ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XIII, 2 (1972)

В. ДЗЮБДЗЕЛЯ (Вроцлав)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СО СЛУЧАЙНОЙ ДЛИНОЙ

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ взаимонезависимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. Если реализированные значения, величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ расположим в порядке возрастания, то получим реализированные значения величин

$$Z_1^{(n)} \leqslant Z_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant Z_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant Z_n^{(n)}.$$

Назовём $Z_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *k-той экстремальной порядковой статистикой* в последовательности о длине n. Величины $Z_1^{(n)}$ и $Z_n^{(n)}$ назовём соответственно *минимумом* и *максимумом* этой последовательности.

Гнеденко [1] нашел возможные типы асимптотического распределения максимальной статистики $Z_n^{(n)}$ при бесконечном увеличении n. Смирнов [2] доказал следующую теорему:

Теорема 1 (Смирнова). *Пусть $\Phi_{k,n}(x) = P(Z_k^{(n)} < x)$ — функция распределения k-той экстремальной порядковой статистики. Допустим что существует последовательность положительных постоянных $\{a_n\}$ и последовательность постоянных $\{b_n\}$ таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{k,n}(a_n x + b_n) = \Phi_k(x)$$

во всех точках, где функция распределения $\Phi_k(x)$ непрерывна. В этом случае возможны три типа собственных функций распределения $\Phi_k(x)$:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^{x^a} e^{-u}u^{k-1}du, & x \geqslant 0,\ a > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^{|x|^{-a}} e^{-u}u^{k-1}du, & x < 0,\ a > 0, \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$(3) \qquad \Lambda_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{e^x} e^{-u}u^{k-1}du, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Будем говорить, что функция распределения $F(x)$ *принадлежит к области притяжения асимптотического распределения* $\Phi_k(x)$, если существуют последовательности положительных постоянных $\{a_n\}$ и постоянных $\{b_n\}$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{k,n}(a_n x + b_n) = \Phi_k(x)$$

во всех точках, где $\Phi_k(x)$ непрерывна. Гнеденко и Смирнов доказали также необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция распределения $F(x)$ принадлежала к области притяжения асимптотического распределения каждого типа.

2. Точное распределение экстремальных порядковых статистик в последовательности со случайной длиной. Пусть $N_1, N_2, \ldots$ — последовательность независимых от $X_1, X_2, \ldots$ случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения. Распределения этих случайных величин обозначим через

$$p_n(j) = P(N_n = j), \qquad j = 0, 1, \ldots \; n = 1, 2, \ldots$$

Экстремальной порядковой статистикой в последовательности со случайной длиной называем

$$Z_k^{(N_n)} = \begin{cases} Z_k^{(j)}, & N_n = j, \; j = k, k+1, \ldots, \\ Z_j^{(j)}, & N_n = j, \; j = 1, 2, \ldots, k-1, \\ 0, & N_n = 0. \end{cases}$$

Из формулы полной вероятности следует

$$\Phi_{k,N_n}(x) = P(Z_k^{(N_n)} < x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_n(j)\,\Phi_{\min(j,k),j}(x)$$

причем

$$\Phi_{0,0}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Известно, что функция распределения экстремальной порядковой статистики имеет вид

$$(4) \qquad \Phi_{k,j}(x) = \frac{j!}{(k-1)!(j-k)!}\int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{j-k}dt.$$

Если

$$A_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} p_n(j)\, \Phi_{j,j}(x),$$

тогда

$$\Phi_{k,N_n}(x) = A_n^{(k)} + \sum_{j=k}^{\infty} p_n(j) \frac{j!}{(k-1)!(j-k)!} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{j-k} dt =$$

$$= A_n^{(k)} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{F(x)} t^{k-1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} p_n(j) \frac{j!}{(j-k)!} (1-t)^{j-k} \right) dt.$$

Итак, мы получили точное распределение экстремальных порядковых статистик в последовательности со случайной длиной.

3. Предельные распределения экстремальных порядковых статистик в последовательности со случайной длиной. Перейдём теперь к иследованию предельных законов распределения

$$\Phi_k(x) = \lim_{n \to \infty} \Phi_{k,N_n}(a_n x + b_n),$$

при чем $a_n > 0$ и $-\infty < b_n < \infty$ надлежаще выбраны последовательности констант. Класс предельных законов распределения $\Phi_k(x)$ очень обширный, на что указывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимонезависимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$ и пусть при $n = 1, 2, \ldots$

$$p_n(j) = \begin{cases} 1 - 1/\sqrt{n}, & j = k, \\ 1/\sqrt{n}, & j = n, \\ 0, & j \neq k, n. \end{cases}$$

Тогда

$$\Phi_{k,N_n}(x) = p_n(k)\, \Phi_{k,k}(x) + p_n(n)\, \Phi_{k,n}(x) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) F^k_{(x)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt;$$

отсюда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_{k,N_n}(x) = F^k(x).$$

Дальше предположим, что последовательность $\{N_n\}$ выполняет следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(1-\varepsilon)n\leqslant j\leqslant(1+\varepsilon)n} p_n(j) = 1 \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Легко увидеть, что условие (5) эквивалентно условию

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_n}{n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если выполнено условие* (5), *то для того, чтобы при* $n \to \infty$, *постоянном* k *и надлежаще выбраных последовательностях констант* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ ($a_n > 0$ *и* $-\infty < b_n < +\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{k,N_n}(a_n x + b_n) = \Phi_k(x) \tag{7}$$

(*во всех точках, где* $\Phi_k(x)$ *непрерывна*), *где* $\Phi_k(x)$ — *собственный закон распределения, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = \lim_{n\to\infty} nF(a_n x + b_n) = v(x), \tag{8}$$

где $v(x)$ — *неубываюшая и неотрицательная функция определяемая уравнением*

$$\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{v(x)} e^{-y} y^{k-1}\,dy = \Phi_k(x) \tag{9}$$

Прежде чем прейдём к доказательству теоремы 2, докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если выполнено условие* (5), *то для постоянного* $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_n(j) \frac{j!}{(j-k)!\,n^k}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{j-k} = e^{-y} \tag{10}$$

почти равномерно для $y > 0$.

Доказательство. Легко увидеть, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_n(j) \frac{j!}{(j-k)!\,n^k}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{j-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{j<(1-\varepsilon)n\\ j>(1+\varepsilon)n}} p_n(j) \frac{j!}{(j-k)!\,n^k}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{j-k} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{(1-\varepsilon)n\leqslant j\leqslant(1+\varepsilon)n} p_n(j) \frac{j!}{(j-k)!\,n^k}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{j-k}, \quad j \geqslant k.$$

Если $y > 0$, то нетрудно заметить, что выражение

$$\frac{j!}{(j-k)!n^k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{j-k}$$

ограничено для достаточно больших n и любого j. Отсюда и из (5) следует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{j<(1-\varepsilon)n \\ j>(1+\varepsilon)n}} p_n(j)\frac{j!}{(j-k)!n^k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{j-k} = 0. \tag{11}$$

Ясно, что для больших n имеем

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^k\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{(1-\varepsilon)n} \sum_{(1-\varepsilon)n\leqslant j\leqslant(1+\varepsilon)n} p_n(j) \geqslant \\ \geqslant \sum_{(1-\varepsilon)n\leqslant j\leqslant(1+\varepsilon)n} p_n(j)\frac{j!}{(j-k)!n^k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{j-k} \geqslant \\ \geqslant \left(\frac{(1-\varepsilon)n-k+1}{n}\right)^k\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{(1+\varepsilon)n} \sum_{(1-\varepsilon)n\leqslant j\leqslant(1+\varepsilon)n} p_n(j).\end{aligned} \tag{12}$$

Если $n\to\infty$, то из (11) и (12), получаем почти равномерную сходимость

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^k e^{-(1-\varepsilon)y} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_n(j)\frac{j!}{(j-k)!n^k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{j-k} \geqslant \\ \geqslant (1-\varepsilon)^k e^{-(1+\varepsilon)y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^k e^{-(1-\varepsilon)y} \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_n(j)\frac{j!}{(j-k)!n^k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{j-k} \geqslant \\ \geqslant (1-\varepsilon)^k e^{-(1+\varepsilon)y}.\end{aligned}$$

Из того, что последние неравенства выполнены при всех $\varepsilon > 0$, получаем (10).

Доказательство теоремы 2. Если выполнено условие (5), то для любого k натурального

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} A_n^{(k)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} p_n(j) = 0;$$

отсюда

$$\lim_{n\to\infty} A_n^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Теперь покажем, что из (8) следует (7). Возьмём

$$\Phi_{k,N_n}(a_n x+b_n) = A_n^{(k)}+\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{F(a_n x+b_n)} t^{k-1}\left(\sum_{j=k}^{\infty} p_n(j)\frac{j!}{(j-k)!}(1-t)^{j-k}\right)dt$$

и положим $t = y/n$. Легко видеть, что

$$(14)\qquad \Phi_{k,N_n}(a_n x+b_n) =$$

$$= A_n^{(k)}+\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{nF(a_n x+b_n)} y^{k-1}\left(\sum_{j=k}^{\infty} p_n(j)\frac{j!}{(j-k)!n^k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{j-k}\right)dy.$$

Используя лемму 1 и формулы (8) и (13) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{k,N_n}(a_n x+b_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}A_n^{(k)}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{nF(a_n x+b_n)} y^{k-1}\left(\sum_{j=k}^{\infty} p_n(j)\frac{j!}{(j-k)!n^k}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{j-k}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{v(x)} e^{-y}y^{k-1}dy.$$

Осталость показать, что из (7) следует (8). Это следует из (9), (13), (14), и леммы 1. Теорема 2 доказана.

Основной целью настоящей работы было доказательство обобщённой теоремы Смирнова:

Теорема 3. *Предельные законы для последовательности экстремальных порядковых статистик* (k-*постоянное*) *в последовательности со случайной длинной, если выполнено условие* (5), *исчерпываются тремя типами* (1)-(3).

Теорема 3 следует из теоремы 2, а доказательство аналогично как в случае экстремальных порядковых статистик определенных для последовательности случайных величин с неслучайной длиной.

Области притяжения асимптотического распределения каждого типа, такие же, как в случае последовательности длины n. Они приведены в работе [2].

Класс распределений, которые исполняют условие (5), весьма обширный. Например, это условие исполняют: распределение

$$p_n(j) = \delta_{nj} = \begin{cases} 0, & n\neq j,\\ 1, & n=j,\end{cases}$$

пуассоновское распределение

$$p_n(j) = \frac{n^j}{j!} e^{-n}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

и другие распределения. Следует заметить, что условия (5) не исполняет распределение из примера 1.

Цитированная литература

[1] B. W. Gniedenko, *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire,* Annals of Mathematics 44 (1943), стр. 423-453.

[2] Н. В. Смирнов, *Предельные законы распределения для членов вариационного ряда,* Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова 25 (1949).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ВРОЦЛАВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Поступило в редакцю 30. 11. 1971

W. DZIUBDZIELA (Wrocław)

ROZKŁADY GRANICZNE EKSTREMALNYCH STATYSTYK POZYCYJNYCH W CIĄGU O LOSOWEJ DŁUGOŚCI

STRESZCZENIE

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}$ będzie ciągiem o losowej długości $N_n (N_n = 0, 1, \ldots)$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowej dystrybuancie $F(x)$. W pracy zdefiniowano statystyki pozycyjne w tym ciągu i znaleziono ich rozkłady. Przy założeniu, że $N_n/n \to 1$ według prawdopodobieństwa, pokazano, że rozkłady graniczne odpowiednio unormowanych ekstremalnych statystyk pozycyjnych mogą być tylko trzech typów (1)-(3). Rezultat ten jest uogólnieniem wyniku Smirnowa [2] dotyczącego ciągu zmiennych losowych o długości n.
