J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław)

O RACHUNKU OPERATORÓW

1. Celem niniejszego artykułu [1]) jest krótkie poinformowanie, czym jest *rachunek operatorów*, zwany też *rachunkiem Heaviside'a*, jakie jest obecnie stadium jego rozwoju i na czym polega nowy kierunek badań, rozwijany przez Grupę Techniczną A Państwowego Instytutu Matematycznego.

2. W równaniu różniczkowym

$$\frac{d}{dt}x + \lambda x = 1 \tag{1}$$

operator $\dfrac{d}{dt}$ traktuje się jako jeden nierozdzielny symbol; poszczególnym jego literom d, d, t nie przypisuje się samoistnego znaczenia, podobnie jak literom s, i, n w symbolu sin.

Wprowadźmy dla krótkości oznaczenie Heaviside'a $p = \dfrac{d}{dt}$. Wtedy równanie (1) można napisać w postaci

$$px + \lambda x = 1.$$

Ktoś niewtajemniczony w znaczenie symbolu p, a znający algebrę elementarną, mógłby to równanie łatwo „rozwiązać", pisząc

$$(p+\lambda)x = 1, \qquad x = \frac{1}{p+\lambda}.$$

Podobnie można „rozwiązać" równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\frac{d^2}{dt^2}x + a^2 x = 1, \tag{2}$$

---

[1]) **Artykuł ten był napisany w grudniu 1950 r., a Zastosowania Matematyki powstały w drugiej połowie 1952 r. Niektóre ustępy utraciły więc aktualność z powodu chronologii. Mimo to ogłaszamy artykuł bez uzupełnień, gdyż jego aktualność rzeczowa zachowała się. (*Redakcja*).**

wprowadzając symbol p

$$p^2x + a^2x = 1$$

i stosując prawidła algebry:

$$(p^2 + a^2)x = 1,$$

$$x = \frac{1}{p^2 + a^2}.$$

Tego rodzaju „rozwiązywanie" równań różniczkowych wydaje się na pierwszy rzut oka bezsensowną zabawą. Zobaczymy jednak, że prowadzi ono do łatwego ustalenia pewnych związków między całkami tych równań. Zauważmy mianowicie, że ostatni „ułamek" można rozbić w następujący sposób:

$$x = \frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{p - ia} - \frac{1}{p + ia}\right); \tag{3}$$

w nawiasie występują tu wyrażenia typu $1/(p + \lambda)$, a więc takie, które otrzymaliśmy przy rozwiązywaniu równania pierwszego rzędu.

Rozwiązując równanie (1) zwykłym sposobem, znajdujemy funkcję

$$x = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}),$$

jako całkę spełniającą warunek początkowy $x(0) = 0$. Ponieważ poprzednie formalne „rozwiązanie" miało postać $1/(p + \lambda)$, spróbujmy przyjąć wzór

$$\frac{1}{p + \lambda} = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}). \tag{4}$$

Gdy w szczególności $\lambda = -ia$ lub $\lambda = ia$, to konsekwentnie będziemy mieli

$$\frac{1}{p - ia} = -\frac{1}{ia}(1 - e^{iat}), \qquad \frac{1}{p + ia} = \frac{1}{ia}(1 - e^{-iat}).$$

Podstawiając to do rozwiązania (3) równania drugiego rzędu, otrzymamy

$$x = \frac{1}{2ia}\left[-\frac{1}{ia}(1 - e^{iat}) - \frac{1}{ia}(1 - e^{-iat})\right] = \frac{1}{a^2}(1 - \cos at).$$

Łatwo sprawdzić, że otrzymana w ten sposób funkcja $(1-\cos at)/a^2$ spełnia równanie (2); ponadto $x(0)=x'(0)=0$.

Okaza' się, że znajomość wzoru (4), „wyprowadzonego" z równania (1), pozwoliła znaleźć rozwiązanie równania drugiego rzędu (2). Przykład ten ilustruje metodę rachunku operatorów.

W zupełnie podobny sposób można rozwiązywać równania dowolnego rzędu. Przy tym obecna forma rachunku operatorów pozwala na znalezienie wszystkich całek równania, a nie tylko całek spełniających zerowe warunki początkowe. W bliższe szczegóły nie będziemy tu wchodzili.

Rozpatrzymy teraz inny przykład, mianowicie równanie cząstkowe

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}x+\frac{\partial}{\partial t}x=0. \tag{5}$$

Przyjmując, że $p=\dfrac{\partial}{\partial t}$, możemy to równanie napisać jako „zwyczajne"

$$\frac{d}{d\lambda}x+px=0,$$

gdzie występuje pochodna tylko względem jednej zmiennej. Znając teorię równań zwyczajnych, możemy formalnie napisać

$$x=e^{-p\lambda}\cdot f,$$

gdzie f jest dowolną funkcją zmiennej t. Stąd

$$\begin{aligned} x &= \left(1-\frac{\lambda}{1!}p+\frac{\lambda^2}{2!}p^2-\ldots\right)f= \\ &= f-\frac{\lambda}{1!}\cdot\frac{\partial}{\partial t}f+\frac{\lambda^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}f-\ldots= \\ &= f(t-\lambda). \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(t+\lambda)$ jest istotnie rozwiązaniem równania cząstkowego (5).

Korzyść z formalnego traktowania symbolu p polega tu na tym, że znajomość rozwiązania równania zwyczajnego pozwoliła znaleźć rozwiązanie równania cząstkowego.

3. Symbol p nazwał Heaviside *operatorem różniczkowym*, symbol zaś $e^{-p\lambda}$ *operatorem przesunięcia*. Terminologia ta za-

chowała się dotychczas. Czym są te operatory? Jaka jest ich matematyczna definicja? — o to Heaviside zupełnie się nie troszczył. Tym, którzy mu zarzucali, że operuje pojęciami, których sensu sam nie pojmuje, odpowiedział: „A czy mam zrezygnować ze zjedzenia obiadu tylko dlatego, że nie pojmuję dokładnie, na czym polega mechanizm trawienia?"

Istota rachunku Heaviside'a leży w tym, że na operatorze p, którego sens matematyczny na razie nas nie interesuje, wykonuje się działania tak jak na zwykłych liczbach. Z podobnymi sytuacjami spotykamy się nieraz w historii matematyki. Działania na liczbach niewymiernych wykonywano o wiele wcześniej, niż powstały teorie Dedekinda i Cantora, które tym liczbom nadały sens matematyczny. Podobnie, liczbami urojonymi i zespolonymi rachowano od dawna, mimo że dopiero Cauchy ugruntował ich teorię i podał definicję.

Możnaby się spodziewać, że rozwój rachunku Heaviside'a pójdzie tą samą drogą: że znajdzie się takie rozszerzenie pojęcia liczby, że operator różniczkowy i operator przesunięcia staną się jego szczególnymi przypadkami i że w ten sposób ugruntują się zasady rachunku. Tego rodzaju rozszerzenie pojęcia liczby jest, jak później zobaczymy, możliwe. Jednak historyczny rozwój rachunku Heaviside'a potoczył się w zupełnie innym kierunku i oparł się o teorię *transformacji Laplace'a.*

4. Przez *transformację Laplace'a* rozumiemy transformację

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt.$$

Przyporządkowuje ona pewnym funkcjom (rzeczywistym lub zespolonym) $x(t)$ zmiennej rzeczywistej t funkcje analityczne $X(s)$ zmiennej zespolonej s; powiedzieliśmy „pewnym funkcjom", gdyż oczywiście musimy się ograniczyć do funkcyj, dla których rozważana całka jest zbieżna.

Stosując transformację Laplace'a do równania różniczkowego zwyczajnego o współczynnikach stałych, przekształcamy je w równanie algebraiczne. Krótko mówiąc, tam gdzie występowała pochodna $\frac{d}{dt}x$, zjawia się po transformacji iloczyn sX, tam zaś, gdzie była druga pochodna $\frac{d^2}{dt^2}x$, zjawia się iloczyn s^2X, itd. Dzięki temu otrzymujemy równanie podobne do równań Heaviside'a, tylko zamiast operatora p występuje teraz *zmienna zespolona* s. Ale właśnie dzięki temu, że s jest zwykłą zmienną, a więc pojęciem o sprecyzowanym znaczeniu matematycznym, możemy rachować jak w zwykłej algebrze i wyliczyć X jako funkcję s. Ostatnim etapem rozwiązania jest powrót do zmiennej rzeczywistej t, co daje się uskutecznić przez transformację odwrotną do transformacji Laplace'a:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{A} e^{st}X(s)\,ds,$$

gdzie całkowanie odbywa się po odpowiedniej linii A na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s.

Rozwiązywanie równań zwyczajnych o współczynnikach stałych sprowadza się więc przez transformację Laplace'a do rozwiązania równania algebraicznego. Podobnie rozwiązanie równania cząstkowego o współczynnikach stałych można sprowadzić przez transformację Laplace'a do rozwiązania równania zwyczajnego. W ten sposób obniża się niejako stopień trudności rozwiązania, tak samo jak to się dzieje w klasycznym rachunku Heaviside'a. Charakterystyczne dla metody transformacji Laplace'a jest operowanie jednocześnie dwiema klasami funkcyj: klasą (l) funkcyj zespolonych $x(t)$ zmiennej rzeczywistej i klasą (L) funkcyj analitycznych $X(s)$ zmiennej zespolonej. Rozwiązywanie równań różniczkowych sprowadza się do trzech etapów: 1^0 przejście od klasy (l) do (L); 2^0 rozwiązanie przetransformowanego równania w klasie (L) i 3^0 powrót z klasy (L) do (l).

Oparcie rachunku operatorów na teorii matematycznej przyczyniło się do ogromnego jego rozwoju i doprowadziło do nowych zastosowań. W tej dziedzinie istnieje już bardzo bogata literatura w różnych językach. Przez wprowadzenie transformacji Laplace'a rachunek operatorów stał się precyzyjnym i pewnym narzędziem pracy.

Zatracił się jednak jego pierwotny charakter: operator różniczkowy stał się zmienną zespoloną, operator przesunięcia przeobraził się w funkcję analityczną $e^{-s\lambda}$, mimo że nazwy zostały dla tradycji zachowane.

Nadto, pewną wadą tego ujęcia jest ograniczenie rachunku do funkcyj *transformowalnych*, co zwęża zakres jego zastosowań i nie pozwala na przykład dowodzić jednoznaczności otrzymanych rozwiązań.

5. Od powyższych wad można się uwolnić wracając do bezpośredniego interpretowania symbolów Heaviside'a i nadając im sens matematyczny przez odpowiednie uogólnienie pojęcia liczby.

Weźmy najpierw pod uwagę klasę funkcyj zespolonych zmiennej rzeczywistej t, określonych i ciągłych w przedziale $0 \leqslant t < \infty$. Funkcje te będziemy zapisywali dodając na początku i na końcu klamry $\{\ \}$, na przykład $\{t^2\}$, $\{\sin t\}$, $\{a(t)\}$ itd. Funkcję stale równą jedności będziemy konsekwentnie zapisywali w postaci $\{1\}$; w ten sposób odróżnimy tę *funkcję* od *liczby* 1[2]), co dla naszego rachunku będzie miało podstawowe znaczenie.

Na rozważanych funkcjach będziemy wykonywali dwa zasadnicze działania: *dodawania* i *mnożenia*. Dodawanie wykonuje się w zwykły sposób, co można zapisać wzorem

$$\{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\},$$

dla mnożenia zaś przyjmujemy następującą definicję

$$\{a(t)\}\{b(t)\} = \left\{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau\right\} \quad {}^{3}).$$

Przykłady:

$$\{t\}\{t\} = \left\{\int_0^t (t-\tau)\tau\, d\tau\right\} = \left\{\frac{1}{6}t^3\right\};$$

$$\{t^2\}\{e^t\} = \left\{\int_0^t (t-\tau)^2 e^\tau\, d\tau\right\} = \{2e^t - t^2 - 2t - 2\};$$

$$\{1\}\{\cos t\} = \left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\} = \{\sin t\}.$$

---

[2]) Różnicę między pojęciem funkcji stałej a liczbą można poglądowo wyjaśnić faktem, że funkcję stałą przedstawiamy na rysunku jako linię *prostą*, liczbę zaś jako *punkt* (na osi liczbowej lub na płaszczyźnie zmiennej zespolonej). Rozróżnienie tych pojęć jest ważne nie tylko w rachunku operatorów, ale także w niektórych innych gałęziach współczesnej matematyki.

[3]) Wyrażenie całkowe $\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)\,d\tau$ nosi w językach obcych nazwy: *convolution* albo *resultant* (po angielsku), *produit de composition* (po francusku), *Faltung* (po niemiecku) i *свёртка* (po rosyjsku). W języku polskim zaczyna się przyjmować nazwa *splot*.

Można udowodnić, że tak zdefiniowane mnożenie ma własności zwykłego mnożenia, a mianowicie jest łączne, przemienne i rozdzielne względem dodawania. Dzięki temu wykonywane rachunki są zupełnie analogiczne do zwykłych rachunków algebraicznych.

Odejmowanie i *dzielenie* definiujemy jak zwykle: jako działania odwrotne względem dodawania i mnożenia. Odejmowanie jest zawsze wykonalne, dzielenie zaś nie zawsze. Na przykład funkcja $\{1\}$ nie da się podzielić przez siebie; gdyby bowiem wynikiem dzielenia była jakaś funkcja $\{x(t)\}$, to mielibyśmy

$$\{1\}\{x(t)\} = \{1\},$$

czyli wobec definicji *mnożenia*

$$\left\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right\} = \{1\},$$

a to jest niemożliwe, gdyż funkcja po lewej stronie równości staje się zerem dla $t=0$, funkcja zaś po prawej stronie ma stale wartość 1. Podobnych przykładów niepodzielności można by podać bardzo wiele.

Ze zjawiskiem niepodzielności spotykamy się już na elementarnym szczeblu matematyki, mianowicie w arytmetyce *liczb całkowitych.* Na przykład liczba 2 nie dzieli się przez 3. Ale zwróćmy uwagę na to, że właśnie ta *niewykonalność dzielenia jest źródłem nowego rodzaju liczb,* jakimi są ułamki. Czy nie można by więc i w naszym przypadku uogólnić pojęcie funkcji tak, żeby dzielenie w wyżej omówionym sensie było zawsze wykonalne (z wyjątkiem dzielenia przez $\{0\}$)?

Owszem, można to zrobić zupełnie podobnie jak w przypadku liczb całkowitych. Wystarczy wprowadzić *ułamki* typu

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}$$

i określić na nich dodawanie i mnożenie przez równości

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} + \frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}} = \frac{\{a(t)\}\{d(t)\} + \{b(t)\}\{c(t)\}}{\{b(t)\}\{d(t)\}},$$

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} \cdot \frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}} = \frac{\{a(t)\}\{c(t)\}}{\{b(t)\}\{d(t)\}}.$$

Ułamki tego typu nie zawsze już będą funkcjami, są one nowym pojęciem matematycznym; nazwiemy je *operatorami*. Można dowieść, że obejmują one wszystkie operatory Heaviside'a i ponadto wiele innych. W ten sposób operatory zyskują bezpośredni sens matematyczny i jednocześnie prawo obywatelstwa w rachunkach algebraicznych.

Łatwo można uzasadnić, że *ułamek*, w którym licznik i mianownik są jednakowe, należy zidentyfikować z liczbą 1:

$$\frac{\{a(t)\}}{\{a(t)\}} = 1.$$

Podobnie należy przyjąć

$$\frac{\{2a(t)\}}{\{a(t)\}} = 2, \qquad \frac{\{3a(t)\}}{\{a(t)\}} = 3$$

i ogólnie, jeżeli γ jest dowolną liczbą zespoloną,

$$\frac{\{\gamma a(t)\}}{\{a(t)\}} = \gamma.$$

Stąd wynika, że operatory są nie tylko uogólnieniem pojęcia funkcji, ale jednocześnie uogólnieniem pojęcia liczby.

6. Zauważmy, że funkcja $\{1\}$ ma tę własność, że pomnożona przez dowolną funkcję $\{a(t)\}$ powoduje jej scałkowanie

$$\{1\}\{a(t)\} = \left\{\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right\};$$

wynika to po prostu z definicji *mnożenia*. Funkcję $\{1\}$ możemy nazwać *operatorem całkowym*. Jej odwrotność nazwiemy operatorem różniczkowym i oznaczymy przez

$$s = \frac{1}{\{1\}}.$$

Operator s ma tę własność, że pomnożony przez funkcję $\{f(t)\}$ różniczkowalną i równą zeru dla $t = 0$ powoduje jej zróżniczkowanie

$$s\{f(t)\} = \{f'(t)\}.$$

Możemy to sprawdzić, pisząc

$$\frac{1}{\{1\}}\{f(t)\} = \{f'(t)\},$$

czyli

$$\{f(t)\} = \{1\}\{f'(t)\} = \left\{\int_0^t f'(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Ciekawe jest to, że tak zdefiniowany operator s można też stosować do funkcyj nieróżniczkowalnych i o dowolnej wartości w punkcie $t = 0$. Można by powiedzieć, że dzięki niemu każda funkcja, nawet nieróżniczkowalna, staje się różniczkowalna. Ten pozorny paradoks wyjaśnia się tym, że pochodna funkcji nieróżniczkowalnej nie będzie już funkcją, lecz operatorem; funkcja taka jest nieróżniczkowalna w zakresie funkcyj, różniczkowalna zaś w zakresie operatorów.

Funkcja $\{H_\lambda(t)\}$, określona przez równości

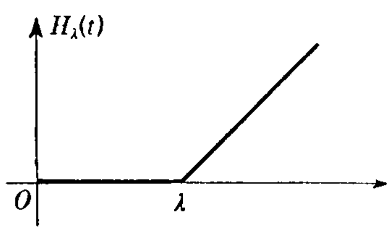
$$H_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant t < \lambda, \\ t-\lambda & \text{dla } 0 < \lambda \leqslant t, \end{cases}$$

daje po pomnożeniu przez s taką funkcję $\{h_\lambda(t)\}$, że

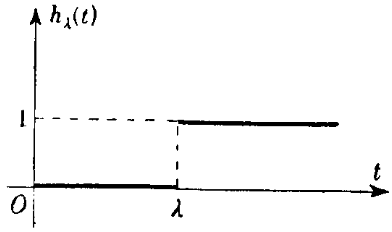
$$h_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant t < \lambda, \\ 1 & \text{dla } 0 < \lambda \leqslant t. \end{cases}$$

Mamy więc

$$\{h_\lambda(t)\} = s\{H_\lambda(t)\} = \frac{\{H_\lambda(t)\}}{\{1\}}.$$



Wykres funkcji $\{H_\lambda(t)\}$.



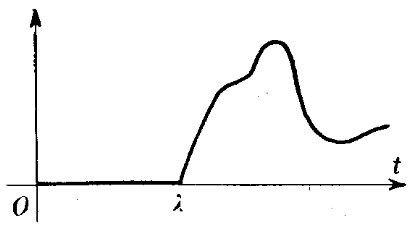
Wykres funkcji $\{h_\lambda(t)\}$.

Funkcja $\{h_\lambda(t)\}$ nosi nazwę *funkcji Heaviside'a*; jest ona nieciągła w punkcie $t = \lambda$. Mamy tu tego rodzaju przykład, że funkcja ciągła po pomnożeniu przez s staje się nieciągła. Funkcje nieciągłe są też operatorami i zostają automatycznie włączone do rachunku, mimo że punktem wyjścia teorii były wyłącznie funkcje ciągłe.

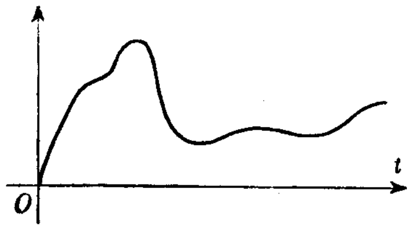
Wspomnijmy jeszcze, że mnożąc funkcję Heaviside'a jeszcze raz przez s, otrzymujemy *operator przesunięcia*

$$e^{-s\lambda} = s\{h_\lambda(t)\},$$

nie będący już funkcją. Ma on tę własność, że pomnożony przez dowolną funkcję powoduje przesunięcie jej wykresu o długość λ w dodatnim kierunku osi t.



Wykres funkcji $\{f(t)\}$.



Wykres iloczynu $e^{-s\lambda}\{f(t)\}$.

Własność tę można łatwo wyprowadzić z definicji funkcji Heaviside'a. Pominiemy tutaj dowód, jak również uzasadnienie oznaczenia $e^{-s\lambda}$.

Prócz operatorów całkowego i różniczkowego oraz operatora przesunięcia istnieje wiele innych operatorów.

7. Podstawy rachunku operatorów opartego na opisanej konstrukcji ułamkowej, zostały podane w pracy: Jan G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*[4]). Jest też w przygotowaniu obszerniejszy podręcznik, który ukaże się w języku polskim.

Rozwinięcie analizy matematycznej, w której operatory grają taką rolę jak liczby w analizie klasycznej, oto bogaty program przyszłości. Badania w tym kierunku przeprowadza się obecnie w Grupie Technicznej A Państwowego Instytutu Matematycznego.

8. Wyjaśnijmy jeszcze, jaki jest stosunek rachunku operatorów do matematyki stosowanej. Główne pole zastosowań tego rachunku stanowią równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe. Równania te są szczególnie ważne w pewnych zagadnieniach fizyki

---

[4]) Studia Mathematica 11 (1949), str. 41-70.

i elektrotechniki. Rozwiązywanie ich metodami klasycznymi (to znaczy bez użycia rachunku operatorów) prowadzi często do niewygodnych i uciążliwych rachunków. Dlatego Oliver Heaviside, inżynier angielski, dążył do stworzenia łatwego i praktycznego algorytmu, dlatego też współcześni technicy tak chętnie się nim posługują. Pierwszym celem rachunku Heaviside'a nie jest dokonywanie nowych odkryć, lecz uproszczenie i zmechanizowanie masowych rachunków, które twórczo pracujący technik spotyka w swojej codziennej pracy.

Nowe ujęcie rachunku operatorów, które wyżej naszkicowaliśmy, daje w zastosowaniach dalsze możliwości uproszczeń rachunkowych, a ponadto stwarza nową problematykę o charakterze teoretycznym. Możliwe jest, że spełni ono jeszcze inne zadanie i przyczyni się do rozwiązania nowych, nieopracowanych jeszcze zagadnień.

W odrodzonym Państwie Polskim, gdzie technika i przemysł dźwigają się z zacofania i zaniedbania, rachunek operatorów ma duże widoki rozwoju i można wierzyć, że kiedyś będzie mógł dołożyć cegiełkę w odbudowie jego dobrobytu i potęgi.

Państwowy Instytut Matematyczny

(Praca wpłynęła dnia 15. 12. 1950 r.)

И. Г.-МИКУСИНСКИЙ (Вроцлав)

ОЪ ОПЕРАТОРНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

РЕЗЮМЭ

Символ дифференцирования $\frac{d}{dt}$, или дифференциальный оператор, часто ведет себя в исчислениях как алгебраическая величина, благодаря чему можно выполнять на нем действия как на обыкновенных числах. Таким образом можно получать много новых операторов. Это свойство в большой степени использовал O. Heaviside, выполняя различные исчисления, применяющиеся в электротехнике. Исчисления эти были чисто формальны и автор не беспокоился об их математическом обосновании. Аналогически действия на иррациональных и мнимых числах

выполнялись прежде лишь формально, гораздо раньше, чем возникли теории, уточняющие математический смысл этих чисел.

Историческое развитие исчисления Heaviside'a первоначально не пошло по направлению обобщения понятия числа, лишь обосновывалось на преобразовании Лапласа. При таком подходе операторное исчисление стало прецизионным орудием исследования, но и вместе с тем потеряло свой первоначальный характер, в виду появления аналитических функций на место прежних операторов. Кроме того новый подход сузил границы применения исчисления к так называемым преобразуемым функциям.

От этих недостатков можно освободиться, возвращаясь к непосредственному интерпретированию символов Heaviside'a путем соответствующего обобщения понятия числа. Это новое обобщение охватывает не только комплексные числа и все операторы Heaviside'a, но также функции и много других математических понятий. Можно построить как алгебру, так и анализ, в которых операторы играют аналогическую роль, какую играют числа в классическом анализе.

Исчисление операторов находит широкое применение в различных отраслях техники, в особенности в электротехнике, и дает возможность упрощать много сложных исчислений.

J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław)

ON THE OPERATIONAL CALCULUS

SUMMARY

The differentiation symbol $\frac{d}{dt}$, *i. e.* the differential operator, often behaves in calculations like an algebraic quantity; consequently, it is possible to perform operations with it just as with ordinary numbers. In this way a great many of new operators are obtained. O. Heaviside made extensive use of this property to carry out various calculations applicable to electrical engineering. Those calculations were purely formal: the author was not concerned with their mathematical foundation. Similarly, operations with irrational and with imaginary numbers used to be performed only formally, long before the appearance of theories defining the mathematical sense of those numbers.

The historical development of Heaviside's calculus did not, at first, tend towards a generalization of the number concept, but was based on the Laplace transform. Treated thus, the operational calculus became a precision tool of research but lost its original character, because the place of former operators was taken in it by analytical functions. Moreover, the new treatment restricted the applicability range of the calculus to the so called transformable functions.

It is possible to avoid the above disadvantages by turning again to a direct interpretation of Heaviside's symbols by means of an appropriate generalization of the number concept. This new generalization comprises not only complex numbers and all Heaviside's operators, but also functions and many other mathematical concepts. It is possible to construct both an algebra and an analysis in which operators play the same part as that played by numbers in classical analysis.

The operational calculus has an extensive application in various branches of technical knowledge, especially in electrical engineering and makes it possible to simplify a great many cumbersome calculations.