psi(z)$ системы (3.14), кусочно непрерывные (с линией скачков Γ) по граничному условию

$$G^*\Psi^* + H^*\overline{\Psi^+} = \Psi^- , \tag{4.3}$$

где

$$G^* = X^{-1}G'X , \quad H^* = -X^{-1}\overline{H'}\tilde{X} , \quad X(t) = t'(s)E + Q'\overline{t'}(s) .$$

Заметим, что при изучении задачи Гильберта (4.1) мы не будем предполагать ([12]), что контур Γ есть граница той области, вне которой $A = B = 0$. Γ — может быть совершенно произвольным (непересекающимся для простоты) гладким контуром z-плоскости, дополнение к которому состоит из многосвязной области $D = D^+$ и односвязных областей D_j^- $(j = 0, 1, \dots, m)$ (область D_0^- — неограничена!).

Сначала дадим решение простейшего случая задачи (4.1)(когда $G = E$, $H = 0$)

$$w^+ - w^- = f , \quad w(\infty) = 0 . \tag{4.4}$$

Сопряженная задача приводит к условию $\Psi^+ - \Psi^- = 0$; её решения, непрерывные на всей плоскости, мы обозначили через $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$. Умножая (4.4) скалярно на $d_Q t\Psi_j$ и интегрируя вдоль Γ согласно тождеству Грина (3.31), мы получим необходимое условие разрешимости задачи (4.4)

$$\operatorname{im} \int_\Gamma (f, d_Q t\Psi_j) = 0 , \quad j = 1, 2, \dots, N . \tag{4.5}$$

([12]) В рассуждениях этого пункта мы пользуемся системой ядер $\Omega_1(z, t)$ и $\Omega_2(z, t)$, построенных для некоторой области $\tilde{D}$ объемлющей область D, и такой, что вне $\tilde{D}$ $A = B = Q \equiv 0$. Из (3.27) и (3.28), (3.27′) и (3.28′) легко заключить, что в этом случае ядра $\Omega_1(z, t)$ и $\Omega_2(z, t)$ не меняются при расширении области $\tilde{D}$.

Если (4.5) выполнено, то легко видеть, что в силу (3.27), (3.28) и (2.21) формула

$$(4.6) \qquad w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\Omega_1(z, t)d_Q t f(t) - \Omega_2(z, t)\overline{d_Q t}\overline{f(t)}] + \sum_{k=1}^{N} c_k w_k$$

дает, очевидно, все решения задачи (4.4). Итак, справедлива

Лемма 4.1. *Для разрешимости задачи* (4.4) *необходимо и достаточно выполнение условий* (4.5). *Все решения задачи* (4.4) *даются формулой* (4.6), *где* c_k *произвольные действительные постоянные.*

Аналогично имеет место

Лемма 4.1$'$. *Для существования кусочно непрерывного решения системы* (3.14), *исчезающего на бесконечности и удовлетворяющего условию*

$$\Psi^+ - \Psi^- = \nu \quad \text{на } \Gamma$$

необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\operatorname{im}\int_{\Gamma}(\nu, d_Q t w_k) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Количество линейно независимых решений однородных задач (4.1) и (4.3) будем обозначать соответственно через l и l' ($r = -1$).

Теорема 4.1. *Для разрешимости неоднородной граничной задачи* (4.1) ($r = -1$) *необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$(4.7) \qquad \operatorname{im}\int_{\Gamma}(f, d_{Q'} t v_j^+) = 0$$

для всех решений v_j, $j = 1, \ldots, l'$, *однородной сопряженной задачи.*

Доказательство. Обозначая скачок искомого решения через $\mu = w^+ - w^-$, согласно лемме 4.1, это решение задачи (4.1) представимо в виде

$$(4.8) \qquad w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\Omega_1(z, t)d_{Q'} t \mu(t) - \Omega_2(z, t)\overline{d_Q t}\overline{\mu(t)}] + \sum_{k=1}^{N} c_k w_k\,,$$

причем плотность μ удовлетворяет условиям (4.5). Подставляя получаемое из (4.8) согласно формулам (2.20) выражения для $w^+(t)$ и $w^-(t)$ в условие сопряжения (4.1) получим для $\mu(t)$ следующую систему сингулярных интегральных уравнений

$$(4.9) \qquad L(\mu) \equiv (E + G)\mu + H\bar{\mu} + 2(E - G)S(\mu) - 2HS(\mu) = f_1\,,$$

где

$$(4.10) \qquad f_1 = 2f + 2\sum_{k=1}^{N} c_k a_k\,, \qquad a_k = Gw_k + H\overline{w}_k - w_k\,,$$

$$(4.11) \qquad S(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(t_0, t)d_Q t\mu(t) - \Omega_2(t_0, t)\overline{d_Q t}\overline{\mu(t)}\,.$$

Уравнение (4.9) мы понимаем как следующую систему действительных сингулярных интегральных уравнений относительно действительного неизвестного $2n$-компонентного вектора $\nu = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$, где $\mu = \xi + i\eta$,

$$\text{(4.9}') \qquad \operatorname{re} L(\mu) = \operatorname{re} f_1, \quad \operatorname{im} L(\mu) = \operatorname{im} f_1 .$$

Полагая $G = a + i\beta$, $H = \alpha + ib$ непосредственным подсчетом убеждаемся, что характеристическая часть системы (4.9′) имеет вид

$$A\nu + \frac{B}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\nu\, dt}{t - t_0} = 0,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} E + a + \alpha & b - \beta \\ \beta + b & E + a - \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = i\begin{bmatrix} b - \beta & E - a - \alpha \\ -E + a - \alpha & -\beta - \alpha \end{bmatrix}.$$

Поэтому нетрудно проверить, пользуясь правилами вычисления детерминатов блочных матриц, что условие нормальности системы (4.9′): $\det(A + B)$, $\det(A - B) \neq 0$ приводит к неравенству

$$\text{(4.9}'') \qquad \det G \neq 0 \quad \text{на } \Gamma$$

и для индекса $\bar{\varkappa}$ системы (4.9′) имеем формулу

$$\text{(4.12)} \qquad \bar{\varkappa} = \frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma \arg\det G(t) = 2\varkappa(G).$$

Система интегральных уравнений, союзная с (4.9′) записывается в виде следующей системы комплексных уравнений

$$\text{(4.13)} \qquad L^*(\chi) =$$
$$= (E + G')\bar{\chi} + \bar{H}'\chi + \frac{X'(t_0)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}[\Omega_1'(t, t_0)\varrho(t) + \overline{\Omega_2'(t, t_0)}\,\overline{\varrho(t)}]dt = 0,$$

где

$$\varrho = (E - G')\bar{\chi} - \bar{H}'\chi, \qquad \chi = \chi_1 + i\chi_2,$$

причем $2n$-компонентный действительный вектор $\tilde{\nu} = \begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}$ является решением системы действительных сингулярных уравнений, союзной с (4.9′).

Наряду с (4.13) будем рассматривать систему неоднородных уравнений

$$\text{(4.13}') \qquad L^*(\chi) = \sum_{k=1}^{N} c_k i X'(t_0)\Psi_k(t_0).$$

Пусть χ — некоторое решение системы (4.13′). Положим

$$\text{(4.14)} \qquad iV_1 = X'^{-1}(t)\overline{\chi(t)} \quad \text{и} \quad iV_2 = X'^{-1}(t)[G'\bar{\chi} + \bar{H}'\chi]$$

и рассмотрим векторы

$$(4.15)\quad \widetilde{\Psi}_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\Omega_1'(t,z)d_Q tV_1(t)-\overline{\Omega_2'(t,z)}\overline{d_Q tV_1(t)}\right)-\sum_{k=1}^{N}c_k\Psi_k(t)$$

для $z\notin D^-$,

$$(4.16)\quad \widetilde{\Psi}_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1'(t,z)d_Q tV_2(t)-\overline{\Omega_2'(t,z)}\overline{d_Q tV_2(t)}$$

для $z\notin D^+$. Если вектор $\chi(t)$ удовлетворяет условиям

$$(4.17)\quad 1)\ \mathrm{re}\int_{\Gamma}\left(\overline{\chi},w_k(t)\right)ds=0\,,\qquad 2)\ \mathrm{re}\int_{\Gamma}(G\overline{\chi}+\overline{H}'\chi,w_k)=0\,,$$

то так $\widetilde{\Psi}_1(z)$ как $\widetilde{\Psi}_2(z)$ будут решениями системы (3.14) в областях D^- и D^+ соответственно. Кроме того

$$(4.18)\quad \lim_{z\to\infty}\widetilde{\Psi}_1(z)=0$$

и согласно (2.20′) для граничных значений $\widetilde{\Psi}_1^-(t_0)$, $\widetilde{\Psi}_2^+(t_0)$, $t_0\in\Gamma$ имеем выражения

$$\widetilde{\Psi}_1^-(t_0)=\frac{V_1(t_0)}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}[\Omega_1'(t,t_0)\overline{\chi}(t)+\overline{\Omega_2'(t,t_0)}\chi(t)]ds-\sum_{k=1}^{N}c_k\Psi_k(t_0)\,,$$

$$\widetilde{\Psi}_2^+(t_0)=-\frac{V_2(t_0)}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}[\Omega_1'(t,t_0)(G'\overline{\chi}+\overline{H}'\chi)+\overline{\Omega_2'(t,t_0)}\overline{(G'\overline{\chi}+\overline{H}\chi)}]ds\,.$$

Поэтому система (4.13′) эквивалентна условию

$$(4.19)\quad \widetilde{\Psi}_1^-=\widetilde{\Psi}_2^+\quad\text{на }\Gamma\,.$$

Равенства (4.18) и (4.19) показывают, что при выполнении (4.17) формулы (4.15) и (4.16) определяют некоторое непрерывное на всей плоскости и равное нулю на бесконечности решение $\widetilde{\Psi}(z)$ системы (3.14). Поэтому

$$(4.20)\quad \widetilde{\Psi}(z)=\sum_{k=1}^{N}\hat{c}_k\Psi_k(z)\qquad\text{для всех } z\,.$$

Из формулы (4.20) и теоремы 3.2 заключаем, что векторы V_1 и V_2, определенные формулами (4.14), являются граничными значениями $V_1=V^-$, $V_2=V^-$ — вектора $V(z)$, являющегося решением системы (3.14) и равного нулю на бесконечности. В силу (4.14) будет

$$G'X'V^+-\overline{H}'\overline{X}'\overline{V}^+=X'V^-\,,$$

т. е. вектор V есть решение однородной сопряженной задачи. Наоборот, если вектор $V(z)$ есть решение однородной сопряженной задачи, то вектор χ, определенный из условий (4.14), будет очевидно, удовлетворять условиям (4.17) и, кроме того, системе (4.13′) при некоторых постоянных $\hat{c}_k$.

Итак формулы (4.14) устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями системы (4.13′), удовлетворяющими условиям (4.17) и решениями однородной сопряженной задачи.

Покажем, что условия (4.17) эквивалентны одному условию (4.23). Пусть χ некоторое решение системы (4.13′). Положим

$$\nu = -i[X'(t)]^{-1}[\bar{\chi} - G'\bar{\chi} - \bar{H}'\chi] \tag{4.21}$$

и рассмотрим кусочно непрерывное, исчезающее на бесконечности решение $V(z)$ системы (3.14), определяемое из условия

$$V^+ - V^- = \nu \quad \text{на } \Gamma. \tag{4.22}$$

Согласно лемме 4.1′, задача (4.22) для системы (3.14) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\operatorname{im} \int_\Gamma (\nu, d_Q t w_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \tag{4.23}$$

При этом, при выполнении условий (4.23) решение задачи (4.22) дается формулой

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Omega_1'(t, z) d_{Q'} t \nu(t) - \Omega_2'(t, z) \overline{d_{Q'} t} \overline{\nu(t)} + \sum_{k=1}^N c_k \Psi_k. \tag{4.24}$$

Из (4.24) для граничных значений V^+ и V^- имеем выражения

$$V^+ = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [\Omega'(t, t_0) d_{Q'} t \nu(t) - \Omega_2'(t, t_0) \overline{d_{Q'} t} \overline{\nu(t)}] + \sum_{k=1}^N c_k \Psi_k,$$

$$V^- = -\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [\Omega_1'(t, t_0) d_{Q'} t \nu(t) - \Omega_2'(t, t_0) \overline{d_{Q'} t} \overline{\nu(t)}] + \sum_{k=1}^N c_k \Psi_k.$$

В силу системы (4.13′) мы получим отсюда, что

$$V^+ = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \{\Omega_1'(t, t_0) \varrho(t) + \overline{\Omega_2'(t, t_0)} \overline{\varrho(t)}\} d\varrho + \sum_{k=1}^N c_k \Psi_k(t_0) =$$

$$= -\frac{iX'^{-1}(t_0)}{2}[\bar{\chi} - G'\bar{\chi} - \bar{H}'\chi] + \frac{iX'(t_0)^{-1}}{2}[(E + G')\bar{\chi} + \bar{H}\chi] + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\hat{c}_k}{2} + c_k\right)\Psi_k =$$

$$= iX'^{-1}(t_0)[G'\bar{\chi} + \bar{H}'\chi] + \sum_{k=1}^N \tilde{c}_k \Psi_k,$$

т. е. мы получим, что вектор

$$iX'^{-1}(t_0)[G'\overline{\chi}+\overline{H}'\chi]$$

есть граничное значение на Γ решения системы (3.14). В силу формулы Грина (3.31) мы заключаем, отсюда, что условия (4.17) удовлетворены. В силу (4.23) удовлетворяются также условия (4.17) 2). Итак, мы показали, что решение системы (4.13'), удовлетворяющее условиям (4.23) автоматически удовлетворяет условиям (4.17) 1) и (4.17) 2).

После этой подготовки, мы можем дать доказательство теоремы 4.1. Необходимость условий (4.7) следует непосредственно из тождества Грина (3.31).

Покажем, что условия (4.17) достаточны для разрешимости задачи (4.1). В силу доказанного, выполнение условий (4.7) означает, что любое решение χ системы (4.13'), удовлетворяющее условиям

$$\mathrm{re}\int_\Gamma (a_k, \overline{\chi})ds = 0\ , \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{4.25}$$

удовлетворяет условиям

$$\mathrm{re}\int_\Gamma (f, \overline{\chi})ds = 0\ . \tag{4.26}$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_{l_I}$ полная система линейно независимых решений однородной системы (4.9) $L\mu = 0$. Для разрешимости системы (4.13') необходимо и достаточно, чтобы постоянные $\hat{c}_k$ удовлетворяли равенствам

$$\sum_{k=1}^{N}\hat{c}_k \mathrm{re}\int_\Gamma \left(iX'(t)\Psi_k(t), \overline{\mu}_j\right)ds = 0\ , \qquad j = 1, \ldots, l_I^* . \tag{4.27}$$

Не ограничивая общности, примем, что

$$\det\left\{\mathrm{im}\int_\Gamma \left(X'(t)\Psi_k(t)\overline{\mu}_j\right) ds\right\}, \qquad k = 1, \ldots, p\ ,\ j = 1, \ldots, p\ ,$$

есть ранговый минор матрицы

$$\mathrm{im}\int_\Gamma \left(X'(t)\Psi_k(t), \overline{\mu}_j\right)ds\ . \qquad k \leqslant N\ ,\ j \leqslant i_I\ .$$

Тогда система (4.27), а тем самым и неоднородная система (4.13') разрешима при любых значениях постоянных $\hat{c}_{p+1}, \ldots, \hat{c}_N$. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_{l_I'}, \chi_{l_I+1}, \ldots, \ldots, \chi_{l_I+N-p}$ полная система решений системы (4.13'), причем векторы $\chi_1, \ldots, \chi_{l_I'}$ обозначают полную систему решений однородной системы (4.13). В силу (4.25), (4.26) можем утверждать, как легко видеть, что существуют постоянные $c_1, \ldots, c_N$ такие, что имеют место равенства

$$\mathrm{re}\int (f, \overline{\lambda}_j)ds + \sum_{j=1}^{N} c_k \int_\Gamma (a_k, \overline{\chi}_j)ds = 0\ , \qquad j = 1, \ldots, l_I', \ldots, l_I' + N - p\ . \tag{4.28}$$

В самом деле, (4.28) есть система неоднородных линейных уравнений относительно постоянных c_k, которая разрешима в силу (4.25) и (4.26). Равенства (4.28) для $j = 1, \dots, l'_I$ гарантируют разрешимость неоднородной системы (4.9) при указанных значениях постоянных c_k, $k = 1, \dots, N$. Какое-нибудь решение системы (4.9) обозначим через $\tilde{\mu}$. Решения системы (4.9) определяются с точностью до линейной комбинации

$$\sum_{j=1}^{l_I} a_j \mu_j \,. \tag{4.29}$$

Покажем, что постоянные a_j можно подобрать так, чтобы решение $\hat{\mu} = \tilde{\mu} + \sum_{j=1}^{l_I} a_j \mu_j$ удовлетворяло условиям

$$\operatorname{im} \int_\Gamma \big(\hat{\mu}, X'(t)\Psi_k(t)\big)\, ds = 0 \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, N\,. \tag{4.30}$$

В самом деле, при $k = 1, \dots, p$ (4.30) представляет собой систему неоднородных линейных уравнений, относительно постоянных a_j, разрешимую при любом $\tilde{\mu}$ и любых значениях, постоянных $a_{p+1}, \dots, a_{l_I}$. Возьмем какую-нибудь систему значений a_j^0, определенную из этих p уравнений и покажем, что решение $\hat{\mu} = \tilde{\mu} + \sum_{j=1}^{l_I} a_j^0 \mu_j$ системы (4.9) удовлетворяет (4.30) также для $k = p+1, \dots, N$. Для этой цели воспользуемся легко проверяемой формулой

$$\operatorname{re} \int_\Gamma (f_1, \bar{\chi})\, ds = -\sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \operatorname{im} \int_\Gamma \big(\mu, X'(t)\Psi_k(t)\big)\, ds \tag{4.31}$$

справедливой для любого решения μ системы $L\mu = f_1$ и любого решения системы $L^*\chi = \sum_{k=1}^{N} i\hat{c}_k X'(t)\Psi_k(t)$. Полагая в (4.30) $f_1 = f + \sum_{k=1}^{N} c_k a_k$ и $\mu = \hat{\mu}$ в силу (4.28) получим, что левая часть (4.30) равна нулю; отсюда, учитывая, что (4.30) выполняется для $k = 1, \dots, p$, заключаем, что при произвольных значениях постоянных $\hat{c}_{p+1}, \dots, \hat{c}_N$,

$$\sum_{k=p+1}^{N} \hat{c}_k \operatorname{im} \int_\Gamma \big(X'(t)\Psi_k(t), \bar{\hat{\mu}}(t)\big)\, d\varrho = 0\,. \tag{4.32}$$

Это значит, что равенства (4.30) имеют место также для $k = p+1, \dots, N$. Итак, мы доказали, что выполнение условий (4.7) гарантирует существование решения системы (4.9) удовлетворяющего условиям (4.5); любое такое решение порождает по формулам (4.8) решение задачи (4.1). Теорема 4. доказана.

Сейчас выведем соотношение

$$l - l' = 2\varkappa\,. \tag{4.33}$$

Так как ранг матрицы $\operatorname{im}\int_{\Gamma}(\bar{\mu}_j, X'(t)\Psi_k(t))\,ds$ равен p, то легко видеть, что существует l_I-p линейно независимых решений однородной системы (4.9) удовлетворяющих условиям (4.5). Эти l_I-p решений системы (4.9) дают l_I-p линейно независимых решений однородной задачи (4.1). Однако, решения однородной задачи (4.1) порождаются также решениями неоднородной системы (4.9), когда $f\equiv 0$, но постоянные $c_1, \dots, c_N$, возможно, не равны нулю. Однако, в силу (4.31), для разрешимости системы $L\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k a_k$, при условии (4.5) нужно, чтобы удовлетворялись равенства (4.28) (при $f\equiv 0$). Обозначим через q ранг матрицы

$$(4.34)\qquad \operatorname{re}\int_{\Gamma}(a_k, \bar{\chi}_j)\,ds\,, \qquad k=1,\dots,N\,,\ j=1,\dots,l_I'+N-p\,.$$

Тогда можно считать, что однородная система (4.28) разрешима при любых значениях, постоянных $c_{q+1},\dots,c_N$. При этих же значениях будет разрешима система $\sum_{k=1}^{N} c_k a_k = L_\mu$, причем, как и выше, в силу (4.29), (4.31) легко убедиться, что решения этой системы можно выбрать так, чтобы выполнялись условия (4.5). Таким образом, мы получаем еще $N-q$ решений однородной задачи (4.1); поэтому $l=l_I-p+N-q$. Учитывая доказанное выше соответствие между решениями сопряженной однородной задачи и решениями системы (4.13′) аналогично находим $l'=l_I'-q+N-p$. Так как согласно второй теореме Нетера для системы (4.9) имеем $l_I-l_I'=2\varkappa$, то из приведенных формул следует (4.31). Полученный результат мы формулируем в виде теоремы:

Теорема 4.2. *Имеет место равенство*

$$(4.31')\qquad l-l'=2\varkappa\,,$$

где

$$(4.35)\qquad \varkappa=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma}\arg\det G(t)\,.$$

Формула (4.31′) *есть формула для индекса задачи Гильберта.*

2. Задача Римана-Гильберта (P). Эта задача состоит в следующем:

(P) *Найти обобщенные аналитические векторы, непрерывные (в смысле Гельдера) в $D+\Gamma$ и удовлетворяющие граничному условию*

$$(4.36)\qquad \operatorname{re}[\bar{G}w(t)]=f(t)$$

где $G(t)$ — заданная матрица из $\Omega(\Gamma)$ ([13]) *и $f(t)$ — заданный непрерывный по Гельдеру, действительный вектор.*

([13]) Через $\Omega(\Gamma)$ мы обозначаем множество функций $G(t)$, $t\in\Gamma$, непрерывных по Гельдеру на Γ и таких, что $\det G(t)\neq 0$ на Γ.

Наряду с изучением задачи (P) будем изучать следующую однородную сопряженную задачу (P_0').

P_0'. *Найти регулярное решение системы* (3.14), *непрерывное по Гельдеру в* $D+\Gamma$, *по граничному условию*

$$\mathrm{re}[\overline{G}'^{-1}X(t)\Psi] = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{4.37}$$

где $t = t(s)$ — *управление контура* Γ *и* $X(t) = t'(s)+Q'\overline{t'(s)}$.

Будем исходить из следующего представления, непрерывного по Гельдеру обобщенного аналитического вектора в виде интеграла с действительной непрерывной в смысле Гельдера плотностью

$$w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} M(z,t)\mu(t)ds + \tilde{w}c + \sum_{k=1}^{N} c_k w_k(z), \tag{4.38}$$

где

$$M(z,t) = \Omega_1(z,t)x(t) - \Omega_2(z,t)\overline{x(t)}, \tag{4.39}$$

$$\tilde{w} = i\left(E + \iint_D \Gamma_1(z,t)d\sigma_t\right) - \iint_D \Gamma_2(z,t)d\sigma_t \tag{4.40}$$

c — действительный вектор, c_k ($k = 1, \ldots, N$) — действительные постоянные. Формула (4.38) получается немедленно, если в (3.18) подставить (2.30) и воспользоваться соотношениями (3.25), (3.26).

Согласно условиям (3.17) можем утверждать, что векторы $\mu(t)$ и c связаны соотношениями

$$\mathrm{im}\int_{\Gamma}\left(\Psi_k, d_Q t\left(\mu + i\frac{c}{2}\right)\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.41}$$

Наоборот, при любых векторах c и $\mu(t)$, удовлетворяющих (4.41) и любых постоянных $c_1, \ldots, c_N$ формула (4.38) определяет обобщенный аналитический вектор. Постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_N$, вектор c и значения вектора $\mu(t)$ на кривой Γ_0, определяются однозначно вектором $w(z)$. Значения плотности $\mu(t)$ на $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ определяются с точностью до слагаемого

$$\sum_{k=1, i=1}^{k=m, i=n} a_{ki}\mu_{ki}, \quad a_{ki} = \mathrm{const}, \tag{4.42}$$

где μ_{ki} вектор $\underbrace{0\,0 \ldots 0}_{i-1}1000\ldots0$ на Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Представляя искомое решение задачи (P) по формуле (4.38) и подставляя (4.38) в граничное условие (4.36) для определения плотности μ, вектора c и постоянных $c_1, \ldots, c_N$ в силу (2.20), (3.27) и (3.28) получим следующую систему интегральных уравнений

$$a(z_0)\mu(z_0) + \int_{\Gamma}\mathrm{re}\left\{\frac{\overline{G(t_0)}}{\pi i}M(z_0,t)\right\}\mu(t)ds = f_1(z_0), \tag{4.43}$$

где

$$f_1(z_0) = f(z_0) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathrm{re}[\bar{G}(z_0)\tilde{w}_k(z_0)] - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathrm{re}[\bar{G}w_k], \qquad G = \alpha + i\beta,$$

и $\tilde{w}_k = \tilde{w}e_k$, где e_k — вектор $\{\delta_{ki}\}$, $k = 1, \dots, n$, $\delta_{ki} = 0$, $k \neq i$, $\delta_{ii} = 1$, $c = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l e_l$. Характеристическая часть системы (4.43) имеет вид

$$\alpha(z_0) - \frac{\beta(z_0)}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)\,dt}{t - z_0}.$$

Поэтому условие $\det G \neq 0$ гарантирует нормальность системы (4.43) и для её индекса имеем формулу

$$\hat{\varkappa} = \frac{1}{\pi} \Delta_{\Gamma} \arg \det G(t) = 2\varkappa(G). \tag{4.44}$$

Однородная система интегральных уравнений, союзная с (4.43), имеет вид

$$\alpha'(z_0)\chi(z_0) + \int_{\Gamma} \mathrm{re}\left\{\frac{M'(t, z_0)\overline{G'(t)}}{\pi i}\right\}\chi(t)\,ds \equiv 0. \tag{4.45}$$

Наряду с уравнением (4.45) будем рассматривать неоднородное уравнение

$$\alpha'(z_0)\chi(z_0) + \int_{\Gamma} \mathrm{re}\left\{\frac{M'(t, z_0)\overline{G'(t)}}{\pi i}\right\}\chi(t)\,ds = \sum_{k=1}^{N} X'(t)\mathrm{re}\{ix'(t)\Psi_k(t)\}. \tag{4.45'}$$

В силу теоремы 3.2 и формул (2.20′), (3.27′) заключаем, что если $\Psi(t)$ есть решение задачи (P_0'), то формула

$$i\overline{G'}\chi = (t' + Q'\overline{t''})\Psi \tag{4.46}$$

определяет решение χ системы (4.45′), при некоторых значениях постоянных $\hat{c}_k$, удовлетворяющее сверх того условиям

$$\mathrm{re} \int_{\Gamma} (\bar{G}'\chi, w_k)\,ds = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, N, \tag{4.47}$$

и условиям

$$\mathrm{re} \int_{\Gamma} \tilde{w}'[\overline{G'(t)}\chi]\,ds = \sum_{k=1}^{N} 2\pi \hat{c}_k \mathrm{im}\, \mathring{\Psi}_k, \qquad \text{где} \qquad \mathring{\Psi}_k = \lim_{z\to\infty} z\Psi_k(z). \tag{4.48}$$

Наоборот, если дано некоторое решение $\chi(t)$ уравнения (4.45′), удовлетворяющее условиям (4.47) и (4.48), то вектор Ψ в формуле (4.46) есть решение задачи (P_0'). В самом деле, рассмотрим вектор

$$\tilde{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\Omega'(t, z)\overline{G'(t)} + \overline{\Omega_2'(t, z)}G'(t)]\chi(t)\,ds + \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \Psi_k(z), \tag{4.49}$$

$$z \notin D + \Gamma.$$

В силу формул (3.27′), (3.28′), (2.20) и (4.45′) находим, что граничное значение $\widetilde{\Psi}^-(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{im}[(t'+Q'\bar{t}')\widetilde{\Psi}^-(t)] = 0 \quad \text{на } \Gamma . \tag{4.50}$$

Кроме того, из (4.49) и (4.48) получаем, что

$$\mathrm{im}\lim_{z\to\infty} z\widetilde{\Psi}(z) = 0 . \tag{4.51}$$

Покажем, что из (4.50) и (4.51) вытекает, что

$$\widetilde{\Psi} \equiv 0 \quad \text{для} \quad z \notin D+\Gamma . \tag{4.52}$$

В силу (3.27′) и (3.28′) и (4.47) легко видеть, что вне $D+\Gamma$ вектор (4.49) есть решение системы уравнений

$$\frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial(Q'\widetilde{\Psi})}{\partial z} = 0 . \tag{4.53}$$

Из формулы (2.17′), так как $\widetilde{\Psi}(\infty) = 0$, заключаем, что

$$\widetilde{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V'(z,t)\, d_{Q'}t\widetilde{\Psi}^-(t) , \qquad z \notin D+\Gamma ,$$

откуда, в силу (4.50), получаем

$$\mathrm{re}\lim_{z\to\infty} z\widetilde{\Psi}(z) = -\,\mathrm{re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t'+Q'\bar{t}')\widetilde{\Psi}^-(t)\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mathrm{im}\,(t'+Q'\bar{t})'\widetilde{\Psi}^-(t)\,ds = 0 .$$

Вместе с (4.51) это дает

$$\lim_{z\to\infty} z\widetilde{\Psi}(z) = 0 \tag{4.54}$$

что значит, что вектор $\Psi(z)$ имеет на бесконечности нуль по крайней мере 2-го порядка. Однако, это несовместимо с граничным условием (4.50). Действительно, расписывая условия (4.50) в развернутом виде, получим, что компоненты $\widetilde{\Psi}_k$ вектора $\widetilde{\Psi}$ удовлетворяют условиям

$$\mathrm{im}\Big[\sum_{k=1}^{n}(t'\delta_{ki}+q_{ki}\bar{t}')\widetilde{\Psi}_k^-\Big] = 0 .$$

Так как $q_{ki} = 0$ для $k < i$, то отсюда для компоненты $\widetilde{\Psi}_n^-$ получаем условие

$$\mathrm{im}[t'(1+q_{nn}\bar{t}'^2)\widetilde{\Psi}_n^-] = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{4.50′}$$

и в силу (4.53), уравнение

$$\frac{\partial\widetilde{\Psi}_n}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial q_{nn}\widetilde{\Psi}_n}{\partial z} = 0\,, \qquad z \notin D+\Gamma. \tag{4.53'}$$

Так как индекс граничного условия (4.50′) на Γ_j, $j \geqslant 1$, в силу неравенства (2.1), равен -1, то по теореме представления решений уравнения (4.53′) (см. [7]) немедленно получим, что $\widetilde{\Psi}_n(z) \equiv 0$ для $z \in D_j$ (14), $j \geqslant 1$.

По этой же теореме представления и теореме (2.14) из [7], если только $\widetilde{\Psi}_n \not\equiv 0$ в D_0 из (4.53′) и (4.50′) получим неравенство

$$N_{\Gamma_0}^{\widetilde{\Psi}_n} + 2N_{D_0}^{\widetilde{\Psi}_n} \leqslant 3\,,$$

где $N_{D_0}^{\widetilde{\Psi}_n}$ ($N_{\Gamma_0}^{\widetilde{\Psi}_n}$) количество нулей функции $\widetilde{\Psi}_n$, с учетом кратности, расположенных в D_0 и на Γ_0 соответственно. Однако в силу (4.54) $N_{D_0}^{\widetilde{\Psi}_n} \geqslant 2$, что невозможно. Поэтому, (4.52′) справедливо также при $j = 0$. Продолжая дальше такое же рассуждение, установим поочередно, что $\widetilde{\Psi}_{n-1} \equiv 0, \ldots, \widetilde{\Psi}_1 \equiv 0$ вне $D+\Gamma$. В силу теоремы (3.14) из (4.52) заключаем, что вектор $\Psi(t)$ из формулы (4.46) есть граничное значение на Γ регулярного решения системы (3.14) в области D, т. е. есть решение задачи (P_0'). Итак, мы установили, что формула (4.45′) устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями системы (4.45′) удовлетворяющими условиям (4.47) и (4.48) и решениями задачи (P_0').

Докажем две основные теоремы о задаче (P).

Теорема 4.3. *Для разрешимости неоднородной задачи* (P) *необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\operatorname{im}\int_{\Gamma}(\bar{G}^{-1}f,\, d_{Q'}t\hat{\Psi}_j) = 0 \tag{4.55}$$

для полной системы $\hat{\Psi}_j$, $j = 1, \ldots, l'$ *решений задачи* (P_0').

Через l (l') обозначим число линейно независимых решений однородной задачи (4.46), (4.47).

Теорема 4.4. *Числа* l *и* l' *конечны и связаны соотношением*

$$l - l' = 2\varkappa - n(m-1)\,, \tag{4.56}$$

где $\varkappa = \varkappa(\sigma)$ — *индекс матрицы граничного условия* (4.46).

Доказательства этих теорем будем проводить совместно. Необходимость условий (4.55) следует непосредственно из тождества Грина (3.31). Покажем, что условия (4.55) достаточны для разрешимости задачи (4.36). В силу доказанного соответствия (4.46) между решениями однородной задачи (4.36) и решениями системы (4.45′) удовлетворяющими условиям (4.47) и (4.48′),

---

(14) D_j — область ограничена кривой Γ_j, $j \geqslant 1$, D_0 — внешность.

выполнение условий (4.55) означает, что любое решение системы (4.45), удовлетворяющее (4.47) и (4.48′), удовлетворяет условиям

$$\int_\Gamma (f, \chi) ds = 0 . \tag{4.57}$$

Для разрешимости системы (4.43) необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\int_\Gamma (f_1, \chi_j) ds = 0 , \quad j = 1, \dots, l'_I , \tag{4.58}$$

для всех решений системы (4.45) (l'_I — число линейно независимых таких решений). Ввиду (4.44) условия (4.58) можно переписать в виде

$$\int_\Gamma (f, \chi_j) ds - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \int_\Gamma (\tilde{a}_k, \chi_j) ds - \sum_{s=1}^{n} c_s \int_\Gamma (a_s, \chi_j) ds = 0 , \tag{4.58′}$$

где

$$\tilde{a}_k = \mathrm{re}(\bar{G}\tilde{w}_k) , \quad a_k = \mathrm{re}[\bar{G} w_k] , \quad j = 1, \dots, l'_I .$$

Умножая равенства (4.48) скалярно на векторы e_l и учитывая формулы (2.17), можем их переписать в виде

$$\int (\tilde{a}_l, \chi_j) ds + \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathrm{re}(2\pi i \mathring{\Psi}_k e_l) = 0 . \tag{4.48′}$$

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{l_I}$ полная система решений однородной системы (4.43). Для разрешимости неоднородной системы (4.45′) необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \int_\Gamma \mathrm{re}\left(iX'(t)\Psi_k(t), \mu_j\right) ds = 0 , \quad j = 1, \dots, l_I . \tag{4.59}$$

Обозначим через p ранг матрицы системы уравнений (4.59). Без ограничения общности можем считать, что система (4.59) разрешима при произвольных значениях, постоянных $\hat{c}_{p+1}, \dots, \hat{c}_N$. Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{l'_I}, \dots, \chi_{l'_I+N-p}$ какая-нибудь полная система решений неоднородной системы (4.45′), причем $\chi_1, \dots, \chi_{l'_I}$ — обозначают решения системы (4.45) и χ_j, $j > l'_I$ решения неоднородной системы (4.45′); каждому такому решению отвечает последовательность $\{\hat{c}_k^j\}$, $k = 1, \dots, N$, являющаяся решением системы (4.59). Рассмотрим следующую систему уравнений относительно неизвестных γ_l, $l = 1, \dots, n$, $c_1, \dots, c_N$

$$\int_\Gamma (f, \chi_j) ds - \sum_{l=1}^{N} \gamma_l \left[\int_\Gamma (\chi_j, \tilde{a}_l) ds + \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k^j \mathrm{re}(2\pi i \mathring{\Psi}_k, c_k)\right] + \\ - \sum_{k=1}^{N} c_s \int_\Gamma (a_s, \chi_j) ds = 0 , \quad j = 1, \dots, l'_I, \dots, l'_I + N - p . \tag{4.60}$$

Выполнение условий (4.55) гарантирует, в силу доказанного выше, разрешимость системы (4.60). Так как $\{\hat{c}_k^j\} = 0$, $j = 1, \dots, l'_I$, то решение системы (4.60) есть также решение системы (4.58′). Поэтому разрешима система (4.43). Пусть μ_0 какое-нибудь решение системы (4.43). Оно определяется с точностью до линейной комбинации

$$\sum_{j=1}^{l_I} a_j \mu_j .$$

Покажем, что постоянные a_j можно всегда так подобрать, чтобы выполнялись условия (4.41) для решения

$$\widetilde{\mu} = \mu_0 + \sum_{j=1}^{l_I} a_j \mu_j . \tag{4.61}$$

В самом деле, условия (4.41) в силу формулы (2.17′) можно переписать в виде

$$\operatorname{im} \int_\Gamma (d_{Q'} t \Psi_k, \mu) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_l}{2} \operatorname{re}(2\pi i \mathring{\Psi}_k, e_l) = 0 , \qquad k = 1, \dots, N . \tag{4.61′}$$

Подставляя (4.61) в (4.61′), получим систему N уравнений относительно постоянных a_j. В силу принятого предположения о ранге матрицы системы (4.59) легко видеть, что путем подбора постоянных a_j можно удовлетворить первым p уравнениям этой системы. Это значит, что так выбранное $\widetilde{\mu}$ будет удовлетворять уравнениям (4.61′) для $k = 1, \dots, p$. Однако, учитывая формулу

$$\int_\Gamma (t, \chi_j) ds - \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \int_\Gamma (\widetilde{a}_l, x_j) ds - \sum_{s=1}^{N} c_s \int_\Gamma (a_s, x_j) ds = \\ = 2 \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k^j \operatorname{re} \int_\Gamma \big(i\chi'(t) \Psi_k(t), \mu\big) ds \tag{4.62}$$

справедливую для любого решения μ системы (4.43) и любого решения $(\chi_j, \hat{c}_k^j)$ системы (4.45′), легко получим равенство

$$\int_\Gamma (f, \chi_j) ds - \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \Big[\int_\Gamma (\widetilde{a}_l, \chi_j) ds + \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k^j \operatorname{re}(2\pi i \breve{\Psi}_k, e_l) \Big] - \\ - \sum_{s=1}^{N} c_s \int_\Gamma (a_s, \chi_j) ds = \\ = -2 \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k^j \Big[\operatorname{im} \int_\Gamma (d_{Q'} t \Psi_k, \mu) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_l}{2} \operatorname{re}(2\pi i \breve{\Psi}_k, e_l) \Big] . \tag{4.63}$$

В силу (4.60) заключаем, что при всех j левая часть (4.63) равна нулю. Так как при $\mu \equiv \tilde{\mu}$ первые p равенств (4.41′) имеет место и в (4.63) постоянным $\hat{c}_k$, $k = p+1, \ldots, N$ можно придавать любые значения, то равенство нулю правой части (4.63) возможно лишь тогда, когда условия (4.41′) выполняются для всех $k = 1, \ldots, N$. Итак, мы доказали, что условия (4.55) гарантируют существование решения системы (4.43), удовлетворяющего условиям (4.41). Теорема 4.3 доказана. Переходя к доказательству теоремы 4.4, обозначим через q ранг матрицы однородной системы (4.60). Тогда число линейно независимых решений однородной системы (4.60) равно $N+n-q$. Каждому такому решению отвечает решение системы (4.43) при $f \equiv 0$ и легко видеть, что путем подбора линейной комбинации вида (4.61) можно из этих решений получить $N+n-q$ линейно независимых решений однородной задачи (4.36). Кроме того, решения однородной системы (4.43) порождают $l_I - mn - p$ нетривиальных решений задачи, ибо nm — линейно независимым решениям вида (4.42) однородной системы (4.43) отвечают тривиальные решения задачи (4.36). Таким образом, мы получаем для числа l линейно независимых решений однородной задачи (4.36) формулу $l = l_I - nm - p + N + n - q$. С другой стороны, учитывая указанное выше соответствие между решениями системы (4.45′) и решениями сопряженной задачи, легко найдем, что $l' = l'_I + N - p - q$. Из этих выражений для l и l' и второй теоремы Нетера для системы (4.43): $l_I - l'_I = 2\varkappa$ найдем, что

$$l - l' = 2\varkappa - n(m-1)$$

и теорема 4.4 доказана.

Цитированная литература

[1] H. Beckert, Mathem. Nachrichten 5 (1951), 12 (1954).

[2] Б. В. Боярский, Матем. сборник, т. 43 (85): 4 (1957).

[3] — ДАН СССР 122. 4 (1958).

[4] — ДАН СССР 124. 1 (1959).

[5] — *Исследования по уравнениям эллиптического типа*, диссертация, Матем. Институт АН СССР, Москва 1960.

[6] — *Труды III всесоюзной конф. по теории функций компл. перем.*, Москва 1957.

[7] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Москва 1959.

[8] А. И. Вольперт, ДАН СССР 114. 3 (1957).

[9] A. Douglis, Communic. Pure Appl. Math. 6 (1953).

[10] И. Т. Петровский, Бюлл. МГУ, секция А, т. 1, вып. 7 (1938).

[11] — *Лекции по уравнениям в частных производных*, Москва-Ленинград 1953.

Reçu par la Rédaction le 18. 9. 1964