ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIV (1984)

Sur les formes différentielles fermées à coefficients différentiables mais non continûment différentiables

par Pierre Henry Krief (Marseille)

Résumé. On obtient, à l'aide du lemme de recouvrement maximal, l'assimilation à un courant fermé d'une forme différentielle à coefficients différentiables et fermée même lorsque cette forme n'est pas de classe C^1. Ceci permet de compléter dans ce cas l'énoncé classique du lemme de Poincaré sur l'existence de primitives locales de formes différentiables fermées.

1. Introduction. Soit ω une p-forme différentielle définie sur un ouvert étoilé X de $\boldsymbol{R}^n$. Si ω est de classe C^1 et fermée, le lemme de Poincaré lui associe une $p-1$ forme de classe C^1 dont la différentielle extérieure $d\alpha$ vaut ω sur X. On s'intéresse ici au cas où ω est supposée seulement différentiable, mais non continument différentiable. D. Spring a montré [5] qu'on peut encore associer à une 1-forme ω différentiable et fermée, une fonction α de classe C^1 qui en est une 0-forme primitive. Rappelons que cette propriété intervient dans la théorie élémentaire des fonctions holomorphes (lemme de Goursat): Si f est une fonction $\boldsymbol{C}$-différentiable sur un ouvert X du plan complexe, autrement dit si la forme $f(z)\,dz$ est différentiable et fermée, alors f est une fonction analytique dans X ([1], p. 70).

Il est clair[1] cependant que pour établir le résultat de Spring, il suffit d'obtenir une fonction α continue qui admette les coefficients de la forme ω comme dérivées partielles au sens des distributions. Sous cet aspect, l'énoncé se généralise aux p-formes. On obtient ici:

Théorème 1. *Etant donnée une p-forme ω sur un ouvert étoilé X de $\boldsymbol{R}^n$ différentiable et fermée, il existe une $p-1$ forme α continue telle que dans l'espace $\mathscr{D}'(X)$ des courants sur X on ait $d\alpha = \omega$ (ou encore, ici, et de façon équivalente, $d\alpha = \omega$ au sens de la formule de Stokes classique).*

Soit $\omega = \sum a_I\,dx^I$ une forme différentielle à coefficients différentiables sur X (I désigne un multi-indice $(i_1, \ldots, i_p)$ et dx^I désigne $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$). Il y a lieu a priori de distinguer les deux notions suivantes:

(a) On dira que ω est une *forme fermée* lorsque pour tout $x \in X$ on a

$$\sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}(x)\,dx_j \wedge dx^I = 0$$

[1] [4], p. 57, Théorème V, 2°.

les dérivées étant prises au sens usuel: on écrira $\{d\omega\}(x) = 0$ pour tout x.

(b) On dira que ω définit un *courant fermé* (ou bien que ω est *fermée au sens des courants*) si, au sens des courants, $d\omega = 0$, c'est-à-dire si

$$\sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx^I = 0;$$

les dérivées étant prises au sens des distributions.

Ces deux notions sont évidemment indistinctes lorsque ω est de classe C^1. La remarque suivante montre que pour obtenir le théorème 1, il suffira d'établir qu'une forme différentiable fermée définit un courant fermé.

Remarque. Soit ω une p-forme continue sur l'ouvert X étoilé par rapport à x_0. Si le courant ω, défini par $\langle\omega, \varphi\rangle = \int \omega \wedge \varphi$ (où $\varphi \in C_0^\infty(X)$ est une forme à support compact dans X de classe C^∞) est fermé, alors il existe dans X une $p-1$ forme continue α telle que, au sens des courants, on ait $d\alpha = \omega$.

En effet, soit (φ_m) une approximation de l'identité dans $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ formée de fonctions de classe C^∞ à supports compacts dont les diamètres tendent vers 0 quand m tend vers l'infini.

Les courants $\omega * \varphi_m$ sont fermés puisque $d(\omega * \varphi_m) = (d\omega) * \varphi_m = 0$. Comme ce sont des p-formes de classe C^∞, la formule de Cartan ([2], p. 43) donne la suite de formes de classe C^∞, α_m, définies par

$$\alpha_m(x;\ \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) = \int_0^1 t^{p-1}(\omega * \varphi_m)\big(x_0 + t(x-x_0);\ x-x_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}\big)dt$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \boldsymbol{R}^n$, comme primitives des $\omega * \varphi_m$.

De même que $(\omega * \varphi_m)_m$, la suite $(\alpha_m)_m$ converge uniformément sur tout compact de X; sa limite α est une $p-1$ forme continue telle que, pour toute $\psi \in C_0^\infty(X)$,

$$\langle d\alpha, \psi\rangle = \langle\alpha, {}^t d\psi\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle\alpha_m, {}^t d\psi\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle d\alpha_m, \psi\rangle = \langle\omega, \psi\rangle$$

($C_0^\infty(X)$ désigne les formes de classe C^∞ à support compact dans X, ${}^t d$ l'opérateur bord sur les formes).

2. Points de densité d'une distribution. On désigne par $B(x, \varrho)$ la boule de centre x de rayon ϱ dans $\boldsymbol{R}^n$, par D l'opérateur de dérivation des applications définies dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs dans un espace normé.

Etudions le comportement du courant $d\omega$ lorsque ω est une p-forme définie sur l'ouvert X différentiable et fermée. Fixons $x \in X$ et notons $\mathscr{R}_x$ la forme suivante

$$\mathscr{R}_x\colon\ \xi \to \mathscr{R}_x(\xi) = \omega(\xi) - \omega(x) - D\omega(x)\cdot(\xi - x).$$

Puisque la forme ψ: $\xi \to \omega(\xi) - \mathscr{R}_x(\xi)$ est une fonction affine de ξ, sa différentielle est constante; elle vaut

$$d\psi = \sum_i dx_i \wedge \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \{d\omega\}(x) = 0.$$

Donc, dans l'espace des courants sur X, $\mathscr{D}'(X)$, on a $d\mathscr{R}_x = d\omega$. Si φ est une forme différentielle de classe C^∞ à support dans $B(x, r)$ il vient,

$$|\langle d\omega, \varphi\rangle| = |\langle \mathscr{R}_x, {}^t d\varphi\rangle| \leqslant \int \|\mathscr{R}_x \wedge {}^t d\varphi\|$$

$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{B(x,r)} \frac{\|\mathscr{R}_x(\xi)\|}{|\xi - x|} \|D\varphi\|_\infty \int\limits_{B(x,r)} |\xi - x| \, d\xi.$$

En particulier, si I (respectivement I_0), est un multi-indice ordonné $j_1 < j_2 < \ldots < j_{p+1}$, de longueur $p+1$, il vient, en notant $d\omega = \sum_{|I| = p+1} \varrho_I dx$ et $\varphi_0 = \psi_0 dx^{I_0}$ où ψ_0 est une fonction indéfiniment différentiable à support dans $B(x, r)$,

$$|\langle \varrho_{I_0}, \psi_0\rangle| \leqslant r \operatorname{vol}(B(x, r)) \|D\psi_0\|_\infty \operatorname*{Sup}_{B(x,r)} \frac{\|\mathscr{R}_x(\xi)\|}{|\xi - x|}$$

(pour tout multi-indice ordonné I_0 de longueur $p+1$). On remarque ainsi que les coefficients du courant $d\omega$ sont des distributions qui possèdent la propriété suivante:

Propriété (*). $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \operatorname{Supp} U$, $\exists r_x^\varepsilon > 0$, $\forall 0 < r \leqslant r_x^\varepsilon$, $\forall \psi \in C_0^\infty(B(x, r))$

$$|\langle U, \psi\rangle| \leqslant \varepsilon \|D\psi\|_\infty r^{n+1}.$$

On pose la définition suivante:

Définition. Soit U une distribution sur un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$. On dit que x est un *point de densité* de la distribution U si et seulement si pour tout $m \geqslant 1$, il existe une fonction indéfiniment différentiable à support dans la boule centrée en x de rayon m^{-1} telle que $\|D\varphi_m\|_\infty \leqslant m^{n+1}$ et telle que cependant la suite $\langle U, \varphi_m\rangle$ ne tende pas vers zéro quand m tend vers l'infini.

La propriété (*) caractérise les distributions qui n'ont aucun point de densité. En fait, on va même voir que:

Proposition 1. *Toute distribution sans point de densité est nulle.*

La démonstration de la proposition 1 est donnée au paragraphe 4.

D'après ce qui précède, un corollaire immédiat de la proposition 1 est donc la

Proposition 2. *Si ω est une p-forme différentiable et fermée sur un ouvert X de $\boldsymbol{R}^n$, le courant qu'elle définit sur X est un courant fermé.*

En effet, chaque coefficient du courant $d\omega$ est une distribution sans point de densité.

La remarque de l'introduction permet de déduire le théorème 1 de la proposition 2. Nous consacrons le paragraphe 3 à un lemme préliminaire.

3. Un lemme de partition de l'unité sur un compact de R^n.

LEMME 1. *On peut associer à tout recouvrement fini d'un compact K par des boules $B(x_m, \varrho_m)$ une partition de l'unité sur K en fonctions φ_m positives de classe C^∞ à supports dans les boules de rayon quadruple $B(x_m, 4\varrho_m)$ et qui vérifient pour tout m*

$$\|D\varphi_m\|_\infty \leqslant 2\varrho_m^{-1}.$$

Démonstration. On ordonne le recouvrement par rayon décroissant avec l'indice. Soit $K \subset \bigcup_{m=1}^{N} B(x_m, \varrho_m)$ et $\varrho < \min_{m \leqslant N} \varrho_m$. On définit pour tout $m \leqslant N$ la fonction $\tilde{\chi}_m(x)$ qui vaut 1 si $|x-x_m| \leqslant 2\varrho_m$, 0 si $|x-x_m| \geqslant 3\varrho_m$ et $-\varrho_m^{-1}|x-x_m|+3$ si $|x-x_m| \in [2\varrho_m, 3\varrho_m]$. Il est évident que la fonction $\tilde{\chi}_m$ est lipschitzienne de rapport ϱ_m^{-1} et que $\operatorname{Supp} \tilde{\chi}_m \subset \overline{B(x_m, 3\varrho_m)}$. Soit $\chi_1 = \tilde{\chi}_1$ et supposons définies $\chi_2, \ldots, \chi_{m-1}$ de sorte que si $g_j = \sum_{i=1}^{j} \chi_i$ on ait $\forall j \leqslant m-1$, et $\forall x, y \in X$, $|g_j(x)-g_j(y)| \leqslant \varrho_j^{-1}|x-y|$. Soit alors $g_m = \operatorname{Sup}(g_{m-1}, \tilde{\chi}_m)$ et $\chi_m = g_m - g_{m-1}$. Pour tout x, tout y de X on a:

$$|g_m(x)-g_m(y)| \leqslant \varrho_m^{-1}|x-y| \quad \text{et} \quad |\chi_m(x)-\chi_m(y)| \leqslant 2\varrho_m^{-1}|x-y|$$

puisque $\varrho_{m-1} \geqslant \varrho_m$.

Soit alors $\alpha \in C_0^\infty(B(0, \varrho))$ une fonction positive d'intégrale 1 ne dépendant que de $|x|$.

Puisque $g_m = \sup_{1 \leqslant j \leqslant m} \tilde{\chi}_j \leqslant 1$ vaut 1 sur $\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, 2\varrho_j)$, $f_m = g_m * \alpha \leqslant 1$ est de classe C^∞ et vaut 1, au moins sur $\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, 2\varrho_j - \varrho)$ qui contient $\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varrho_j)$.

Puisque $\chi_m = \operatorname{Sup}(g_{m-1}, \tilde{\chi}_m) - g_{m-1}$ est à support dans $\overline{B(x_m, 3\varrho_m)}$, $\varphi_m = \chi_m * \alpha$ est à support dans $\overline{B(x_m, 3\varrho_m + \varrho)} \subset B(x_m, 4\varrho_m)$.

De même que l'on a $0 \leqslant \chi_m \leqslant 1$, on a $0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1$ et $\sum_{m=1}^{N} \varphi_m = f_N$ vaut 1 sur $\bigcup_{m=1}^{N} B(x_m, \varrho_m)$ qui recouvre K. Puisque χ_m est lipschitzienne de rapport $2\varrho_m^{-1}$, il en est de même de $\varphi_m = \chi_m * \alpha$, par suite $\|D\varphi_m\| \leqslant 2\varrho_m^{-1}$.

4. Démonstration de la proposition 1. Il existe pour tout ouvert de R^n une partition de l'unité de classe C^∞ à support compact et si $\psi \in C_0^\infty(R^n)$, ψU n'admet de point de densité que parmi ceux de U.

On peut donc se limiter à la démonstration de la proposition 1 pour une distribution U à support compact K. On choisit alors Ω un voisinage ouvert relativement compact de K dont la mesure de Lebesgue vérifie $m(\Omega) \leqslant \operatorname{Sup}(2m(K), 1)$. On suppose enfin que U vérifie la propriété $(*)$. Soit $\varepsilon > 0$, pour chaque $x \in \operatorname{Supp} U = K$ on choisit r_x^ε vérifiant de plus $r_x^\varepsilon < \inf(d(x, C\Omega), 1)$. Considérons le recouvrement de K par les boules $B(x, r_x^\varepsilon/20)$. Le lemme maximal, [6], p. 9–10, permet d'affirmer puisque K est compact l'existence d'une famille finie de boules disjointes notées $(B(x_m, r_{x_m}^\varepsilon/20))_{1 \leqslant m \leqslant N}$ incluses dans Ω donc telles que

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant N} \operatorname{vol}(B(x_m, r_{x_m}^\varepsilon/20)) \leqslant m(\Omega) \leqslant \operatorname{Sup}(2m(K), 1)$$

et telles que les boules de rayon quadruple $(B(x_m, r_{x_m}^\varepsilon/4))_{1 \leqslant m \leqslant N}$ recouvrent K.

A un tel recouvrement, le lemme 1 associe une partition de l'unité sur K par des fonctions $\varphi_m \in C_0^\infty(B(x_m, r_{x_m}^\varepsilon))$ telles que $\|D\varphi_m\| \leqslant 2(r_{x_m}^\varepsilon)^{-1}$.

Alors pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, il vient, en remarquant que $\|D(\varphi_m \psi)\|_\infty \leqslant \|D\varphi_m\|_\infty \|\psi\|_\infty + \|D\psi\|_\infty$ d'après la propriété $(*)$:

$$|\langle U, \psi\rangle| \leqslant \sum_{m=1}^{N} |\langle U, \varphi_m \psi\rangle| \leqslant \varepsilon \{2\|\psi\|_\infty + \operatorname*{Sup}_{1 \leqslant m \leqslant N} (r_{x_m}^\varepsilon)\|D\psi\|_\infty\} \sum_{m=1}^{N} (r_{x_m}^\varepsilon)^n$$

soit

$$|\langle U, \psi\rangle| \leqslant \varepsilon \frac{2\cdot(20)^n}{\operatorname{vol}(B(0, 1))} (\|\psi\|_\infty + \|D\psi\|_\infty) \operatorname{Sup}(2m(K), 1).$$

Donc $|\langle U, \psi\rangle| \leqslant C\varepsilon(\|\psi\|_\infty + \|D\psi\|_\infty)$ où la constante C ne dépend que du compact K. Donc U est nulle.

5. Généralisation. Si l'on examine la démonstration du théorème 1, on voit qu'en fait c'est un résultat élémentaire plus général qui est établi.

THÉORÈME 2. *Etant donnés n entiers positifs p_i, n fonctions continues V_i différentiables jusqu'à l'ordre p_i dans l'ouvert X de $\boldsymbol{R}^n$ et n opérateurs différentiels D_i d'ordre p_i (au plus) à coefficients C^∞ tels que pour tout $x \in X$ on ait $\sum_{i=1}^{n} D_i V_i(x) = 0$ alors dans l'espace des distributions sur X on a $\sum_{i=1}^{n} D_i V_i = 0$.*

Quitte à regrouper des termes, le problème revient à considérer $n+1$ fonctions continues $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que les n dernières soient différentiables et vérifient pour tout $x \in X$ l'équation

$$U_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_i(x) = 0.$$

Le théorème découle donc du

Lemme 2. *Etant données $n+1$ fonctions continues $U_0, U_1, \ldots, U_n$ dont les n dernières sont différentiables: Si $\forall x \in X$ on a*

$$U_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_i(x) = 0$$

alors dans l'espace des distributions sur X on a

$$U_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_i = 0.$$

Démonstration. On pose $R_x^i(\xi) = U_i(\xi) - U_i(x) - DU_i(x) \cdot (\xi - x)$ et

$$N = U_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_i.$$

Pour tout $x \in X$, tout $\varepsilon > 0$, il existe r_x^ε tel que pour tout $\xi \in B(x, r_x^\varepsilon)$ on ait: $|U_0(\xi) - U_0(x)| < \varepsilon$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $|R_x^i(\xi)| \leqslant \varepsilon |\xi - x|$. Pour toute $\psi \in C_0^\infty(B(x, r_x^\varepsilon))$ on a

$$\begin{aligned}\langle N, \psi \rangle = \langle U_0, \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle U_i, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle = \langle U_0, \psi \rangle - \Bigg\{ \sum_{i=1}^{n} \left\langle R_x^i, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle + \\ + \sum_{i=1}^{n} U_i(x) \left\langle 1, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle + \sum_{\substack{i=1 \\ l=1}}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \left\langle \xi_l - x_l, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle \Bigg\}\end{aligned}$$

soit

$$\langle N, \psi \rangle = \langle U_0 - U_0(x), \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle R_x^i, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

D'où il suit que N a la propriété $(*)$ du paragraphe 3 et donc que N est nulle, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. On peut evidemment se poser la question de l'existence d'une solution de l'équation $d\alpha = \omega$ lorsque ω n'est même pas supposée différentiable, mais, seulement, a des dérivées partielles vérifiant en tout $x \in X$, $\sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx^I = 0$. Voir à ce sujet [3] et l'abondante litterature citée dans cet article.

Bibliographie

[1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris 1961.

[2] –, *Formes différentielles*, Hermann, Paris 1967.

[3] J. D. Gray, S. A. Morris, *When is a function that satisfies the Cauchy–Riemann equation analytic*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 246–256.

[4] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris 1966.
[5] D. Spring, *Le lemme de Goursat*, Primaths n° 1 nov. 79 publication de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Provence.
[6] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

U. E. R. MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, MARSEILLE, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 28. 11. 1980.