ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVIII (1973)

Quelques observations à propos de l'équation pré-Schröder

par Marek Kuczma (Katowice)

Sommaire. On étudie l'équation fonctionnelle (1) (dite l'équation pré-Schröder) et sa connection avec l'équation fonctionelle de Schröder (2). Ici $\omega\colon E \to E$ est une application d'un ensemble quelconque E dans lui méme, et $\varphi\colon E \to \Phi$ prend les valeurs dans un groupe commutatif Φ qui peut étre aussi muni d'un zéro. On indique une classe vaste de fonctions ω pour lesquelles les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes. On en tire quelques conséquences dans le cas où ω est une application continue d'un intervalle réel E dans lui méme.

§ 1. Soit E un ensemble quelconque et soit $\omega\colon E \to E$ une application de l'ensemble E dans lui-méme. Nous définissons les itérées ω_n de la fonction ω par les formules

$$\omega_0(x) = x, \quad \omega_{n+1}(x) = \omega\big(\omega_n(x)\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Alors les itérées ω_n sont définies dans l'ensemble E tout entier pour chaque indice entier non-négatif n.

Dans un travail récent [3] M. Z. Moszner a étudié l'équation fonctionnelle

$$\{\varphi[\omega(x)]\}^2 = \varphi(x)\varphi[\omega_2(x)], \quad x \in E, \tag{1}$$

qui s'appelle l'équation pré-Schröder. Les valeurs de φ peuvent se trouver dans un groupe commutatif Φ, possiblement muni d'un zéro avec la règle d'opération

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{pour tous } a \in \Phi.$$

Par exemple, Φ peut étre un corps commutatif.

Le nom *l'équation pré-Schröder* est dû au fait que toutes les solutions φ de l'équation fonctionnelle de Schröder

$$\varphi[\omega(x)] = \lambda\varphi(x), \tag{2}$$

où $\lambda \in \Phi$ est une constante, satisfont aussi à l'équation (1). L'implication converse en général n'est pas vraie: il existe des solutions φ de (1) qui ne satisfont pas à l'équation (2) avec aucune constante λ.

Cependant il existe des fonctions particulières ω pour lesquelles les équations (1) et (2) sont équivalentes. Telles sont par exemple les fonctions constantes $\omega(x) = \text{const}$, et la fonction identité $\omega(x) = x$. Dans [3] M. Z. Moszner montre aussi d'autres exemples de telles fonctions, mais en même temps il montre aussi que telles exemples sont peut-ètre exceptionnelles.

Dans la note présente nous généralisons un peu un de théoremes de M. Z. Moszner et nous indiquons plusieures fonctions ω pour lesquelles l'équation (1) n'implique pas l'équation (2).

§ 2. Dans l'ensemble E nous introduissons la relation d'équivalence ι. Nous disons que les points $x_1, x_2 \in E$ sont équivalentes, et nous écrivons $x_1 \iota x_2$, s'il existe des indices entiers non-négatifs n, m tels que $\omega_n(x_1) = \omega_m(x_2)$. Les éléments de l'ensemble quotient E/ι s'appellent les orbites. L'orbite qui contient le point x sera désignée par $C[x]$.

Le point $x_0 \in E$ s'appelle un *point fixe d'ordre* k ($k \geqslant 1$) si $\omega_k(x_0) = x_0$ et $\omega_l(x_0) \neq x_0$ pour $0 < l < k$. Pour chaque entier positif k désignons par E_k l'ensemble de tels points $x \in E$ pour lesquelles l'orbite $C[x]$ contient un point fixe d'ordre k. Nous posons aussi

$$E_0 = E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Les ensembles E_k sont disjointes. De plus

$$x \in E_k \text{ implique } C[x] \subset E_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

(vois [1], [2]).

La démonstration du thèoreme suivant est fondée sur les mêmes idées qui interviennent dans la partie finale du travail [3].

Théorème. *Soit E un ensemble quelconque, Φ un groupe commutatif qui peut être muni aussi d'un zéro, et $\omega: E \to E$ une application de E dans lui-même. Si $E_k \neq \emptyset$ pour un entier pair k et l'ensemble E ne se réduit pas à une seule orbite, alors les équations* (1) *et* (2) *pour les fonctions $\varphi: E \to \Phi$ ne sont pas équivalentes.*

Démonstration. Fixons un $x_0 \in E_k$ et un $a \in \Phi$, $a \neq 0$. Pour $x \in C[x_0]$ nous posons

$$\varphi(x) = (-1)^{n-m} a, \tag{4}$$

où n et m sont choisis d'après la relation $\omega_n(x_0) = \omega_m(x)$. Il s'ensuit du Lemme 0.2 de [2] (v. aussi [1]) que le deuxième membre de (4) ne dépend pas du choix particulier d'indices m, n. Posons encore $\varphi(x) = a$ pour $x \in E \setminus C[x_0]$. On vérifie sans peine que la fonction φ ainsi définie satisfait à l'équation (1), mais pas à l'équation (2) quel que soit la constante λ.

§ 3. Maintenant nous allons tirer quelques conséquences de notre théorème pour les fonctions continues ω, dans le cas, où E est un intervalle réel.

PROPOSITION 1. *Soit $E \subset (-\infty, \infty)$ un intervalle, Φ un groupe commutatif qui peut être muni aussi d'un zéro, et $\omega: E \to E$ une application continue. S'il existe dans E un point fixe x_0 d'un ordre $k \geqslant 2$ de ω, alors les équations* (1) *et* (2) *pour les fonctions $\varphi: E \to \Phi$ ne sont pas équivalentes.*

Démonstration. D'après un théorème de M. A. N. Šarkovskiĭ [4] la fonction ω doit avoir dans E un point fixe x_1 d'ordre 1 et un point fixe x_2 d'ordre 2. Alors $x_2 \in E_2$, ce qui signifie que $E_2 \neq \emptyset$. D'autre côté, $x_1 \in E_1$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Alors $x_1 \notin C[x_2]$ en vertu de (3). Notre proposition est donc une conséquence du théorème.

LEMME. *Soit $E \subset (-\infty, \infty)$ un intervalle et $\omega, \sigma: E \to E$ deux applications continues qui ne sont pas constantes dans aucun intervalle. Alors la composition $\omega \circ \sigma$ n'est pas constante dans aucun intervalle.*

Démonstration. Supposons, par contre, que $\omega \circ \sigma$ est constante dans un intervalle $I \subset E$. La fonction continue σ n'étant pas constante dans I, l'ensemble $\sigma(I)$ est un intervalle, et il est de même pour l'ensemble $\omega[\sigma(I)]$, ce qui montre que $\omega \circ \sigma$ ne peut pas être constante dans I.

PROPOSITION 2. *Soit $E \subset (-\infty, \infty)$ un intervalle, Φ un groupe commutatif qui peut être muni aussi d'un zéro, et $\omega: E \to E$ une application continue qui n'est pas constante dans aucun intervalle. Si ω n'a pas de points fixes dans E, alors les équations* (1) *et* (2) *pour les fonctions $\varphi: E \to \Phi$ ne sont pas équivalentes.*

Démonstration. It s'ensuit des hypothèses de notre proposition que $E = E_0$ et il reste de montrer que l'ensemble E ne se réduit pas à une seule orbite. Supposons que cela n'est pas vrai, alors il y a un $x_0 \in E$ tel que $E = C[x_0]$. D'autres termes

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{mn}, \tag{5}$$

où

$$A_{mn} = \{x \in E\colon \omega_m(x) = \omega_n(x_0)\}.$$

La fonction ω étant continue, chaque ensemble A_{mn} est fermé. Il résulte du Lemme que pour chaque $m \geqslant 0$ la fonction ω_m n'est pas constante dans aucun intervalle. Alors les ensembles A_{mn} n'ont pas de points intérieurs. Ils sont donc non-denses et en vertu de (5) E est un ensemble de la première catégorie. Mais c'est impossible vu le théorème de Baire.

Les Propositions 1 et 2 au-dessus montrent que pour la plupart de fonctions continues $\omega: E \to E$, où E est un intervalle, les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes.

Travaux cités

[1] M. Kuczma, *Third note on the general solution of a functional equation*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), p. 179-192.

[2] — *Functional equations in a single variable*, Monografie Mat. 46, Warszawa 1968.

[3] Z. Moszner, *Sur un problème relatif aux équations de Pré-Schröder*, Ann. Polon. Math. 27(1973), p. 289-292.

[4] А. Н. Шарковский, *Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*, Украин. Мат. Ж. (16) (1964), № 1, p. 64-71.

Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1971