ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1963)

Propriétés des intégrales de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique

par A. Piskorek (Warszawa)

1. Introduction. Soit D_T un domaine non cylindrique [4] à $n+1$ dimensions ($n \geqslant 2$) situé dans l'espace-temps de points $(X, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$, où X désigne un point variable de l'espace euclidien $E^{(n)}$ à n dimensions, la coordonnée du temps.

La frontière du domaine D_T est composée des domaines bornés Ω_0 et Ω_T à n dimensions dans les hyperplans $t = 0$ et $t = T$, et d'une surface latérale s_T située entre les hyperplans $t = 0$ et $t = T$.

Nous supposons que le domaine D_T est borné et la surface latérale s_T possède l'orientation du temps ([1]) par rapport à l'équation aux dérivées partielles du type parabolique:

$$(1)\quad \Psi[u(X,t)] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(X,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

où les coefficients $a_{ij}(X,t)$, $b_k(X,t)$, $c(X,t)$ sont continus dans le domaine cylindrique (produit cartésien) $\Omega \times \langle 0, T\rangle$, contenant le domaine fermé $\overline{D}_T$ dans son intérieur, et vérifient la condition de Hölder:

$$(2)\quad \begin{aligned} &|a_{ij}(X,t) - a_{ij}(Y,\tau)| \leqslant \mathrm{const}(|XY|^h + |t-\tau|^{h'}), \\ &|b_k(X,t) - b_k(Y,t)| \leqslant \mathrm{const}(|XY|^h), \qquad i,j,k = 1, \ldots, n, \\ &|c(X,t) - c(Y,t)| \leqslant \mathrm{const}(|XY|^h), \qquad 0 < h \leqslant 1, \quad 0 < h' \leqslant 1 \end{aligned}$$

où $|XY|$ désigne la distance euclidienne des deux points X et Y.

La forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\xi_i\xi_j$ est supposée définie-positive dans le domaine cylindrique $\Omega \times \langle 0, T\rangle$. Cette hypothese implique l'existence des nombres positifs a et A tels que

$$(3)\qquad 4a\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\xi_i\xi_j \leqslant 4A\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big).$$

([1]) C'est-à-dire, la surface latérale s_T n'est tangente à aucune caractéristique $t = \mathrm{const}$ de l'équation (1).

Sous les hypothèses (2) et (3) W. Pogorzelski a démontré dans le travail [1] l'existence de la solution fondamentale $\Gamma(X, t; Y, \tau)$ de l'équation (1).

A l'aide de cette solution fondamentale $\Gamma(X, t; Y, \tau)$ on peut définir les intégrales de l'équation (1), appelées potentiels généralisés relatifs à cette équation et analogues aux potentiels relatifs à l'équation du type elliptique.

W. Pogorzelski (v. [1], [2], [3]) a étudié plusieurs propriétés et établi les évaluations de ces intégrales dans le voisinage de la frontière du domaine cylindrique $\Omega \times \langle 0, T \rangle$.

Grâce à ces évaluations W. Pogorzelski (v. [2], [3]) a pu résoudre, sous des hypothèses plus générales, plusieurs problèmes aux limites pour l'équation parabolique quasi-linéaire dans le domaine cylindrique $\Omega \times \times \langle 0, T \rangle$.

Dans cet article nous établirons des évaluations des potentiels généralisés relatifs à l'équation (1) dans le voisinage de la frontière d'un domaine non cylindrique D_T et dans le article suivant nous les appliquerons à la résolution du problème aux limites pour l'équation parabolique quasilinéaire dans ce domaine non cylindrique D_T.

Par conséquent cet article est une continuation de mes articles précédents [4], [5].

L'auteur tient à remercier M. W. Pogorzelski de ses remarques au cours de la rédaction de ce travail.

2. Définitions et formules principales. Rappelons (v. [1]) que la solution fondamentale $\Gamma(X, t; Y, \tau)$ de l'équation (1) est donnée par les formules suivantes:

$$\Gamma(X, t; Y, \tau) = w^{(Y,\tau)}(X, t; Y, \tau) + \overline{w}(X, t; Y, t), \tag{4}$$

$$\overline{w}(X, t; Y, \tau) = \int_{\tau}^{t} \iiint_{\Omega} w^{(M,\theta)}(X, t; M, \theta)\Phi(M, \theta; Y, \tau)\, dM d\theta \tag{5}$$

où la fonction

$$w^{(M,\theta)}(X, t; Y, \tau) = (t-\tau)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(M, \theta)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{4(t-\tau)} \right\} \tag{6}$$

est la quasi-solution, bien connue, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux points arbitraires du domaine Ω, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $a^{ij}(X, t)$ désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice $[a_{ij}(X, t)]$, et la fonction $\Phi(X, t; Y, \tau)$ est une solution de l'équation intégrale:

$$\Phi(X, t; Y, \tau) = f(X, t; Y, \tau) - \int_{\tau}^{t} \iiint_{\Omega} N(X, t; M, \theta)\Phi(M, \theta; Y, \tau)\, dM d\theta \tag{7}$$

où l'on a:

$$N(X, t;\ M, \theta) = \left[\det\left(a^{ij}(X, t)\right)\right]^{1/2}\Psi[w^{(M,\theta)}(X, t;\ M, \theta)]\,,$$
$$f(X, t;\ Y, \tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}N(X, t;\ Y, \tau)\,.$$

Le premier terme de la somme (3) est infiniment dérivable en tout point $(X, t) \neq (Y, \tau)$ du domaine $\Omega \times \langle 0, T\rangle$ et ses dérivées d'ordre arbitraire vérifient des inégalités, que nous écrivons pour abréger de la façon suivante:

$$(8)\qquad \left|\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} w^{(M,\theta)}(X, t;\ Y, \tau)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n+2k_0+k_1+\ldots+k_n-2\mu}}$$

μ étant une constante positive arbitrairement fixée.

La solution $\Phi(X, t;\ Y, \tau)$ est définie pour tout point $X \neq Y$ du domaine Ω, et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ (v. [1], p. 41-44) et vérifie une inégalité de la forme suivante:

$$(9)\qquad |\Phi(X, t;\ Y, \tau)| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n-2\mu+2-h^*}}$$

où $h^* = \min(h, 2h')$ et μ est un nombre positif arbitrairement fixé à l'intérieur de l'intervalle $(1-\frac{1}{2}h^*, 1)$.

D'après [1], la fonction $\Gamma(X, t;\ Y, \tau)$ donnée par les formules (4), (5), (6), (7) est la solution de l'équation (1) pour tout point $X \neq Y$ du domaine Ω et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$.

Remarquons que la solution $\Gamma(X, t;\ Y, \tau)$ est bien définie pour deux points différents quelconques (X, t) et (Y, τ) du domaine D_T, puisque le domaine cylindrique $\Omega \times \langle 0, T\rangle$ contient dans son intérieur le domaine non cylindrique D_T.

Admettons que la surface latérale s_T du domaine non cylindrique D_T vérifie les conditions connues de Liapounoff (v. [4], p. 126), dont l'une, concernant l'angle (N_{P_t}, N_{Q_τ}) entre les normales intérieures N_{P_t} et N_{Q_τ} aux deux points arbitraires (P, t) et (Q, τ) de la surface s_T est de la forme suivante:

$$(10)\ (N_{P_t}, N_{Q_\tau}) = \text{const}(|PQ|^{\alpha'} + |t-\tau|^{\alpha})\,,\qquad 0 < \alpha' \leqslant 1\,,\qquad 0 < \alpha \leqslant 1\,.$$

Rappelons (v. [4], p. 125-126) que nous désignons par S_τ la variété à $n-1$ dimensions formée par l'intersection de la surface latérale s_T et du plan $t = \tau$ et par Ω_τ la variété à n dimensions, formée par l'intersection du domaine D_T et du plan $t = \tau$, pour $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

D'après les formules (4), (5), (6) et les résultats obtenus dans les travaux [1], [5], les dérivées de la solution fondamentale $\Gamma(X, t;\ Q, \tau)$ de la forme:

$$\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Gamma(X, t;\ Q, \tau)\qquad \text{pour}\qquad 2k_0+k_1+\ldots+k_n \leqslant 2$$

sont continues pour $X \neq Q$ et $0 \leqslant \tau < t < T$, où (X, t) désigne un point du domaine D_T et (Q, τ) un point de la surface s_T.

Dans ce domaine D_T on peut, en s'appuyant sur les propriétés de la solution fondamentale $\Gamma(X, t;\ Y, \tau)$, définir les intégrales suivantes de l'équation (1).

I. Le potentiel de simple couche, défini par l'intégrale

$$U(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \Gamma(X, t;\ Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dS_Q d\tau\,, \tag{11}$$

où la fonction intégrable $\varphi(Q, \tau)$ — dite densité de la couche- est définie sur la surface latérale s_T.

II. Le potentiel de charge spatiale

$$V(X, t) = \int_0^t \iiint_{\Omega_\tau} \Gamma(X, t;\ Y, \tau)\varrho(Y, \tau)\, dY d\tau\,, \tag{12}$$

où la fonction intégrable $\varrho(Y, \tau)$ — dite densité de la charge — est définie dans le domaine D_T.

III. L'intégrale de Poisson-Weierstrass

$$J(X, t) = \iiint_{\Omega_0} \Gamma(X, t;\ Y, 0) f(Y)\, dY\,, \tag{13}$$

où la fonction intégrable $f(Y)$ est définie dans le domaine Ω_0.

3. Evaluations des potentiels dérivant d'une densité non borneé. Considérons d'abord le potentiel de simple couche $U(X, t)$ dérivant de la densité non bornée $\varphi(Q, \tau)$. On a le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$, définie et intégrable sur la surface latérale s_T satisfaisant aux conditions de Liapounoff, vérifie l'inégalité:*

$$|\varphi(Q, \tau)| \leqslant \frac{M_\varphi}{\tau^{\mu_\varphi}}\,, \qquad (Q, \tau) \in s_T \tag{14}$$

où M_φ est une constante positive et μ_φ une constante non négative inférieure à l'unité, alors le potentiel de simple couche $U(X, t)$ et ses premières dérivées spatiales admettent des limitations de la forme:

$$|U(X, t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi}{t^{\mu_\varphi + \mu - 1}}\,, \tag{15}$$

$$\left| \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} U(X, t) \right| \leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi}{t^{\mu_\varphi + \mu^* - 1} |XP|^{2 - 2\mu^*}} \tag{16}$$

où $\frac{1}{2} \leqslant \mu < 1$, $k_1 + \ldots + k_n \leqslant 1$, μ^* est une constante arbitrairement choisie dans la partie commune des intervalles $\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle$ et $\langle \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\max[\frac{2}{3}, \frac{1}{2}(1 + \mu_\varphi)])$, c'est-à-dire: $\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \cap \langle \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\max[\frac{2}{3}, \frac{1}{2}(1 + \mu_\varphi)])$, et $|XP| = \min\limits_{Q \in S_t} (|XQ|)$, c'est-à-dire: P est un point de la variété S_t le plus rapproché du point X.

Démonstration. Démontrons d'abord la limitation (16). La démonstration de la limitation (15) est analogue et plus facile, c'est pourquoi nous l'omettons.

Soit t assez petit pour que les inégalités de Liapounoff (v. [4], p. 131) pour la partie σ_t^0 de la surface s_T soient vraies ([2]). Supposons que le point intérieur (X, t) du domaine D_T soit situé dans le voisinage de la surface $s_{T'}$, de sorte qu'il existe un nombre positif τ_x tel que l'on ait $(X, \tau_x) \in S_T$, c'est-à-dire $X \in S_{\tau_x}$. Supposons que $0 \leqslant \tau_x < t$, car dans le cas $\tau_x > t$ la quasi-solution $w^{(Q,\tau)}(X, t; Q, \tau)$ et ses dérivées d'ordre quelconque sont régulières.

Pour trouver l'évaluation de la dérivée première spatiale du potentiel $U(X, t)$, décomposons l'intégrale de surface sous le signe de l'intégrale simple en deux parties étendues à la portion $\sum_\tau^0$ et à la variété restante $S_\tau - \sum_\tau^0$, où $\sum_\tau^0$ désigne la portion de la variété S_τ découpée par le cylindre $W(\bar{P}, d/3)$ dont l'axe est la normale à la variété S_τ au point $\bar{P}$ et le rayon est $d/3$, conformément aux conditions de Liapounoff, où le point $\bar{P}$ est déterminé par la relation $|X\bar{P}| = \min\limits_{Q \in S_\tau} (|QX|)$ et d est la constante dont il s'agit les conditions de Liapounoff.

Nous pouvons alors écrire cette dérivées sous forme d'une somme d'intégrales:

$$U'_{x_i}(X, t) = I_1(X, t) + I_2(X, t) \tag{17}$$

où

$$I_1(X, t) = \int_0^t \iint_{\Sigma_\tau^0} \Gamma'_{x_i}(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dS_Q d\tau, \tag{18}$$

$$I_2(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau - \Sigma_\tau^0} \Gamma'_{x_i}(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dS_Q d\tau. \tag{19}$$

Remarquons qu'en vertu des formules (4), (6), (5) et des limitations (8), (9) l'intégrale $I_2(X, t)$ admet la limitation:

$$|I_2(X, t)| \leqslant \frac{\text{const}\, M_\varphi}{t^{\mu + \mu_\varphi - 1}} \tag{20}$$

où μ est choisi dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}(1 - h^*), 1\right)$. Grâce à la formule (4), on peut écrire la première intégrale $I_1(X, t)$ de la somme (17) sous la forme suivante:

$$I_1(X, t) = i(X, t) + \bar{i}(X, t) \tag{21}$$

([2]) Si t n'est pas suffisamment petit, nous décomposons le potentiel $U(X, t)$ en deux termes:

$$U(X, t) = \Big(\int_0^{t-\delta} + \int_{t-\delta}^t\Big) \iint_{S_\tau} \Gamma(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dS_Q d\tau \tag{i}$$

où δ est un nombre positif assez petit pour que les inégalités de Liapounoff soient verifiées, si $t - \delta < \tau$. Le premier terme de la somme (i) est borné et le terme restant exige des considérations plus délicates.

en posant

$$(22)\qquad i(X,t) = \int_0^t \iint_{\Sigma_\tau^0} \frac{\partial w^{(Q,\tau)}(X,t;Q,\tau)}{\partial x_i}\varphi(Q,\tau)\,dS_Q d\tau\,,$$

$$(23)\qquad \bar{i}(X,t) = \int_0^t \iint_{\Sigma_\tau^0} \frac{\partial \overline{w}(X,t;Q,\tau)}{\partial x_i}\varphi(Q,\tau)\,dS_Q d\tau\,.$$

Remarquons que, d'après les conditions de Liapounoff (v. [4], p. 126), on a les inégalités:

$$(24)\qquad 0 < \chi \leqslant \frac{|XQ|}{|XQ'|} \leqslant \chi^{-1}\,, \qquad \chi\,\mathrm{const} \leqslant \frac{|X\overline{P}|}{|X\widetilde{P}|}\,,$$

où Q' est la projection du point Q sur le plan tangent au point $\overline{P}$ de la variété S_τ, $\widetilde{P}$ — le point d'intersection de la normale à la variété S_t au point P, déterminé par la relation $|XP| = \min\limits_{Q\in S_t}(|XQ|)$, avec la variété S_τ, enfin const et χ sont des constantes positives dépendant de la surface latérale s_T.

En nous appuyant sur les conditions de Liapounoff, les formules (5), (6) et les inégalités (8), (9), (24), nous avons:

$$(25)\qquad |\bar{i}(X,t)| \leqslant \mathrm{const}\,M_\varphi \int_0^t \int_0^{d/3} \frac{r^{n-2}\,dr\,d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu\left(|X\overline{P}|^2+r^2\right)^{(n+1-2\mu-h^*)/2}}$$

où $r = |\overline{P}Q'|$, et μ est choisi dans l'intérieur de l'intervalle $\left(\frac{1}{2}(1-h^*),1\right)$.

Grâce à la représentation localement analytique de la surface latérale s_T, remarquons que pour le point $\widetilde{P}$ de la portion $\sum_\tau^0$ on obtient (v. [4], p. 127) les égalités suivantes:

$$(26)\qquad |X\widetilde{P}| = \left|\frac{\partial g\big(0,\ldots,0,\tau_x+\vartheta(\tau-\tau_x)\big)}{\partial\tau}\right||\tau-\tau_x| \qquad (0<\vartheta<1)\,,$$

$$(27)\qquad |XP| = \left|\frac{\partial g\big(0,\ldots,0,\tau_x+\theta(t-\tau_x)\big)}{\partial\tau}\right||t-\tau_x| \qquad (0<\theta<1)\,.$$

L'intégration faite, nous pouvons, en vertu de la formule (26) écrire l'inégalité (25), sous la forme:

$$(28)\qquad |\bar{i}(X,t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}\,M_\varphi}{\left(\inf\limits_\tau\left|\partial g\big(0,\ldots,0,\tau_x+\vartheta(\tau-\tau_x)\big)/\partial\tau\right|\right)^{2-2\mu-h^*}} \times \\ \times \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu|\tau-\tau_x|^{2-2\mu-h^*}}\,.$$

Choisissons la constante μ de telle manière que $\mu<1$ et $2-2\mu-h^*+$ $+\mu_\varphi<1$, c'est-à-dire choisissons μ à l'intérieur de l'intervalle $\left(\frac{1}{2}(1-h^*+\right.$ $\left.+\mu_\varphi),1\right)$; alors l'intégrale simple dans l'inégalité (28) est bornée.

Grâce à ce choix de la constante μ, l'intégrale $\bar{i}(X, t)$ admet la limitation suivante:

$$(29)\quad |\bar{i}(X,t)| \leqslant \frac{\text{const}\, M_\varphi}{\left(\inf\limits_\tau |\partial g(0, \ldots, 0, \tau_x + \vartheta(\tau - \tau_x))/\partial\tau|\right)^{2-2\mu-h^*}} \times \times \left(\frac{\tau_x^{2\mu+h^*-1-\mu_\varphi}}{(t-\tau_x)^\mu} + \frac{(t-\tau_x)^{2\mu+h^*-1-\mu_\varphi}}{(t-\tau_x)^\mu}\right)$$

où $\frac{1}{2}(1+\mu_\varphi - h^*) < \mu < 1$.

Pour trouver une limitation de l'intégrale $i(X, t)$, nous remarquons que la condition (3) implique l'existence de deux nombres positifs b et B tels que:

$$(30)\quad 4b|XY|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(Y, \tau)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \leqslant 4B|XY|^2 .$$

D'après les inégalités de Liapounoff, la formule (6), l'inégalité (30) et l'égalité (24), nous avons:

$$(31)\quad |i(X,t)| \leqslant \int_0^t \frac{\text{const}\, M_\varphi \exp\left[-\dfrac{Cb\chi^2|X\widetilde{P}|^2}{(t-\tau)}\right]}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^{n/2+1}} \left(\int_0^{d/3} r^{n-1}\exp\left[-\frac{b\chi^2 r^2}{(t-\tau)}\right]dr\right)d\tau$$

où $r = |\overline{P}Q'|$, C est la constante figurant dans la deuxième des inégalités (24).

En posant dans l'inégalité (31) sous le signe de l'intégrale intérieure:

$$(32)\quad r = \frac{1}{\chi}\left(\sqrt{\frac{t-\tau}{b}}\right)^{1/2} R$$

nous ramenons l'inégalité à la forme:

$$(33)\quad |i(X,t)| \leqslant \text{const}\, M_\varphi \left(\int_0^\infty R^{n-1}\exp(-R^2)dR\right)\int_0^t \frac{\exp\left[-\dfrac{Cb\chi^2|X\widetilde{P}|^2}{(t-\tau)}\right]}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)}d\tau .$$

Pour trouver une limitation de l'intégrale $i(X, t)$, il suffit d'évaluer l'intégrale en τ, que nous désignerons par $i(t, \tau_x)$, et que nous pouvons écrire, grâce à la relation (26), sous la forme:

$$(34)\quad i(t,\tau_x) = \frac{1}{G^{2-2\mu}}\int_0^t \frac{\left(\dfrac{G^2(t-\tau_x)^2}{t-\tau}\right)^{1-\mu}\exp\left[-\dfrac{G^2(t-\tau_x)^2}{t-\tau}\right]}{\tau^{\mu_\varphi}(\tau-\tau_x)^{2(1-\mu)}(t-\tau)^\mu}d\tau$$

où $G = \chi(bC)^{1/2}\inf\limits_\tau|\partial g(0, \ldots, 0, \tau_x - \vartheta(\tau-\tau_x))/\partial\tau|$, et μ est une constante positive non supérieure à l'unité, c'est-à-dire $0 < \mu \leqslant 1$.

Décomposons l'intégrale $i(t, \tau_x)$ en trois parties étendues aux intervalles $(0, \tau_x)$, $\left(\tau_x, \frac{1}{2}(t+\tau_x)\right)$, $\left(\frac{1}{2}(t+\tau_x), t\right)$.

Pour la première et la seconde, que nous désignons par $i_1(t, \tau_x)$ et $i_2(t, \tau_x)$, nous aurons:

$$(35)\qquad |i_1(t, \tau_x)| \leqslant \frac{\sup\limits_{\tau}(\ldots)^{1-\mu}\exp[-(\ldots)]B(1-\mu_\varphi, 2\mu-1)}{G^{2-2\mu}}\cdot\frac{\tau_x^{2\mu-\mu_\varphi-1}}{(t-\tau_x)^\mu},$$

$$(36)\qquad |i_2(t, \tau_x)| \leqslant \frac{2^{1-\mu+\mu_\varphi}\sup\limits_{\tau}(\ldots)^{1-\mu}\exp[-(\ldots)]}{(2\mu-\mu_\varphi-1)G^{2-2\mu}}\cdot\frac{(t-\tau_x)^{2\mu-\mu_\varphi-1}}{(t-\tau_x)^\mu}$$

où $\mu_\varphi+2-2\mu<1$, et $B(1-\mu_\varphi, 2\mu-1)$ est la fonction B d'Euler.

Pour limiter la troisième partie, que nous désignons par $i_3(t, \tau_x)$, nous écrivons, d'après l'inégalité de Hölder:

$$(37)\qquad |i_3(t, \tau_x)| \leqslant \frac{1}{G^{2-2\mu}}\Bigg(\int\limits_{(t+\tau_x)/2}^{t}\frac{d\tau}{(\tau-\tau_x)^{p(\mu_\varphi+2-2\mu)}}\Bigg)^{1/p}\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{(t+\tau_x)/2}^{t}\frac{\left(\dfrac{G^2(t-\tau_x)^2}{t-\tau}\right)^{q(1-\mu)}\exp\left[-\dfrac{G^2q(t-\tau_x)^2}{t-\tau}\right]}{(t-\tau)^{q\mu}}d\tau\Bigg)^{1/q}$$

où $1/p+1/q=1$ et $q>2$.

Après avoir intégré le premier facteur, en posant pour le second facteur:

$$\frac{G^2(t-\tau_x)}{1-(\tau-\tau_x)/(t-\tau_x)}=s$$

nous avons:

$$(38)\qquad |i_3(t, \tau_x)| \leqslant \left(\frac{1-2^{p(\mu_\varphi+2-2\mu)-1}}{1-p(\mu_\varphi+2-2\mu)}\right)^{1/p}\frac{\Big(\int\limits_{2G^2(t-\tau_x)}^{\infty}s^{q-2}e^{-qs}ds\Big)^{1/q}}{G^{2-2/q}(t-\tau_x)^{1+\mu_\varphi-1/q}}$$
$$\leqslant\frac{\text{const}}{(q-1)^{1/q}(t-\tau_x)^{\mu_\varphi}}.$$

En réunissant les résultats obtenus (35), (36), (38) nous aurons:

$$(39)\qquad |i(X, t)| \leqslant \frac{\text{Const}\cdot t^{2\mu-\mu_\varphi-1}}{G^{2-2\mu}(t-\tau_x)^\mu}+\frac{\text{const}\cdot t^{2\mu-\mu_\varphi-1}}{G^{2-2\mu}(t-\tau_x)^\mu}+\frac{\text{Const}\cdot t^{2\mu-\mu_\varphi-1}}{(t-\tau_x)^{2\mu-1}}$$

où $\frac{1}{2}(1+\mu_\varphi)<\mu\leqslant 1$.

D'après les résultats (29) et (39), l'intégrale $I_1(X, t)$ admet la limitation suivante:

$$(40)\qquad |I_1(X, t)| \leqslant \frac{\text{const}\,M_\varphi t^{2\mu-\mu_\varphi-1}}{G^{2-2\mu}(t-\tau_x)^\mu}.$$

En profitant maintenant de la formule (27), nous arrivons à l'inégalité:

$$(41)\qquad |I_1(X, t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} \omega_s(t, \tau_x) M_\varphi t^{2\mu-\mu_\varphi-1}}{|XP|^\mu}$$

où

$$\omega_s(t, \tau_x) = \frac{\left|\partial g(0, \ldots, 0, \tau_x + \theta(t-\tau_x))/\partial\tau\right|^\mu}{\left(\inf_\tau \left|\partial g(0, \ldots, 0, \tau_x + \vartheta(\tau-\tau_x))/\partial\tau\right|\right)^{2-2\mu}};$$

μ est une constante fixée arbitrairement dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}(1+\mu_\varphi), 1\right\rangle$.

Si μ est choisi dans l'intervalle $\left(\max\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}(1+\mu\ )\right), 1\right\rangle$, c'est-à-dire

$$(42)\qquad \max\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}(1+\mu_\varphi)\right) < \mu \leqslant 1$$

nous voyons que la fonction $\omega_s(t, \tau_x)$ est bornée pour tout τ_x.

En posant dans la limitation (41) $\mu = 2-2\mu^*$, où μ^* est choisi dans la partie commune des intervalles $\left\langle\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\max\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}(1+\mu_\varphi)\right)\right)$ et $\left\langle\frac{1}{2}, 2\right\rangle$, c'est-à-dire μ^* vérifie les inégalités:

$$(43)\qquad \tfrac{1}{2} \leqslant \mu^* < 1-\tfrac{1}{2}\max\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}(1+\mu_\varphi)\right), \qquad \tfrac{1}{2} \leqslant \mu^* \leqslant \tfrac{2}{3};$$

nous pouvons écrire:

$$(44)\qquad |I_1(X, t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi \omega t^{2-3\mu^*}}{t^{\mu^*+\mu_\varphi-1}|XP|^{2-2\mu^*}},$$

où $\omega = \sup\limits_{0\leqslant\tau_x<t} \omega_s(t, \tau_x)$.

En nous appuyant sur l'inégalité (20), nous arrivons ainsi à la limitation (16), c.q.f.d.

Remarque 1. Dans le cas $t < \tau_x \leqslant T$ (v. p. 305) les inégalités (25) et (33) donnent des limitations de l'intégrale $I_1(X, t)$ du type (16).

Remarque 2. Pour la démonstration, on peut remplacer la condition (10) par la condition plus générale:

$$(45)\qquad (N_{P_t}, N_{Q_t}) \leqslant \operatorname{const}|PQ|^{\alpha'}$$

et en demandant que la surface latérale s_T soit de classe C^1.

Remarque 3. Les valeurs limites du potentiel $U(X, t)$ et de sa dérivée transversale (v. [4], p. 128 et 136) dans le cas d'une densité continue $\varphi(Q, \tau)$, satisfaisant à la condition (14), sont valables pour $t > 0$. Les démonstrations de ces propriétés sont analogues à celles de l'article [4].

Dans le travail [3] W. Pogorzelski a établi quelques théorèmes sur le potentiel généralisé de charge spatiale dérivant d'une densité non bornée dans un domaine cylindrique $\Omega \times \langle 0, T\rangle$. Nous établirons une évaluation de ce potentiel dans le voisinage de la frontière du domaine non cylindrique D_T. Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si la densité $\varrho(Y,\tau)$ est intégrable dans tout domaine fermé situé à l'intérieur du domaine non cylindrique D_T et vérifie l'inégalité*:

$$(46)\qquad |\varrho(Y,\tau)| \leqslant \frac{M_\varrho}{\tau^{\mu_\varrho}|YQ_Y|^{\mu'_\varrho}}, \qquad (Y,\tau)\in D_T$$

où M_ϱ est une constante positive, μ_ϱ et μ'_ϱ sont des constantes non négatives, inférieures à l'unité $(0\leqslant\mu_\varrho<1,\ 0\leqslant\mu'_\varrho<1)$, Q_Y est un point de la variété S_τ le plus rapproché du point $Y(|YQ_Y| = \min\limits_{Q\in S_\tau}(|YQ|)$ et la surface s_T de Liapounoff vérifie la condition suivante:

$$(47)\qquad (N_{P_t}, N_{Q_t}) = \mathrm{const}(|PQ|+|t-\tau|^{a})$$

alors le potentiel de charge spatiale et ses premières dérivées spatiales admettent les propriétés limites suivantes:

$$(48)\qquad \lim_{X\to P}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}V(X,t) = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}V(P,t),$$

uniformément par rapport à $P\in S_t$, $t>0$ étant fixé, et les limitations suivantes:

$$(49)\qquad |V(X,t)| \leqslant \frac{\mathrm{Const}\,M_\varrho}{t^{\mu+\mu_\varrho-1}},$$

$$(50)\qquad \left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}V(X,t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}\,M_\varrho}{t^{\mu^*+\mu_\varrho-1}},$$

où $\mu'_\varrho/2\leqslant\mu<1$, $\frac{1}{2}(1+\mu'_\varrho)\leqslant\mu^*<1$, $k_1+\ldots+k_n=1$.

Démonstration. Eu égard à la densité non bornée $\varrho(Y,\tau)$ dans le voisinage de la frontière du domaine D_T on peut définir le potentiel de charge spatiale et ses dérivées premières spatiales en tout point (X,t) du domaine D_T par les intégrales singulières de la façon suivante:

$$(51)\qquad \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}V(X,t) = \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \eta\to0}}\int\limits_{\varepsilon}^{t}\iiint\limits_{\Omega_\tau^\eta}\varrho(Y,\tau)\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Gamma(X,t;\,Y,\tau)\,dY\,d\tau$$

où Ω_τ^η est l'ensemble de tous les points Y du domaine Ω_τ qui satisfont à la condition:

$$|YQ_Y|\geqslant\eta>0, \qquad |YQ_Y| = \min_{Q\in S_\tau}(|YQ|).$$

Nous désignons la frontière du domaine Ω_τ^η par S_τ^η. En vertu de la condition (47) la variété S_τ^η admet presque partout un plan tangent; en outre, grâce à la condition (47), il existe un nombre positif δ tel que les normales aux points de la variété S_τ ne se coupent pas à une distance de la variété S_τ plus petite que δ.

Nous rappelons [4] qu'en tout point $P_t = (P, t)$ de la surface s_T on peut construire un système de $n+1$ axes rectangulaires $P\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t$ (admettant le point $P_t = (P, t)$ comme origine).

Dans ce système, la représentation analytique d'une portion de la surface s_T, au voisinage du point P_t, est, d'après les conditions de Liapounoff, la suivante:

$$q_n = g(q_1, \ldots, q_{n-1}, \tau) \tag{52}$$

où la fonction $g(q_1, \ldots, q_{n-1}, \tau)$ admet des dérivées premières, vérifiant une condition de Hölder du type (47), et $q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n, \tau$ désignent les coordonnées d'un point $Q_\tau = (Q, \tau)$ de cette portion.

Per conséquent, au lieu du système rectangulaire $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ nous considérons un système curviligne $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda)$. Par rapport au système $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda)$ on peut déterminer la position du point Y, à une distance de la portion $\sum_\tau^0$, plus petite que δ, par les coordonnées $q_1, \ldots, q_{n-1}, y$, où $q_1, \ldots, q_{n-1}$ sont les coordonnées du point Q_Y par rapport au système rectangulaire $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ et y est la distance du point Y à la portion $\sum_\tau^0$, c'est-à-dire $y = |YQ_Y|$.

Donc, en vertu de la représentation analytique (52), nous avons:

$$\begin{aligned} y_i &= q_i - \frac{y \partial g(q_1, \ldots, q_{n-1}, \tau)/\partial q_i}{\sqrt{1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\partial g(q_1, \ldots, q_{n-1}, \tau)/\partial q_k\right)^2}}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \\ y_n &= g(q_1, \ldots, q_{n-1}, \tau) + \frac{y}{\sqrt{1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\partial g(q_1, \ldots, q_{n-1}, \tau)/\partial q_k\right)^2}}. \end{aligned} \tag{53}$$

Grâce à la condition (47), le déterminant $\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_{n-1}, y)}$ de cette transformation existe presque partout et par suite on a:

$$dy_1 \ldots dy_{n-1} dy_n = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_{n-1}, y)} dq_1 \ldots dq_{n-1} dy. \tag{54}$$

Pour prouver l'existence de l'intégrale (51) nous considérons l'intégrale suivante:

$$V_\eta^\delta(X, t) = \int_\varepsilon^t \iiint\limits_{\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \Gamma(X, t;\ Y, \tau) \varrho(Y, \tau) dY d\tau \tag{55}$$

et nous allons démontrer que cette intégrale est bornée pour tout ε et $\eta < \delta$.

Soit (X, t) un point intérieur fixé du domaine D_T; posons pour abréger $x(\tau) = |X\overline{P}|$. D'après le théorème de Borel, il existe une famille finie d'ensembles $\{O_\tau\}$ qui recouvre le domaine $\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta$. On peut déterminer ces ensembles de la façon suivante:

(56) $$O_\tau \cap S_\tau = \sum\nolimits_\tau^0,$$

car

(57) $$O_\tau = \{Y = (Q_Y, y) : Q_Y \in \sum\nolimits_\tau^0, \ 0 \leqslant y \leqslant \delta\}.$$

Pour démontrer l'existence de l'intégrale (51), nous considérons le cas où $k_1 + \ldots + k_n = 1$, la démonstration dans le cas restant étant analogue et plus facile.

D'après la formule (4), nous décomposons l'intégrale étudiée $V_\eta^\delta(X, t)$ en deux parties:

(58) $$V_\eta^\delta(X, t) = I_\eta^\delta(X, t) + \bar{I}_\eta^\delta(X, t)$$

où

(58') $$I_\eta^\delta(X, t) = \int\limits_\varepsilon^t \iiint\limits_{\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} w^{(Y,\tau)}(X, t;\ Y, \tau)\varrho(Y, \tau)\,dY\,d\tau,$$

(59) $$\bar{I}_\eta^\delta(X, t) = \int\limits_\varepsilon^t \iiint\limits_{\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \bar{w}(X, t;\ Y, \tau)\varrho(Y, \tau)\,dY\,d\tau.$$

En posant $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et en profitant de la limitation (30) nous avons:

(60) $$I_\eta^\delta(X,t) \leqslant \sum_{\{O_\tau\}} \int\limits_\varepsilon^t \iiint\limits_{\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta \cap O_\tau} \frac{M_\varrho \sum\limits_{j=1}^n |a^{ij}(Y, \tau)(x_i - y_j)| \exp\left[-\dfrac{b|XY|^2}{t-\tau}\right]}{2\tau^{\mu_\varrho}(t-\tau)^{n/2+1}|YQ_Y|^{\mu'_\varrho}}\,dY\,d\tau,$$

(61) $$\bar{I}_\eta^\delta(X, t) \leqslant \sum_{\{O_\tau\}} \int\limits_\varepsilon^t \iiint\limits_{\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta \cap O_\tau} \frac{\mathrm{Const}\, M_\varrho\,dY\,d\tau}{\tau^{\mu_\varrho}(t-\tau)^{\mu^*}|YQ_Y|^{\mu'_\varrho}|XY|^{n+1-2\mu^*-h^*}},$$

$\sum\limits_{\{O_\tau\}}$ désignant la sommation des intégrales étendue à tout ensemble $\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta \cap O_\tau$ pour $O_\tau \in \{O_\tau\}$ et $\frac{1}{2}(1-h^*) < \mu^* < 1$.

Pour étudier l'existence des intégrales (51) il suffit, dans les sommes figurant aux inégalités (60), (61) de considérer les intégrales étendues au domaine $\Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta \cap O_\tau$ contenant le point X.

Nous désignons ces intégrales par $J_\eta^\delta(X, t)$ et $\bar{J}_\eta^\delta(X, t)$ respectivement.

Remarquons que, d'après les conditions de Liapounoff et les formules (53), nous avons:

(62) $$|XY|^2 \geqslant C|\bar{P}Q|^2 + q_n^2 + y^2\big(1 - \cos^2(\xi_n, \bar{n}_{Q_Y})\big) + \big(x(\tau) - y\cos(\xi_n, \bar{n}_{Q_Y})\big)^2$$

où $X \in \Omega_\tau^\eta - \Omega_\eta^\delta \cap O_\tau$, $Y \in \Omega_\tau^\eta - \Omega_\tau^\delta \cap O_\tau$, C est une constante positive qui ne dépend que de la surface s_T.

Pour limiter l'intégrale $J_\eta^\delta(X, t)$ il suffit d'appliquer une transformation des variables $y_1, \ldots, y_n$ d'après les formules (53) et la limitation (62). Nous aurons alors:

$$(63)\quad |J_\eta^\delta(X,t)|$$
$$\leqslant \int_\varepsilon^t \frac{\operatorname{const} M_a M_\varrho}{\tau^{\mu_\varrho}(t-\tau)^{n/2+1}} \left\{ \int_\eta^\delta \frac{1}{y^{\mu'_\varrho}} \left[(n-1) cy \exp\left(-\frac{by^2}{t-\tau}\right) \int_0^{d/3} r^{n-1} \exp\left(-\frac{bCr^2}{t-\tau}\right) dr + \right.\right.$$
$$+ (n-1) \exp\left(-\frac{by^2}{t-\tau}\right) \int_0^{d/3} r^{n-1} \exp\left(-\frac{bCr^2}{t-\tau}\right) dr +$$
$$+ c \exp\left(-\frac{by^2}{t-\tau}\right) \int_0^{d/3} r^n \exp\left(-\frac{bCr^2}{t-\tau}\right) dr +$$
$$+ \big(x(\tau)-y\big) \exp\left(-\frac{b\big(x(\tau)-y\big)^2}{t-\tau}\right) \int_0^{d/3} r^{n-2} \exp\left(-\frac{bCr^2}{t-\tau}\right) dr +$$
$$\left.\left. + cy \exp\left(-\frac{by^2}{t-\tau}\right) \int_0^{d/3} r^n \exp\left(-\frac{bCr^2}{t-\tau}\right) dr \right] dy \right\} d\tau$$

où $r = |\bar{P}Q'_Y|$, C est la constante dont il a été question dans la relation (62), c la constante figurant dans les conditions de Liapounoff et $M_a = \sup|a^{ij}(X, t)|$.

En posant:

$$r = \varrho \sqrt{\frac{t-\tau}{bC}}, \quad y = v \sqrt{\frac{t-\tau}{b}}$$

nous aurons:

$$(64)\qquad |J_\eta^\delta(X,t)| \leqslant \int_\varepsilon^t \frac{\operatorname{Const} M_\varrho d\tau}{\tau^{\mu_\varrho}(t-\tau)^{(1+\mu'_\varrho)/2}}.$$

Si $\frac{1}{2}(1+\mu'_\varrho) \leqslant \mu^* < 1$, l'intégrale $J_\eta^\delta(X, t)$ vérifie l'inégalité suivante:

$$(65)\qquad |J_\eta^\delta(X,t)| \leqslant \int_0^t \frac{\operatorname{Const} M_\varrho d\tau}{\tau^{\mu_\varrho}(t-\tau)^{\mu^*}}.$$

Par conséquent, l'intégrale $I_\eta^\delta(X, t)$ est bornée et admet pour tout $\varepsilon, \eta < \delta$ et $t > 0$ la limitation suivante:

$$(66)\qquad |I_\eta^\delta(X,t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varrho}{t^{\mu_\varrho+\mu^*-1}}$$

où $\frac{1}{2}(1+\mu'_\varrho) \leqslant \mu^* < 1$.

Passons à l'étude de la seconde, $\bar{J}^{\delta}_{\eta}(X, t)$, des intégrales (57). En profitant de la limitation de la fonction $\overline{w}(X, t; Y, \tau)$ et des inégalités (8), (9) et (62), nous avons:

$$(67)\quad |\bar{J}^{\delta}_{\eta}(X, t)| \leqslant \int_{\varepsilon}^{t} \frac{\text{const}\, M_{\varrho}}{\tau^{\mu_{\varrho}}(t-\tau)^{\mu^{**}}} \int_{\eta}^{\delta} \frac{1}{y^{\mu'_{\varrho}}} \left[\int_{0}^{d/3} \frac{r^{n-2}dr}{(y^2+r^2)^{(n+1-2\mu^{**}-h^*)/2}}\right] dy d\tau .$$

En choisissant la constante μ^{**} dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}(1+\mu'_{\varrho}-h^*), 1\right)$, c'est-à-dire: $\frac{1}{2}(1+\mu'_{\varrho}-h^*) < \mu^{**} < 1$, nous obtenons, après l'intégration, la limitation suivante:

$$(68)\qquad |\bar{J}^{\delta}_{\eta}(X, t)| \leqslant \frac{\text{Const}\, M_{\varrho}}{t^{\mu_{\varrho}+\mu^{**}-1}} .$$

Par conséquent l'intégrale $\bar{I}^{\delta}_{\eta}(X, t)$ est bornée pour tout ε, η et $t > 0$, et admet la limitation suivante:

$$(69)\qquad |\bar{I}^{\delta}_{\eta}(X, t)| \leqslant \frac{\text{Const}\, M_{\varrho}}{t^{\mu_{\varrho}+\mu^{*}-1}}$$

où $\frac{1}{2}(1+\mu'_{\varrho}) \leqslant \mu^* < 1$.

Donc les limitations (66), (69) assurent l'existence des intégrales (51) pour $t > 0$.

Dans le cas où le point (X, t) coïncide avec le point (P, t) de la frontière du domaine D_T, la démonstration de l'existence des intégrales (51) est analogue à la démonstration donnée plus haut.

Grâce aux limitations (66), (69), on peut démontrer la formule (48) par la méthode classique de la théorie du potentiel et nous la ne reproduisons pas.

Dons, en réunissant les résultats obtenus, on arrive à la conclusion du théorème 2, c.q.f.d.

Remarque 1. Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 2 et sous la condition que la densité $\varrho(Y, \tau)$ soit continue et vérifie la condition de Hölder:

$$(70)\quad |\varrho(Y, \tau)-\varrho(\overline{Y}, \tau)| \leqslant \frac{K_{\varrho}}{\tau^{\mu_{\varrho}}}\left(\frac{1}{|YQ_Y|^{\mu'_{\varrho}}}+\frac{1}{|\overline{Y}Q_{\overline{Y}}|^{\mu'_{\varrho}}}\right)|Y\overline{Y}|^{\nu_{\varrho}}, \qquad 0 < \nu_{\varrho} \leqslant 1 ,$$

le potentiel de charge spatiale, dérivant de la densité $\varrho(Y, \tau)$, vérifie l'équation suivante:

$$(71)\qquad \Psi[V(X, t)] = -\frac{(2\sqrt{\pi})^n \varrho(X, t)}{\left(\det[a^{ij}(X, t)]\right)^{1/2}}$$

en tout point intérieur (X, t) du domaine non cylindrique D_T.

Remarque 2. Si la frontière du domaine D_T satisfait à la même hypothèse qu'au théorème 2, l'intégrale de Poisson-Weierstrass dérivant de la densité intégrable $f(X)$ satisfaisant à la condition

$$(72) \qquad |f(X)| \leqslant \frac{M_f}{|X\hat{P}|^{\mu_f}}, \quad 0 \leqslant \mu_f < 1, \quad |X\hat{P}| = \min_{Q \in S_0} (|XQ|)$$

et ses premières dérivées spatiales admettent les limitations suivantes:

$$(73) \qquad |J(X,t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} M_f}{t^{\mu}},$$

$$(74) \qquad \left| \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} J(X,t) \right| \leqslant \frac{\operatorname{Const} M_f}{t^{1/2+\mu}}$$

où $\frac{1}{2}\mu_f \leqslant \mu$, $k_1+\ldots+k_n = 1$.

La preuve de ces limitations résulte immédiatement de la démonstration du théorème 2.

Nous avons encore le théorème suivant.

Théorème 3. *Si la densité intégrable $f(X)$, satisfaisant à la condition* (72), *vérifie la condition de Hölder*:

$$(75) \qquad |f(X)-f(Y)| \leqslant K_f \left(\frac{1}{|X\hat{P}|^{\mu_f}} + \frac{1}{|YQ_Y|^{\mu_f}} \right) |XY|^{\nu_f}$$

et la frontière du domaine D_T vérifie la condition (47), *alors les dérivées premières spatiales de l'intégrale de Poisson-Weierstrass admettent les limitations*:

$$(76) \qquad \left| \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} J(X,t) \right| \leqslant \frac{\operatorname{Const}(M_f+K_f)}{t^{1/2+\mu} |XP|^{2\mu_f-2\mu}}$$

où $\mu_f/2 - \frac{1}{2}\min(h^*, \nu_f) \leqslant \mu \leqslant \mu_f/2$, $k_1+\ldots+k_n = 1$, $0 < \nu_f \leqslant 1$.

Démonstration. D'après la formule (4), nous décomposons la première dérivée spatiale de l'intégrale de Poisson-Weierstrass en deux parties:

$$(77) \qquad J_{x_i}(X,t) = j^i(X,t) + \bar{j}^i(X,t)$$

où:

$$(78) \qquad j^i(X,t) = \iiint_{\Omega_0} \frac{\partial w^{(Y,0)}(X,t;\, Y,0)}{\partial x_i} f(Y)\,dY,$$

$$(79) \qquad \bar{j}^i(X,t) = \iiint_{\Omega_0} \frac{\partial \bar{w}(X,t;\, Y,0)}{\partial x_i} f(Y)\,dY.$$

En nous appuyant sur l'étude du quasi-potentiel faite par W. Pogorzelski (v. [1], p. 34-37), nous pouvons écrire l'intégrale $j^{\cdot}(X,t)$ sous la forme suivante:

$$(80)\quad j^{\cdot}(X,t)=f(M)\iiint\limits_{\Omega_0}\frac{\partial w^{(M,0)}(X,t;\,Y,0)}{\partial x_i}dY+$$
$$+f(M)\iiint\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial w^{(Y,0)}(X,t;\,Y,0)}{\partial x_i}-\frac{\partial w^{(M,0)}(X,t;\,Y,0)}{\partial x_i}\right)dY+$$
$$+\iiint\limits_{\Omega_0}\frac{\partial w^{(Y,0)}(X,t;\,Y,0)}{\partial x_i}\big(f(Y)-f(M)\big)dY\,,$$

M étant un point du domaine Ω_0 arbitrairement fixé.

Soit la sphère K, à l'intérieur du domaine Ω_0, centrée à un point fixé X, de rayon $|X\hat{P}|$ (c'est-à-dire: $K=K(X\,|X\hat{P}|)$. En substituant, après l'application du théorème de Green à la première des intégrales (80), $M=X$ nous pouvons écrire:

$$(81)\quad j^{\cdot}(X,t)=f(X)\Big(-\iint\limits_{\partial K}w^{(M,0)}(X,t;\,Q,0)\cos(n_Q,x_i)\,dS_Q+$$
$$+\iiint\limits_{\Omega_0-K}\frac{w^{(M,0)}(X,t;\,Y,0)}{x_i}dY\Big)_{M=X}+$$
$$+f(X)\iiint\limits_{\Omega_0}\left[\frac{\partial w^{(Y,0)}(X,t;\,Y,0)}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial w^{(M,0)}(X,t;\,Y,0)}{\partial x_i}\right)_{M=X}\right]dY+$$
$$+\iiint\limits_{\Omega_0}\frac{\partial w^{(Y,0)}(X,t;\,Y,0)}{\partial x_i}\big(f(Y)-f(X)\big)dY\,,$$

où ∂K désigne la surface de la sphère K et (n_Q,x_i) l'angle que fait avec l'axe x_i la normale n_Q au point Q de la surface K.

La première des intégrales dans la somme (81) est nulle, grâce à la symétrie centrale de la fonction $w^{(X,0)}(X,t;\,Q,\tau)$, c'est-à-dire:

$$(82)\qquad j^{\cdot}_1(X,t)=0\,.$$

En appliquant le raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème 2, nous avons pour les intégrales restantes les limitations suivantes:

$$(83)\qquad |j^{\cdot}_2(X,t)|\leqslant\frac{\text{const}\,M_f}{t^{1/2-\mu^*/2}|X\hat{P}|^{\mu_f+\mu^*}}\,,\qquad 0\leqslant\mu^*\,,$$

$$(84)\qquad |j^{\cdot}_3(X,t)|\leqslant\frac{\text{Const}\,M_f}{t^{1/2-h^*/2}|X\hat{P}|^{\mu_f}}\,,$$

$$(85) \qquad |\mathring{j}_4(X,t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} K_f}{t^{1/2-\nu_f/2}|X\hat{P}|^{\mu_f}} + \frac{\operatorname{const} K_f}{t^{1/2-\nu_f/2+\mu_f/2}},$$

$$(86) \qquad |\bar{\mathring{j}}(X,t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} M_f}{t^{1/2-h^*/2+\mu_f/2}}.$$

En rapprochant les résultats obtenus (82), (83), (84), (85) et (86), on arrive à la conclusion (76) du théorème 3, c.q.f.d.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 5, Napoli 1956, p. 25-57.

— *Problème généralisé aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 9, Napoli 1960, p. 143-176.

[3] — *Sur certaines propriétés des intégrales analogues aux potentiels et un problème aux limites pour l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica 10, Napoli 1961, p. 173 213.

[4] A. Piskorek, *Propriétés d'une intégrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), p. 125-137.

[5] — *Dérivation d'une intégrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique*, Ann. Polon. Math. (sous presse).

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1961