ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Über die linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus $[m, n, 1]$, wo $m \leqslant n$ ist

von M. Kucharzewski (Katowice) und A. Zajtz (Kraków)

§ 1. Einleitung. Die linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse sind diese, die bei der Transformation des Koordinatensystems

$$\xi^{i'} = \varphi^{i'}(\xi^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

folgende Transformationsregel

$$\omega^{a'} = F^{a'}_{a}(A^{i'}_{i})\,\omega^{a}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m \tag{1.1}$$

aufweisen, wo $\omega(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ bzw. $\omega'(\omega^{1'}, \ldots, \omega^{m'})$ die Komponenten dieses Objektes in dem Koordinatensystem (ξ^i) bzw. $(\xi^{i'})$ und $A^{i'}_{i}$ die ersten partiellen Ableitungen von $\xi^{i'}$ hinsichtlich ξ

$$A^{i'}_{i} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{i}}$$

bedeuten (vgl. [1], S. 12-15, 79). Die Beziehung (1.1) kann auch in der Matrizenform

$$\omega' = F(A)\,\omega \tag{1.2}$$

geschrieben werden. Dann sind ω' bzw. ω die einspaltigen Matrizen $\|\omega^{a'}\|$ bzw. $\|\omega^{a}\|$ und $A, F(A)$ die quadratischen Matrizen entsprechend der Ordnung n, m.

Das Objekt ω nennen wir das *J-Objekt*, wenn die Matrixfunktion F nur von der Jacobischen Determinante J der Matrix A

$$J = \operatorname{Det}\left\|\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{i}}\right\| = \operatorname{Det} A$$

abhängt. Also F ist in diesem Falle eine Matrixfunktion der skalaren Veränderlichen J (vgl. [1], S. 47)

$$F(A) = G(J)\,. \tag{1.3}$$

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit zwei Problemen. Erstens zeigen wir, daß es außer den J-Objekten keine linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse geben, wenn $m < n$ ist. Zweitens bestimmen wir alle linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse für $m = n$ ohne auf die Äquivalenz dieser einzugehen. Das heißt, daß wir nur alle möglichen Transformationsformeln solcher Objekte bestimmen. Mit der Äquivalenz der hier bestimmten Objekte beschäftigen wir uns in einer anderen Arbeit.

Der spezielle Fall dieser Probleme für $m = 1$ und n beliebig folgt unmittelbar aus den Ergebnissen der Arbeit [4]. Der Fall $m = 2 = n$ wurde von M. Kucharzewski und M. Kuczma in [6] und [7] gelöst. Hier wollen wir den allgemeinen Fall wenn m und n beliebig sind, angreifen.

Um die Komponenten des Objektes in jedem zulässigen Koordinatensystem eindeutig zu bestimmen, muß die Funktion F in (1.2) folgende Funktionalgleichung

$$F(X)F(Y) = F(XY) \tag{1.4}$$

für beliebige nichtsinguläre Matrizen X, Y erfüllen.

Um alle linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse zu bestimmen, muß man also die Funktionalgleichung (1.4) lösen. Deswegen werden wir im weiteren die Lösungen dieser Funktionalgleichung suchen. Darauf beruht unsere Bestimmungsmethode derartigen Objekte.

Außerdem muß F auch der Bedingung

$$F(E) = e \tag{1.5}$$

genügen, wo E bzw. e die Einheitsmatrix der Ordnung n bzw. m ist. Aus (1.4) und (1.5) folgt, daß die Werte von F nichtsingulären Matrizen darstellen. F ist also ein Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$. Deshalb werden wir im weiteren über Gruppen und Homomorphismen sprechen und ihre Eigenschaften benutzen.

Die Arbeit besteht aus vier Paragraphen. Im ersten ist der Ziel der Arbeit und sind einleitende Begriffe dargestellt. Im zweiten geben wir einige Hilfssätze aus der Gruppen und Matrizentheorie an, die im weiteren nötig sind. Im dritten beschäftigen wir uns mit der Bestimmung der linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse, derer Komponentenzahl m kleiner als Dimension n des Raumes ist $m < n$. Es ergibt sich, daß die einzigen Objekte dieser Art, die J-Objekte sind. Im vierten Paragraphen sind alle Objekte bestimmt, derer Anzahl der Komponenten der Dimension des Raumes gleich ist $m = n$.

§ 2. Einige Hilfssätze aus der Gruppen- und Matrizentheorie. Wir führen zuerst einige Bezeichnungen ein. Mit E bzw. e werden wir die Einheitsmatrix der Ordnung n bzw. m bezeichnen. Mit $B_{ij}(a)$,

$i \neq j$, bezeichnen wir die Matrix, welche ensteht, wenn man die in der i-ten Reihe und j-ten Spalte der Einheitsmatrix stehende Null mit a ersetzt

$$B_{ij}(a) = \|\delta_{ik} + a\delta_{il}\delta_{kj}\| \,.$$

Jetzt geben wir ohne Beweis zwei folgende Hilfssätze an:

HILFSSATZ 2.1. *Beliebige zwei Matrizen $B_{ij}(a)$, $a \neq 0$, und $B_{kl}(\beta)$, $\beta \neq 0$, sind untereinander ähnlich, d.h. für diese Matrizen gibt es stets eine nichtsinguläre Matrix C, welche die Relation*

$$B_{kl}(\beta) = CB_{ij}(a)\,C^{-1}$$

erfüllt.

Wir werden mit

$$\{a_{11} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{nn}\}$$

eine Diagonalmatrix bezeichnen, welche auf der Hauptdiagonale die Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ hat.

HILFSSATZ 2.2. *Jede nichtsiguläre Matrix A kann in der Form*

$$A = BD$$

dargestellt werden, wo B das Produkt gewisser Anzahl der Matrizen $B_{ij}(a)$ und D nachstehende Diagonalmatrix

$$D = \{1 \quad 1 \quad \ldots \quad \mu\}$$

ist.

Dieser Hilfssatz ist in [2], S. 152 vollständig bewiesen.

Bemerkung 2.1. Da die Determinante der Matrix $B_{ij}(a)$ gleich 1 ist, muß auch dasselbe für das Produkt beliebiger Anzahl von Matrizen dieser Art gelten. Infolgedessen ist μ der Determinante von A gleich.

Weiterhin geben wir einen Hilfssatz über die invarianten Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe an. Zuerst müssen wir noch einige Definitionen einführen. Wir werden mit $GL_n(R)$ die allgemeine lineare Gruppe über den Körper der reellen Zahlen R bezeichnen, d.h. die multiplikative Gruppe der quadratischen Matrizen der Ordnung n mit den Elementen aus R. Die Untergruppe dieser Gruppe, die aus allen Matrizen mit der Determinate 1 besteht, bezeichnen wir mit $SL_n^+(R)$. Wir nennen sie eigentliche unimoduläre Untergruppe von $GL_n(R)$.

HILFSSATZ 2.3. *Ist G eine invariante Untergruppe von $GL_n(R)$ und enthält sie eine der Matrizen $B_{ik}(a)$, $a \neq 0$, so enthält sie auch ganze eigentliche unimoduläre Untergruppe $SL_n^+(R)$.*

Beweis. Ist G eine invariante Untergruppe und besitzt sie die Matrix $B_{ik}(a)$, so enthält sie auch infolge des Hilfssatzes 2.1 eine jede dieser Matrizen. Also sie muss auch jedes Produkt dieser Matrizen enthalten. Auf Grund des Hilfssatzes 2.2 kann man jede unimoduläre eigentliche Matrix A in der Form $A = BE = B$ darstellen. Diese muß also auch zur G gehören und unser Hilfssatz ist auf diese Weise bewiesen.

Wir verstärken noch den letzten Hilfssatz. Zuerst müssen wir aber den Begriff der zentrallen Untergruppe erklären.

Die Menge aller nichtsingulären Matrizen Z, die mit allen Matrizen X von $GL_n(R)$ vertauschbar sind

$$XZ = ZX$$

bilden eine Gruppe. Wir nennen sie *Zentrum* von $GL_n(R)$. Das Zentrum bezeichnen wir mit Z_n. Z_n besteht aus allen skalaren Matrizen

$$\{\lambda \quad \lambda \quad \ldots \quad \lambda\}, \qquad \lambda \neq 0\,,$$

d.h. Diagonalmatrizen, in denen die auf der Hauptdiagonale stehende Elemente untereinander gleich sind. Jede Gruppe, die in Zentrum enthalten ist, nennen wir zentralle Untetgruppe.

HILFSSATZ 2.4. *Ist G eine invariante Untergruppe von $GL_n(R)$ und enthält sie eine Matrix A, die nicht zum Zentrum gehört, so enthält sie auch ganze eigentliche unimoduläre Gruppe $SL_n^+(R)$* (vgl. [2], S. 165, Theorem 4.9).

Dieser Hilfssatz ist in [2] im Falle nichtkomutativen Körper bewiesen. In unserem Falle geben wir einen anderen Beweis an.

Beweis. Es sei G eine Gruppe, die die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes erfüllt. In G gibt es also eine nichtskalare Matrix. Dann muß die Gruppe G auch eine Matrix A enthalten, die zur nichtdiagonalen Matrix ähnlich ist. Andernfalls müßte G keine invariante Gruppe sein. Da G invariant ist, muß jede zur A ähnliche Matrix auch zu G gehören. Insbesondere gehört jede kanonische Darstellung der Matrix A zur G. Darum kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A die zweite kanonische Form (vgl. [3], S. 127) hat. Da A nichtdiagonal ist, gibt es in der Folge der invarianten Faktoren von A wenigstens ein von dem Grade $p \geqslant 2$. Bezeichnen wir mit K den diesem Faktor entsprechenden Block in A, so kann A in der folgenden quasidiagonalen Form

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} K & \\ \hline & L \end{array} \right\|$$

geschrieben werden, wo K die nachstehende Matrix

$$K = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & & & -a_1 \end{matrix} \right\|$$

ist. Wir betrachten zwei Fälle: $p \geqslant 3$ und $p = 2$.

I. $p \geqslant 3$. Die zu K inverse Matrix K^{-1} hat die Form

$$K^{-} = \begin{Vmatrix} \beta_{p-1} & \beta_{p-2} & \dots & \beta_1 & \beta_p \\ 1 & 0 & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

wo $\beta_j = -a_j/a_p$, $j = 1, 2, \dots, p-1$, und $\beta_p = -1/a_p$ gleich sind.

Multiplizieren wir die zweite Reihe und zweite Spalte der Matrix A durch -1, so erhalten wir eine zu A ähnliche Matrix $\tilde{A}$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß

$$\underset{1}{A} = \tilde{A}A^{-1}$$

folgende Form

$$\underset{1}{A} = \tilde{A}A^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ -2a_{p-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

hat und auch zur G gehören muß. Die Matrix $\underset{1}{A}$ ist zu den Matrizen

$$\underset{2}{A} = \{-1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ \dots \ \ 1\},$$

$$\underset{3}{A} = \{1 \ \ -1 \ \ -1 \ \ \dots \ \ 1\},$$

$$\underset{4}{A} = \left\{\begin{Vmatrix} -1 & \mu \\ & 1 \end{Vmatrix} \ \ -1 \ \ 1 \ \ \dots \ \ 1\right\}$$

ähnlich, wo μ beliebige reelle Zahl ist. Die Matrizen $\underset{2}{A}, \underset{3}{A}, \underset{4}{A}$ und ihres Produkt $\underset{0}{A} = \underset{2}{A}\underset{4}{A}\underset{3}{A}$ gehören also zu G. Die Matrix $\underset{0}{A}$ ist aber der Matrix $B_{12}(a)\, a = \mu$ gleich. Daraus auf Grund des Hilfssatzes 2.3 folgt, daß G die ganze Gruppe $SL_n^+(R)$ enthalten muß. Unser Hilfssatz ist also im Falle $p \geqslant 3$ bewiesen.

II. $p = 2$. Jetzt haben die Matrizen K und K^{-1} folgende Gestalten

$$K = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{a_2}{a_1} & -\dfrac{1}{a_2} \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

In diesen Formeln muß a_2 größer als Null sein

$$a_2 > 0\,. \tag{2.1}$$

Andernfalls sind die charakteristischen Würzeln von K verschieden und ist K der diagonalen Matrix ähnlich. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß $p = 2$ ist.

Das Produkt $\underset{1}{A} = \tilde{A}A^{-1}$ ist gleich $\underset{1}{A} = \left\{\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ -2\alpha_1 & -1 \end{Vmatrix} 1 \dots 1\right\}$ und $\underset{1}{A}^2$ ist der Matrix $E_{21}(4\alpha_1)$ gleich. Diese muß zur G gehören. Wenn

$$\alpha_1 \neq 0 \tag{2.2}$$

ist, so enthält G wegen des Hilfssatzes 2.3 ganze Untergruppe $SL_n^+(R)$ und damit ist der Beweis beendet.

Es ist nur den Fall

$$\alpha_1 = 0 \tag{2.3}$$

zu betrachten. In diesem Falle haben die Matrizen K und K^{-1} folgende Gestalten

$$K = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -1/\alpha_2 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Wir bilden nachstehende Matrizen $K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5$

$$K_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} K \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -\alpha_2 - 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$K_2 = K_1 K^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ 1 & 1 + 1/\alpha_2 \end{Vmatrix}.$$

Mit $\underset{i}{A}$ werden wir die Matrix bezeichnen, die ensteht, wenn man in A den Block K durch $\underset{i}{K}$ ersetzt. Da $\underset{1}{K}$ und K untereinander ähnlich sind, muß dasselbe für A und $\underset{1}{A}$ gelten. Also $\underset{1}{A}$ gehört zu G. Das Produkt $A\underset{1}{A}^{-1}$ muß zu G gehören. Es hat die Form

$$\underset{1}{A}A^{-1} = \left\{\begin{Vmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ 1 & 1 + 1/\alpha_2 \end{Vmatrix} 1 \dots 1\right\}.$$

Jetzt bilden wir die Matrizen $\underset{3}{K}$ und $\underset{4}{K}$

$$\underset{3}{K} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \underset{2}{K} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 + 1/\alpha_2 \end{Vmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\underset{4}{K} = \underset{3}{K}K = \begin{Vmatrix} \alpha_2 & 0 \\ -2\alpha_2 - 1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.5}$$

Aus der Form $\underset{3}{K}$ folgt, daß die Matrix

$$\underset{3}{\tilde{A}} = \left\{\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 + \dfrac{1}{\alpha_2} \end{Vmatrix} \; 1 \; \dots \; 1\right\}$$

zu G gehören muß, weil sie zu $\underset{1}{A}A^{-1}$ ähnlich ist. Die Matrix

$$\underset{4}{A} = \tilde{A}\underset{3}{A} = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_2 & 0 \\ -2a_2-1 & 1 \end{matrix} & \\ \hline & L \end{array} \right\| \tag{2.6}$$

ist also auch in G enthalten.

Ist $a_2 \neq 1$, so kann man aus $\underset{4}{K}$ noch die Matrix $\underset{5}{K}$ erhalten

$$\underset{5}{K} = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{1}{a_2-1} & 0 \\ \dfrac{2a_2+1}{a_2-1} & 1 \end{matrix} \right\| K \left\| \begin{matrix} -(a_2-1) & 0 \\ 2a_2+1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Der Matrix $\underset{5}{K}$ entspricht die Matrix $\underset{5}{A}$, die zu $\underset{4}{A}$ ähnlich ist. Also $\underset{5}{A}$ gehört zu G. Sie hat folgende Form

$$\underset{5}{A} = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \\ \hline & L \end{array} \right\|.$$

Das Produkt $\underset{5}{A}^{-1}$ und $\underset{4}{A}$ ist auch in G enthalten. Es ist aber der Matrix $\underset{0}{\tilde{A}} = \underset{5}{A}^{-1}\underset{4}{A} = E_{21}(-2a_2-1)$ $(-2a_2-1 \neq 0$ wegen (2.1)) gleich. Auf Grund des Hilfssatzes 2.3 ist der Beweis bei der Voraussetzung $a_2 \neq 1$ beendet.

Es ist noch die Möglichkeit $a_2 = 1$ übriggeblieben. Ist diese erfüllt, so haben die Matrizen K und K^{-1} folgende Formen

$$K = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad K^{-1} = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

und sind untereinander ähnlich. Daraus folgt, daß die Matrix

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{c|c} K^{-1} & \\ \hline & L \end{array} \right\|$$

in G enthalten ist. Das Produkt $\tilde{A}A$ muß auch in G enthalten sein.

$$\tilde{A}A = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \\ \hline & L^2 \end{array} \right\|. \tag{2.7}$$

Außerdem gehört $\underset{4}{A}$ auch zu G. Das Produkt $(\underset{4}{A})^2(\tilde{A}A)^{-1}$ ist der Matrix $E_{21}(-\sigma)$ gleich und gehört zu G. Wegen des Hilfssatzes 2.3 muß G die ganze Gruppe $SL_n^+(R)$ enthalten. Der Hilfssatz 2.4 ist also in allen Fällen bewiesen.

Wir geben jetzt Definition der Gruppe $\Omega SL_n^+(R)$ und einen einfachen Hilfssatz für diese Gruppen an.

Es sei Ω eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen. Die Menge aller Matrizen, deren Determinanten zu Ω gehören, bildet offensichtlich eine Gruppe, nämlich eine Untergruppe von $GL_n(R)$ Diese ist durch Ω vollständig bestimmt. Wir werden sie mit $\Omega SL_n^+(R)$ bezeichnen.

HILFSSATZ 2.5. *Enthält eine Untergruppe G von $GL_n(R)$ die ganze Gruppe $SL_n^+(R)$, so gibt es derartige Untergrupge Ω der multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen, daß*

$$G = \Omega SL_n^+(R)\ .$$

Beweis. Die Menge der Determinanten von Matrizen, die zu G gehören, bildet offensichtlich eine Untergruppe der Gruppe der reellen Zahlen. Wir bezeichnen diese mit Ω. Um den Hilfssatz zu beweisen, müssen wir nur zeigen, daß jede Matrix von $GL_n(R)$, derer Determinante zu Ω gehört, auch in G enthalten ist. Es sei A eine Matrix dieser Art. D.h. es gilt die Relation

$$\mu = \operatorname{Det} A \in \Omega\ .$$

Da μ zu Ω gehört, gibt es in G eine Matrix $\underset{1}{A}$ mit Determinate μ. Wegen des Hilfssatzes 2.2 kann man $\underset{1}{A}$ in der Form $\underset{1}{A} = \underset{1}{B}D(\mu)$ darstellen. Da Matrizen $\underset{1}{A}$ und $\underset{1}{B}$ zu G gehören, muß auch $D(\mu)$ zu G gehören. Ebenfalls kann man A in der Gestalt $A = BD(\mu)$ darstellen. Da B und $D(\mu)$ in G enthalten sind, muß A auch in G enthalten sein. Der Hilfssatz ist also bewiesen.

Aus den zwei letzten Hilfssätzen folgt unmittelbar nachstehender

SATZ 2.1. *Zentralle Untergruppen und die Gruppen $\Omega SL_n^+(R)$ sind die einzigen invarianten Untergruppen von $GL_n(R)$.*

Aus den obigen Betrachtungen ziehen wir jetzt einige Folgerungen für die Theorie der geometrischen Objekte aus.

Wie wir schon im Paragraphen 1 angedeutet haben, stellt die Funktion F aus (1.2), die das lineare homogene geometrische Objekt erster Klasse bestimmt, einen Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$ dar. Der Kern (das Umkehrbild der Einheitsmatrix) dieses Homomorphismus ist eine invariante Untergruppe von $GL_n(R)$ und umgekehrt, jede invariante Untergruppe bestimmt einen Homomorphismus F. Aus dem letzten Satz folgt, daß es nur zwei Arten der Homomorphismen geben. Die ersten haben eine beliebige Gruppe $\Omega SL_n^+(R)$ und die zweiten eine beliebige zentralle Gruppe als Kern. Die Gestalt der Homomorphismen der ersten Art bestimmt folgender

SATZ 2.2. *Die ganze Gruppe $SL_n^+(R)$ ist dann und nur dann im Kern eines Homomorphismus F enthalten, wenn F nur von der Determinante Δ der Matrix X abhängt, d.h.*

$$F(X) = G(\Delta) \tag{2.8}$$

ist.

Beweis. Es ist leicht zu bemerken, daß (2.8) hinreichend ist. Darum zeigen wir nur, daß (2.8) notwendig ist. Es sei K der Kern des Homomorphismus F. Da $SL_n^+(R) \subset K$, muß die Beziehung

$$F(B) = e \tag{2.9}$$

für beliebige Matrizen mit der Determinante 1 gelten. Aus dem Hilfssatz 2.2 folgt, daß man jede Matrix X von $GL_n(R)$ in der Form

$$X = BD(\Delta) \tag{2.10}$$

darstellen kann. Aus (2.9) und (2.10) ergibt sich

$$F(X) = F(BD) = eF(D) = F\big(D(\Delta)\big) . \tag{2.11}$$

Daraus folgt (2.8), wenn man in (2.11) $F\big(D(\Delta)\big)$ durch $G(\Delta)$ ersetzt.

Satz 2.2 kann auch in nachstehender Fassung ausgedrückt werden, die wegen des Hilfssatzes 2.4 mit dem Satz 2.2 äquivalent ist.

FOLGERUNG 2.1. *Erfüllt ein Homomorphismus F die Beziehung*

$$F(\underset{0}{X}) = e$$

für eine beliebige nichtskalare Matrix $\underset{0}{X}$, so ist F nur von der Determinante Δ der Matrix X abhängig.

§ 3. Objekte des Typus $[m, n, 1]$, wo $m < n$ ist. Anfangs geben wir einige Definitionen und Hilfssätze über gewisse Eigenschaften der Homomorphismen an.

Ist $F(X)$ ein Homomorphismus $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$, so kann man folgende Homomorpshismen bilden:

$$CF(X)C^{-1}, \tag{3.1}$$

wo C eine beliebige nichtsinguläre Matrix ist, und

$$\Phi(\Delta)CF(X)C^{-1}, \tag{3.2}$$

wo $\Phi(\Delta)$ eine skalare nichtsinguläre Matrix ist, welche die multiplikative Funktionalgleichung

$$\Phi(\xi)\Phi(\eta) = \Phi(\xi\eta) \tag{3.3}$$

erfüllt. Die Homomorphismen $F(X)$ und (3.1) nennen wir untereinander äquivalent.

Bemerkung 3.1. Die Homomorphismen $F(X)$ und (3.1) haben denselben Kern.

Bemerkung 3.2. Hat der Homomorphismus F die zentralle Untergruppe als Kern, so erfüllt (3.2) auch diese Bedingung.

Bemerkung 3.3. Es sei F ein Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$, der eine zentralle Untergruppe von $GL_n(R)$ als Kern hat. Da jede zentralle Untergruppe aus den skalaren Matrizen besteht, muß F die Implikation

$$F(X) = F(Y) \to Y = \lambda X \tag{3.4}$$

erfüllen, wo λ eine entsprechende reelle Zahl ist.

Im weiteren werden wir mit $E_i(\varrho)$ die Matrix bezeichnen, die entsteht, wenn man die in der i-ten Reihe der Einheitsmatrix der Ordnung n stehende Einheit durch ϱ ersetzt (vgl. [4], S. 188). Die Matrix $E_i(-1)$ werden wir auch kurz mit E_i bezeichnen. Auf ähnliche Weise ist das Symbol e_i für die Matrizen der Ordnung m zu verstehen. Dann werden wir unter dem Symbol

$$E_{i_1 \ldots i_k} \quad \text{bzw.} \quad e_{i_1 \ldots i_k}$$

die Matrix verstehen, die entsteht, wenn man die in den $i_1 \ldots i_k$-ten Reihen der Einheitsmatrix der Ordnung n bzw. m stehenden Einheiten durch -1 ersetzt. Diese Bezeichnung ist durch die Relation

$$E_{i_1 \ldots i_k} = E_{i_1} \ldots E_{i_k}, \qquad i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k$$

gerechtfertigt.

Wir beweisen jetzt einen Hilfssatz über die Homomorphismen F der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$.

Hilfssatz 3.1. *Es sei F ein Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$, dessen Kern die zentralle Untergruppe ist. Es gibt stets einen Homomorphismus F^* der Gestalt* (3.2), *der die Bedingung*

$$F^*(E_1) = e_{12\ldots s} \tag{3.5}$$

erfüllt, wo

$$1 \leqslant s \leqslant \tfrac{1}{2} m \tag{3.6}$$

ist.

Beweis. Wir nehmen an, daß ein Homomorphismus F die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes erfüllt. Da die $F(E_1)$ die Matrizengleichung

$$X^2 = e$$

erfüllt, muß sie die Form

$$F(E_1) = C\{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_m\} C^{-1} \tag{3.7}$$

haben, wo C eine nichtsinguläre Matrix ist und $\varepsilon_i^2 = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ sind (vgl. [3], S. 187). Jedenfalls kann man die Matrix C so auswählen, daß die Beziehung (3.7) in der Form

$$F(E_1) = Ce_{1\ldots l}C^{-1} \tag{3.8}$$

geschrieben werden kann. Dann erfüllt der Homomorphismus

$$\tilde{F} \overset{\mathrm{df}}{=} C^{-1}FC \tag{3.9}$$

die Bedingung

$$\tilde{F}(E_1) = e_{1\ldots l}\,. \tag{3.10}$$

Es ist nun zu beweisen, daß l in (3.10) der Ungleichung (3.6) genügt. l muß größer als Null sein

$$l > 0\,. \tag{3.11}$$

Andernfalls soll der Kern von $\tilde{F}$ die Matrix E_1 enthalten. Dies wiederspricht aber der Voraussetzung, daß der Kern von F also auch von $\tilde{F}$ (Bemerkung 3.1) die zentralle Untergruppe bildet (Folgerung 2.1).

Ist $l \leqslant \frac{1}{2}m$, und nehmen wir $F^* = \tilde{F}$, $\Phi(\Delta) \equiv 1$ und $s = l$ an, so ist der Beweis damit beendet.

Es ist also nur den Fall

$$\tfrac{1}{2}m < l \tag{3.12}$$

zu betrachten. In diesem Falle definieren wir einen neuen Homomorphismus $\bar{F} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Sig}\,\Delta \cdot \tilde{F}$. $\bar{F}$ hat auch die zentralle Untergruppe als Kern (Bemerkung 3.2). Außerdem erfüllt $\bar{F}$ die Bedingung $\bar{F}(E_1) = -e_{1\ldots l} = e_{1\ldots(m-l)}$, wobei

$$m - l < \tfrac{1}{2}m \tag{3.13}$$

ist. $m-l$ muß größer als Null sein

$$1 \leqslant m - l\,. \tag{3.14}$$

Andernfalls erhalten wir einen Widerspruch ganz analog wie für (3.11). Der Beweis ist in diesem Falle beendet, wenn wir $F^* = \bar{F}$ $m-l = s$ und $\Phi(\Delta) = \mathrm{Sig}\,\Delta$ einsetzen.

Mit Hilfe des letzten Hilfssatzes beweisen wir einen Satz über die Eigenschaften der Homomorphismen der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$ wenn $m < n$ ist.

SATZ 3.1. *Jeder Homomorphismus F der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$ für $m < n$ ist nur von der Determinante Δ der Matrix X abhängig, d.h. F hat die Form*

$$F(X) = G(\Delta)\,, \tag{3.15}$$

wo $\Delta = \mathrm{Det}\,X$ ist.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz mit Hilfe der vollständigen Induktion hinsichtlich m. Für $m = 1$ ist dieser Satz auf Grund der Ergebnisse der Arbeit [4] richtig. Wir nehmen an, daß er auch für beliebige natürliche Zahl $m \leqslant k$ richtig ist und beweisen, daß dieser Satz für $m = k+1$ gelten muß.

Es sei also F ein Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$, wo $n > m = k+1$ ist. Zum indirekten Beweis setzen wir voraus, daß F in der Form (3.15) nicht dargestellt werden kann. Der Kern von F enthält nicht die Gruppe $SL_n^+(R)$ (Satz 2.2). F muß also die zentralle Gruppe als Kern haben (Satz 2.1). Aus dem Hilfssatz 3.1 folgt, daß kann man dann einen Homomorphismus F^* finden, der auch die zentralle Untergruppe als Kern hat und die Bedingung (3.5) erfüllt.

Die Matrix E_1 ist mit beliebiger Matrix $\underset{1}{X}$ der quasidiagonaler Form

$$\underset{1}{X} = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & X^{(n-1)} \end{array} \right\|$$

vertauschbar, wo $X^{(n-1)}$ beliebige nichtsinguläre Matrix der Ordnung $n-1$ ist. Die Matrix $F^*(E_1) = e_{1\ldots s}$ muß mit der Matrix $F^*(\underset{1}{X})$ vertauschbar sein. Diese muß also folgende Gestalt

$$F^*(\underset{1}{X}) = \left\| \begin{array}{c|c} f^{(s)}(X^{(n-1)}) & \\ \hline & f^{(m-s)}(X^{(n-1)}) \end{array} \right\|$$

haben, wo $f^{(s)}$, $f^{(m-s)}$ die Matrizen entsprechend der Ordnung s und $m-s$ sind. Es ist leicht nachzuprüfen, daß $f^{(s)}(X^{(n-1)})$ und $f^{(m-s)}(X^{(n-1)})$ die Homomorphismen der Gruppe $GL_{(n-1)}(R)$ in $GL_s(R)$ bzw. $GL_{m-s}(R)$ darstellen. Da s die Ungleichungen

$$1 \leqslant s \leqslant \frac{m}{2} \leqslant m-1 < n-1\,, \quad s \leqslant \frac{k+1}{2} \leqslant k$$

erfüllt, muß $f^{(s)}$ wegen der Voraussetzung nur von der Determinante $\Delta(X^{(n-1)})$ der Matrix $X^{(n-1)}$ abhängen

$$f^{(s)}(X^{(n-1)}) = g^{(s)}\big(\Delta(X^{(n-1)})\big)\,. \tag{3.16}$$

Ganz analog kann man zeigen, daß $f^{(m-s)}(X^{(n-1)})$ auch nur von der Determinante $\Delta(X^{(n-1)})$ abhängt

$$f^{(m-s)}(X^{(n-1)}) = g^{(m-s)}\big(\Delta(X^{(n-1)})\big)\,. \tag{3.17}$$

Die Beziehungen (3.16) und (3.17) sind der Voraussetzung, daß F als Kern zentralle Untergruppe hat, entgegengesetzt. Denn kann man leicht zwei Matrizen $\underset{1}{\bar{X}}$ und $\underset{1}{\tilde{X}}$ angeben, die der Implikation (3.4) nicht genügen und dieselben Determinante haben. Es gibt also keinen Homomorphismus F $GL_n(R)$ in $GL_m(R)$ für $n > m = k+1$ der zentralle Gruppe als Kern hat. F muß nur von der Determinante Δ abhängen. Auf Grund der vollständigen Induktion ist der Satz bewiesen.

Aus dem vorigen Satz unmittelbar folgt nachstehender Satz über die geometrischen Objekte

SATZ 3.2. *Jedes lineare homogene geometrische Objekt erster Klasse, dessen Komponentenzahl kleiner als Dimension des Raumes ist, stellt das J-Objekt dar.*

§ 4. Objekte des Typus $[m, n, 1]$, wo $m = n$ ist. Wie aus den bisherigen Überlegungen folgt, kann die Bestimmung der Objekte dieser Art auf die Bestimmung aller Homomorphismen F der Gruppe $GL_n(R)$ n sich zurückgeführt werden. Deshalb geben wir einen Satz für diese Homomorphismen an. Zuerst müssen wir aber einige Hilfssätze beweisen.

HILFSSATZ 4.1. *Es sei F ein Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in sich, der zentralle Untergruppe als Kern hat. Man kann stets einen Homomorphismus F^* der Form*

$$F^* = \Phi(\Delta)CFC^{-1} \tag{4.1}$$

finden, der folgende Bedingung

$$F^*(E_1) = E_1 \tag{4.2}$$

erfüllt.

Beweis. Aus dem Hilfssatz 3.1 folgt, daß es stets einen Homomorphismus der Form (4.1) ($\Phi(\Delta) \equiv 1$ bzw. $\Phi(\Delta) = \operatorname{Sig}\Delta$) gibt, der die Bedingung

$$F^*(E_1) = E_{1\ldots s}$$

erfüllt, wo $1 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}n$ ist. In unserem Fall muß s gleich 1 sein. Andernfalls erhalten wir einen Widerspruch mit der Voraussetzung, daß F die zentralle Untergruppe als Kern hat.

In der Tat E_1 ist mit jeder der Matrizen

$$\underset{1}{X} = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & X^{(n-1)} \end{array} \right\|$$

vertauschbar. $F(E_1)$ muß also mit der Matrix $E_{1\ldots s}$ vertauschbar sein, d.h. sie hat die Gestalt

$$F(\underset{1}{X}) = \left\| \begin{array}{c|c} f^{(s)}(X^{(n-1)}) & \\ \hline & f^{(m-s)}(X^{(n-1)}) \end{array} \right\|,$$

wo $f^{(s)}$, $f^{(n-s)}$ die Homomorphismen der Gruppe $GL_{n-1}(R)$ in $GL_s(R)$ bzw. $GL_{n-s}(R)$ sind. Diese müssen wegen des Satzes 3.1 nur von der Determinante $\Delta(X^{(n-1)})$ abhängen. Das ist aber unmöglich, weil F die Implikation (3.4) erfüllen soll. Auf diese Weise ist unser Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 4.2. *Ist F ein Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in sich für $n \geqslant 3$, dessen Kern die zentralle Untergrupe bildet, und erfüllt F die Relation*

$$F(E_1) = E_1\,, \tag{4.3}$$

so kann man einen mit F äquivalenten Homomorphismus F^* finden, der den Bedingungen

$$F^*(E_i) = E_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.4}$$

genügt.

Beweis. Es sei F ein Homomorphismus, der den Voraussetzungen dieses Hilfssatzes genügt. Da der Kern von F die zentralle Untergruppe von $GL_n(R)$ ist, muß F die Implikation (3.4) erfüllen. Wir beweisen den Hilfssatz mit Hilfe der vollständigen Induktion. Wir nehmen also an, daß (4.4) für $i = 1, 2, \ldots, l$ gilt, wo $l < n$ ist, und zeigen, daß es auch für $i = l+1$ gelten muß. Zu diesem Zwecke bestimmen wir $F(E_{l+1})$. E_{l+1} ist mit jeder der Matrizen E_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ vertauschbar. $F(E_{l+1})$ muß also mit den Matrizen $F(E_i) = E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ vertauschbar sein. Außerdem erfüllt die Matrix $F(E_{l+1})$ die Beziehung

$$F(E_{l+1})^2 = E\,.$$

Daraus folgt, daß die Matrix $F(E_{l+1})$ die Form

$$F(E_{l+1}) = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_l \end{matrix} & \\ \hline & a^{(n-l)} \end{array} \right\| \tag{4.5}$$

hat, wo $\varepsilon_i^2 = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ ist. Die Matrix $a^{(n-l)}$ der Ordnung $n-l$ muß die Bedingung

$$(a^{(n-l)})^2 = e^{(n-l)} \tag{4.6}$$

erfüllen, wo $e^{(n-l)}$ die Einheitsmatrix der Ordnung $n-l$ ist. $a^{(n-l)}$ kann man so darstellen

$$a^{(n-l)} = C^{(n-l)} \left\| \begin{matrix} \varepsilon_{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{matrix} \right\| (C^{(n-l)})^{-1} \tag{4.7}$$

(vgl. [3], S. 187), wo $C^{(n-l)}$ entsprechende nichtsinguläre Matrix der Ordnung $(n-l)$ ist. Mit Hilfe von (4.7) kann (4.5) so umgeschrieben werden

$$F(E_{l+1}) = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ \hline & C^{(n-l)} \end{array} \right\| \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_l & & & \\ & & & \varepsilon_{l+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ \hline & C^{(n-l)} \end{array} \right\|^{-1},$$

wo $\varepsilon_i^2 = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ ist. Bezeichnen wir mit $\bar{F}$ den mit F äquivalenten Homomorphismus

$$(4.8)\qquad \bar{F} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & C^{(n-l)} \end{array} \right\|^{-1} F \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & C^{(n-l)} \end{array} \right\| .$$

Auf Grund der Bemerkung 3.1 hat $\bar{F}$ auch zentralle Untergruppe als Kern. $\bar{F}$ erfüllt folgende Bedingungen:

$$\bar{F}(E_i) = E_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\bar{F}(E_{l+1}) = \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{array} \right\| .$$

Da die Matrix $\bar{F}(E_{l+1})$ zu jeder der Matrizen $F(E_i)$, $i = 1, 2, \ldots, l$ ähnlich ist, kann genau eine -1 in der Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ auftreten. Überdies kann nicht ε_i für $i = 1, 2, \ldots, l$ gleich -1 sein. Andernfalls ist $F(E_{l+1})$ der Matrix $F(E_i)$ gleich. Dies widerspricht aber der Implikation (3.4) für $n \geqslant 3$. Eine und nur eine der Zahlen ε_i für $i = l+1, \ldots, n$ muß also gleich -1 sein. Dann kann man eine nichtsinguläre Matrix der Ordnung $(n-l)$, $d^{(n-l)}$ finden, daß der mit $\bar{F}$ äquivalente Homomorphismus $\tilde{F}$

$$\tilde{F} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & d^{(n-l)} \end{array} \right\| \bar{F} \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & d^{(n-l)} \end{array} \right\|^{-1}$$

die Forderungen

$$(4.9)\qquad \tilde{F}(E_i) = E_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, l+1$$

erfüllt. Aus der Transitivität der Äquivalenzrelation folgt, daß $\tilde{F}$ auch mit F äquivalent ist. Der Hilfssatz ist also bewiesen.

Jetzt geben wir einen Hilfssatz über die Homomorphismen der Gruppe $GL_2(R)$ in such.

HILFSSATZ 4.3. *Erfüllt ein Homomorphismus $f(x)$ der Gruppe $GL_2(R)$ in sich die Bedingungen*

$$(4.10)\qquad f\left(\left\| \begin{array}{cc} \varrho & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|\right) = \left\| \begin{array}{cc} \gamma(\varrho) & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$(4.11)\qquad f(e_1) = e_1,$$

so hat $f(x)$ eine der Gestalten

$$(4.12)\qquad f(x) = dxd^{-1} \quad \textit{bzw.} \quad f(x) = d(x^T)^{-1}d^{-1},$$

wo d der Matrix $\left\| \begin{array}{cc} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|$, $\mu \neq 0$, *gleich ist.*

Beweis. Wie aus [6] folgt, kann ein jeder Homomorphismus dieser Art in der Form

$$f(x) = \Phi(\Delta)\, C x C^{-1} \tag{4.13}$$

dargestellt werden. Wegen (4.11) erfüllt er die Bedingung

$$\Phi(-1)\, C \begin{Vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{Vmatrix} C^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{Vmatrix}. \tag{4.14}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle $\Phi(-1) = e$ und $\Phi(-1) = -e$.

1. $\Phi(-1) = e$. Dann geht (4.14) in die Beziehung

$$C \begin{Vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{Vmatrix} C \tag{4.15}$$

über, die besagt, daß c mit der Matrix $\begin{Vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{Vmatrix}$ vertauschbar ist. C muß also eine Diagonalmatrix

$$C = \begin{Vmatrix} C_{11} & \\ & C_{12} \end{Vmatrix}, \quad C_{11} C_{22} \neq 0\,,$$

sein. Diese kann man nich in der Form

$$C = \begin{Vmatrix} C_{22} & \\ & C_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mu & \\ & 1 \end{Vmatrix}$$

darstellen, wo $\mu = C_{11}/C_{22}$ ist. In diesem Falle kann also (4.13) in der Gestalt

$$f(x) = \Phi(\Delta)\, d x d^{-1} \tag{4.16}$$

geschrieben werden.

2. $\Phi(-1) = -e$. Dann hat (4.14) folgende Form

$$C \begin{Vmatrix} 1 & \\ & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{Vmatrix} C.$$

Daraus folgt, daß $C_{11} = C_{22} = 0$ ist. Die Matrix C in der Form

$$C = \begin{Vmatrix} C_{21} & \\ & C_{21} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mu = -C_{12}/C_{21}\,, \tag{4.17}$$

dargestellt werden kann. Setzen wir (4.17) in (4.13) ein, so erhält man die Relationen

$$\begin{aligned} f(x) &= \tilde{\Phi}(\Delta) \begin{Vmatrix} \mu & \\ & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \frac{1}{\Delta} a \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}; \\ f(x) &= \tilde{\Phi}(\Delta)\, d (x^T)^{-1} d^{-1}\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Setzen wir (4.10) in (4.16) bzw. (4.18) ein, so ergibt sich, daß

(4.19) $$\Phi(\Delta) \equiv 1 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\Phi}(\Delta) \equiv 1$$

und

(4.20) $$\gamma(\varrho) = \varrho \quad \text{bzw.} \quad \gamma(\varrho) = \frac{1}{\varrho}$$

ist. Und der Hilfssatz ist bewiesen.

Vor dem nächsten Hilfssatz müssen wir eine Bezeichnung einführen. Nämlich werden wir mit V_{ik} die Matrix bezeichnen, die entsteht, wenn man in der Einheitsmatrix die i-te Reihe mit der k-ten vertauscht.

HILFSSATZ 4.4. *Jede nichtsinguläre Matrix kann als Produkt der Matrizen $B_{i,i+1}(a)$, $E_n(\varrho)$ und $V_{i,i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ dargestellt werden.*

Beweis. Aus dem Hilfssatz 2.2 folgt, daß jede nichtsinguläre Matrix als Produkt der Matrizen $B_{ik}(a)$ und $E_n(\varrho) = D(\varrho)$ dargestellt werden kann. Die Matrix $B_{ik}(a)$ kann durch Permutationen der entsprechenden aufeinanderfolgenden Reihen (Spalten) in der Matrix $B_{i,i+1}(a)$ erhalten werden. Eine jede Permutation kann man weiter durch rechtsseitiges (linksseitiges) Multiplizieren mit der entsprechenden Permutationsmatrix $V_{p,p+1}$ ersetzen. Jede Matrix $B_{ik}(a)$ kann man also als Produkt der Matrizen $B_{i,i+1}(a)$ und $V_{p,p+1}$ darstellen und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Jetzt beweisen wir folgenden Satz über Homomorphismen F der $GL_n(R)$ in sich.

SATZ 4.1. *Jeder Homomorphismus F der Gruppe $GL_n(R)$ in sich hat eine der drei nachstehenden Formen*

1. $F(X) = G(\Delta), \quad \Delta = \mathrm{Det} X,$
2. $F(X) = \Phi(\Delta) C X C^{-1},$
3) $F(X) = \Phi(\Delta) C (X^T)^{-1} C^{-1}.$

In diesen Formeln ist C eine nichtsinguläre Matrix. $\Phi(\xi)$ bzw. $G(\xi)$ ist skalare bzw. beliebige Matrix einer reellen Veränderlichen ξ, die die multiplikative Funktionalgleichung (3.3) *erfüllt.*

Beweis. Für $n = 1$ ist der Satz trivial. In diesem Falle sind die Formeln 2. und 3. in 1. enthalten. Für $n = 2$ wurde der Satz 4 in [6], S. 16 bewiesen. In der Arbeit [7] wurde auch die allgemeinste Gestalt der Martixfunktion $G(\xi)$ für $n = 2$ bestimmt. Da Matrizen der zweiten Ordnung $\Delta^{-1}X$ und $(X^T)^{-1}$ stets ähnlich sind, ist die Formel 3. in 2. für $n = 2$ enthalten. Es ist also den Satz 4.1, nur für $n \geqslant 3$ zu beweisen.

Bezeichnen wir mit F einen Homomorphismus der Gruppe $GL_n(R)$ in sich. Wir können annehmen, daß der Kern von F zentralle Untergruppe ist. Andernfalls müßte der Kern die ganze Gruppe $SL_n^+(R)$ enthalten (Hilfssatz 2.4.) und wegen des Satzes 2.1 hätte die Gestalt 1 angenommen.

Infolgedessen kann man einen neuen Homomorphismus F^* finden (Hilfssätze 4.1 und 4.2), der die Bedingungen (4.4) erfüllt. F^* und F sind untereinander durch die Formel (4.1) verbunden. F^* hat also auch eine zentralle Untergruppe als Kern (Bemerkungen 3.1 und 3.2).

Um den Wert F^* für beliebige nichtsinguläre Matrix zu bestimmen, genügt es die Werte von F^* für die Matrizen $B_{i,i+1}(\alpha)$, $E_i(\varrho)$ und $V_{i,i+1}$ zu finden (Hilfssatz 4.4). Deshalb beschäftigen wir uns zuerst mit der Bestimmung der Werte von F^* für diese Matrizen.

Aus (4.4) folgt, daß das Bild einer Quasidiagonalmatrix auch eine Quasidiagonalmatrix mit derselben Dimension der Diagonalblöcke ist. Insbesondere

$$F^*\big(E_p(\varrho)\big) = \{\varphi_1^p(\varrho), \dots, \varphi_p^p(\varrho), \dots, \varphi_n^p(\varrho)\}.$$

Wir zeigen jetzt, daß

$$\varphi_i^p = \varphi_k^p, \quad i, k \neq p, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \tag{4.21}$$

ist. Wir nehmen an, daß $p \neq 1$ und $p \neq 2$ ist und beweisen (4.21) für $i = 1$ und $k = 2$. In anderen Fällen ist der Beweis ganz analog. Es gilt folgende Relation

$$E_2 = V_{12} E_1 V_{12} \tag{4.22}$$

Setzt man (4.22) in (4.4) für $i = 2$, so erhalten wir

$$F^*(V_{12} E_1 V_{12}) = V_{12} E_1 V_{12}.$$

Daraus folgt

$$E_1 F^*(V_{12}) V_{12} = F^*(V_{12}) V_{12} E_1, \tag{4.23}$$

weil $V_{12}^{-1} = V_{12}$ und $F^*(V_{12})^{-1} = F^*(V_{12})$ ist. Die Beziehung (4.23) drückt aus, daß die Matrix $F^*(V_{12})V_{12}$ mit der Matrix E_1 vertauschbar ist. Überdies sind $F^*(V_{12})$ und E_1 untereinander ähnlich. Die Matrix $F^*(V_{12})$ hat also folgende Form

$$F^*(V_{12}) = E_1(\sigma) E_2(1/\sigma) V_{12}. \tag{4.24}$$

Aus der Beziehung

$$V_{12} E_p(\varrho) V_{12} = E_p(\varrho)$$

erhalten wir mit Hilfe von (4.24)

$$V_{12} F^*\big(E_p(\varrho)\big) V_{12} = F^*\big(E_p(\varrho)\big). \tag{4.25}$$

Die letzte Relation zeigt, daß (4.21) für $i = 1$ und $k = 2$ gilt.

$F^*\big(E_p(\varrho)\big)$ hat wegen (4.21) folgende Form

$$F^*\big(E(\varrho)\big) = \{\varphi^p(\varrho) \;\; \dots \;\; \varphi_p^p(\varrho) \;\; \varphi^p(\varrho) \;\; \varphi^p(\varrho) \;\; \dots \;\; \varphi^p(\varrho)\}. \tag{4.26}$$

Da $E_p(\varrho)$ zu der Matrix $E_q(\varrho)$ ähnlich ist, müssen die Matrizen $F^*(E_p(\varrho))$ und $F^*(E_q(\varrho))$ auch ähnlich sein, d.h. es gelten die Relationen

$$\varphi^p(\varrho) = \varphi^q(\varrho) = \varphi(\varrho) ,$$
$$\varphi_p^p(\varrho) = \varphi_q^q(\varrho) = \tilde{\varphi}(\varrho) .$$

Definieren wir jetzt einen Homomorphismus $\tilde{F}$ auf folgende Weise

$$\tilde{F} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi^{-1}(\Delta) F^* , \tag{4.27}$$

so erfüllt $\tilde{F}$ die Bedingung

$$\tilde{F}(E_p(\varrho)) = E_p(\gamma(\varrho)) , \tag{4.28}$$

in der $\gamma = \tilde{\varphi}/\varphi$ eingesetzt wurde.

Es sei a eine quadratische nichtsinguläre Matrix der Ordnung 2. Da das Bild einer Quasidiagonalmatrix eine Quasidiagonalmatrix ist, erhalten wir

$$\tilde{F}(\{1 \ldots 1 \overset{pp+1}{a} 1 \ldots 1\}) = \{\sigma_1^p(a) \ldots \sigma_{p-1}^p \overset{pp+1}{f(a)} \sigma_{p+2}^p \ldots \sigma_n^p(a)\} , \tag{4.29}$$

wo alle Funktionen $\sigma_k^p(a)$ sind multiplikativ d.h. der Funktionalgleichnung

$$\sigma_k^p(a)\,\sigma_k^p(b) = \sigma_k^p(ab)$$

genügen. Es ist wohl bekannt, daß jede skalare multiplikative Funktion der Matrizenargumente nur von der Determinante dieser Matrix abhängt [4]. Es gilt also für jedes a

$$\sigma_k^p(a) = \bar{\sigma}_k^p(\operatorname{Det} a) . \tag{4.30}$$

Setzen wir für a in (4.29) die Matrix $\begin{Vmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ ein und vergleichen mit (4.28), so ergibt sich,

$$\sigma_k^p(a) \equiv 1 . \tag{4.31}$$

Mit Hilfe von (4.31) kann (4.29) auch so dargestellt werden

$$\tilde{F}(\{1 \ldots 1 \overset{pp+1}{a} 1 \ldots 1\}) = \{1 \ldots 1 \overset{pp+1}{f(a)} 1 \ldots 1\} . \tag{4.32}$$

Die Funktion $f(a)$ ist ein Homomorphismus der Gruppe $GL_2(R)$ in sich, der die Bedingungen (4.10) und (4.11) erfüllt. Er muß also auf Grund des Hilfssatzes 4.3 eine der beiden Gestalten (4.12) haben. Endlich erhält (4.32) folgende Formen

$$\tilde{F}(\{1 \ldots 1 \overset{pp+1}{a} 1 \ldots 1\}) = E_p(\mu_p)\{1 \ldots 1 \overset{pp+1}{a} 1 \ldots 1\}E_p(\mu_p)^{-1} \tag{4.33}$$

bzw.

$$\tilde{F}(\{1 \ldots 1 \overset{pp+1}{a} 1 \ldots 1\}) = E_p(\mu_p)(\{1 \ldots 1 \overset{pp+1}{a} 1 \ldots 1\}^T)^{-1}E_p(\mu_p)^{-1}. \tag{4.34}$$

Mit Hilfe (4.33) und (4.34) können wir die Werte von $\tilde{F}$ für die Matrizen $E_p(\varrho)$, $B_{p,p+1}(\alpha)$ und $V_{p,p+1}$ bestimmen. Diese lassen sich folgenderweise aufschreiben

$$
\begin{aligned}
&\tilde{F}\big(E_p(\varrho)\big) = E_p(\varrho) \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{F}\big(E_p(\varrho)\big) = \big(E_p(\varrho)^T\big)^{-1}, \\
&\tilde{F}\big(B_{p,p+1}(\alpha)\big) = E_p(\mu_p)B_{p,p+1}(\alpha)E_p(\mu_p)^{-1} \\
(4.35)\qquad &\qquad\qquad \text{bzw.} \quad \tilde{F}\big(B_{p,p+1}(\alpha)\big) = E_p(\mu_p)\big(B^T_{p,p+1}(\alpha)\big)^{-1}E_p(\mu_p)^{-1}, \\
&\tilde{F}(V_{p,p+1}) = E_p(\mu_p)V_{p,p+1}E_p(\mu_p)^{-1} \\
&\qquad\qquad \text{bzw.} \quad \tilde{F}(V_{p,p+1}) = E_p(\mu_p)(V^T_{p,p+1})^{-1}E_k(\mu_p)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Nach Übergang zu Homomorphismus $\bar{F}$

$$\bar{F} = C\tilde{F}C^{-1}, \tag{4.36}$$

wo $C = E_2(\mu_1)E_3(\mu_1\mu_2)\ldots E_n(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})$ gleich ist, verschwinden die Konstanten μ_p in (4.35) und wir haben

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}\big(E_p(\varrho)\big) = E_p(\varrho) &&\text{bzw.} \quad = [E_p^T(\varrho)]^{-1}, \\
(4.37)\qquad &\bar{F}\big(B_{p,p+1}(\alpha)\big) = B_{p,p+1}(\alpha) &&\text{bzw.} \quad = [B_{p,p+1}(\alpha)^T]^{-1}, \\
&\bar{F}(V_{p,p+1}) = V_{p,p+1} &&\text{bzw.} \quad = (V^T_{p,p+1})^{-1}.
\end{aligned}
$$

Aus (4.37) mit Hilfe des Hilfssatzes (4.4) erhält man die Werte von F für beliebige nichtsinguläre Matrix X, diese sich folgenderweise aufschreiben lassen:

$$\bar{F}(X) = X \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{F}(x) = (x^T)^{-1}. \tag{4.38}$$

Bestimmen wir F aus den Formeln (4.38), (4.36), (4.27) und (4.1), so ergibt sich, daß F eine der Gestalten 2. bzw. 3. hat. Auf diese Weise ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen noch den Satz 4.1 in den Begriffen der Theorie der geometrischen Objekte ausdrücken

SATZ 4.2. *Alle linearen homogenen geometrischen Objekte erste Klasse, derer Komponentenzahl gleich der Dimension des Raumes ist, sind durch folgende Transformationsformeln bestimmt*

1. $\omega' = G(J)\,\omega, \quad J = \mathrm{Det}\,\|A_i^{i'}\| = \mathrm{Det}\,A$;
2. $\omega' = \Phi(J)\,CAC^{-1}\omega$;
3. $\omega' = \Phi(J)\,C(A^T)^{-1}C^{-1}\omega$.

In den vorliegenden Formeln ist C eine beliebige nichtsinguläre Matrix, $G(\xi)$ bzw. $\Phi(\xi)$ ist entsprechend beliebige bzw. skalare Matrixfunktion einer reellen Veränderlichen ξ, welche die Funktionalgleichung (3.3) erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] E. Artin, *Geometric algebra*, New-York, London 1957.

[3] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. Москва 1954.

[4] M. Kucharzewski, *Über die Funktionalgleichung* $f(a_k^i)\cdot f(b_k^i) = f(b_k^{i'} a_{k'}^{\alpha})$, Publ. Math. Debrecen 6 (3-4) (1959), S. 181-198.

[5] — i M. Kuczma, *Ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego* $f(xy) = f(x)f(y)$ *dla macierzy f drugiego stopnia*, Zeszyty Naukowe W.S.P., Katowice 3 (1961-1962), s. 47-59.

[6] — — *On the functional equation* $F(A\cdot B) = F(A)\cdot F(B)$, Ann. Polon. Math. 13 (1963), S. 1-17.

[7] — — *Determination of geometric objects of the type* [2, 2, 1] *with a linear homogeneous transformation formula*, Ann. Polon. Math. 14 (1963), S. 29-48.

[8] O. Perron, *Über eine für die Invariatentheorie wichtige Funktionalgelichung*, Math. Zeit. 48 (1942), S. 136-172.

[9] P. Reisch. *Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen* $\Phi(X)\times \times\Phi(Y) = \Phi(XY)$, Math. Zeit. 49 (1943-44), S. 411-426.

[10] I. Schur, *Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzungsberichte Akad. Wiss. (1928), S. 100-124.

Reçu par la Rédaction le 23. 10. 1964