ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIV (1984)

Une caractérisation des fonctions exponentielles avec les exposants non linéaires

par HALINA ŚWIATAK (Montréal)

Résumé. On demontre le théorème suivant:
Si les fonctions f ($f(x) \not\equiv 0$) et g satisfont l'équation

$$f(x-y) = f(x)f(y)g(P(x-y)-P(x)-P(y))$$

où P: $R \to R$, $P(R) = R$, $P(0) = 0$, $P \in C^3(R)$ et P est une fonction strictement monotone, la continuité de f ou de g au point $x = 0$ implique

$$f(x) = Ae^{\alpha P(x)}, \quad g(x) = \frac{1}{A}e^{\alpha x}$$

où A ($A \neq 0$) et α sont des constantes arbitraires.

On peut démontrer (H. Świątak, [1]) que si les fonctions f ($f(x) \equiv 0$) et g satisfont l'équation

$$f(x-y) = f(x)f(y)g\left((x-y)^{2m}-x^{2m}-y^{2m}\right) \tag{1}$$

et si du moins une d'eux est continue en $x = 0$, on a

$$f(x) = Ae^{\alpha x^{2m}}, \quad g(x) = \frac{1}{A}e^{\alpha x},$$

où A ($A \neq 0$) et α sont des constantes arbitraires.

La démonstration du résultat semblable pour l'équation

$$f(x-y) = f(x)f(y)g\left((x-y)^{2m+1}-x^{2m+1}-y^{2m+1}\right) \tag{2}$$

est beaucoup plus simple et peut être répétée sans aucun changement essentiel pour les équations

$$f(x-y) = f(x)f(y)g\left(P(x-y)-P(x)-P(y)\right), \tag{3}$$

où P: $R \to R$, $P(R) = R$, $P(0) = 0$, $P \in C^3(R)$ et P est une fonction strictement monotone.

LEMME 1. *Si les fonctions f ($f(x) \not\equiv 0$) et g satisfont l'équation* (3), *où P: $R \to R$, $P(R) = R$, $P(0) = 0$ et P est une fonction continue et strictement monotone, la continuité de f et g au point $x = 0$ implique que f et g sont continues partout.*

Démonstration. Remarquons au commencement que la condition $f(x) \not\equiv 0$ implique $f(x)g(x) \neq 0$ pour tout $x \in R$. En mettant $x = 2y$ dans (3), on obtient

$$f(2y)g(-P(2y)) \equiv 1 \tag{4}$$

alors les deux fonctions f et g sont continues au point x ($x \in R$). Maintenant (3) implique

$$\lim_{y \to 0} f(x-y) = f(x) \lim_{y \to 0} f(y) \lim_{y \to 0} g\big(P(x-y) - P(x) - P(y)\big) = f(x) f(0) g(0) = f(x)$$

c'est-à-dire la fonction f est continue partout. La continuité de f et l'égalité (4) impliquent la continuité de g parce que P est une transformation continue et strictement monotone de R sur R.

Lemme 2. *Toutes les solutions continues F, G, de l'équation*

$$F(x-y) = F(x) + F(y) + G\big(P(x-y) - P(x) - P(y)\big), \tag{5}$$

où $P\colon R \to R$, $P(R) = R$, $P(0) = 0$, $P \in C^3(R)$ et P est une fonction strictement monotone sont de la forme

$$F(x) = \alpha P(x) + \beta, \qquad G(x) = \alpha x - \beta, \tag{6}$$

où α et β sont des constantes arbitraires.

Démonstration. En multipliant (5) par $-P'(x-y) - P'(y)$ et en intégrant le résultat par rapport à y de a à b ($a < b$) on obtient

$$J_1(x) = J_2(x) F(x) + J_3(x) + J_4(x), \tag{7}$$

où

$$J_1(x) = \int_{x-a}^{x-t} [P'(z) + P'(x-z)] F(z)\, dz,$$

$$J_2(x) = P(x-b) - O(x-a) - P(b) + P(a),$$

$$J_3(x) = -\int_{x-a}^{x-b} [P'(x-y) + P'(y)] F(y)\, dy,$$

$$J_4(x) = \int_{P(x-a) - P(x) - P(a)}^{P(x-b) - P(x) - P(b)} g(z)\, dz.$$

On peut voir facilement que les fonctions J_1, J_2, J_3, J_4, sont des fonctions de la classe C^1. La supposition que P est une fonction strictement monotone implique $J_2(x) \neq 0$ pour tous $x \in R$ et en conséquence, F est une fonction de la classe C^1.

Maintenant on déduit, en mettant $x = 2y$ dans (5), que la différentiabilité de F entraîne la différentiabilité de G. En conséquence, l'égalité (7) entraîne $F \in C^2(R)$ et (5) avec $x = 2y$ implique $G \in C^2(R)$.

En différentiant (5) par rapport à x et y en en mettant plus tard $y = 0$ on obtient

$$F''(x) = G'(0)\,P''(x),$$

d'où

$$F(x) = \alpha P(x) + \gamma x \qquad \text{avec} \qquad \alpha = G'(0).$$

En mettant cette expression pour F dans (5) et en différentiant l'égalité qui en résulte par rapport à y pour $y = 0$ on déduit que $\gamma = 0$. En substituant $F(x) = \alpha P(x) + \beta$ dans (5) et en mettant $x = 2y$ on obtient

$$G(x) = \alpha x - \beta.$$

THÉORÈME. *Si les fonctions f ($f(x) \not\equiv 0$) et g satisfont l'équation* (3) *dans laquelle P: $R \to R$, $P(R) = R$, $P(0) = 0$, $P \in C^3(R)$ et P est une fonction strictement monotone, la continuité de f ou de g au point $x = 0$ implique*

$$f(x) = Ae^{\alpha P(x)}, \qquad g(x) = \frac{1}{A}e^{\alpha x}, \tag{8}$$

où A ($A \neq 0$) et α sont des constantes arbitraires.

Démonstration. Le lemme 1 entraîne la continuité des fonctions f et g pour tout $x \in R$. La condition $f(x) \not\equiv 0$ et (3) impliquent $f(x) \neq 0$ dans R et, parce que f est une fonction continue, $\operatorname{sgn} f(x) = \text{const}$. Par (3), $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x) = \text{const}$. Alors on peut considerer seulement les solutions continues positives de (3). Si f, g est une telle solution, F, G définies par les égalités

$$F(x) = \ln f(x), \qquad G(x) = \ln g(x) \tag{9}$$

satisfont l'équation (5) est, par le lemme 2, F et G sont de la forme (6). Maintenant (9) entraîne que les solutions continues positives f, g de (3) sont de la forme (8) avec $A = e^{\beta}$. Par les remarques précédentes la continuité de g au point $x = 0$ implique que f et g sont de la forme (8).

Remarque. L'equation (2) est un cas special de (3). Alors le Théorème démontré ici et le résultat de [1] pour l'équation (1) impliquent que si f et g satisfont l'équation

$$f(x-y) = f(x) f(y)\, g\big((x-y)^k - x^k - y^k\big)$$

et si f où g est continue au point $x = 0$, on a

$$f(x) = Ae^{\alpha x^k}, \qquad g(x) = \frac{1}{A}e^{\alpha x},$$

où A ($A \neq 0$) et α sont des constantes arbitraires.

Problème. Les équations (3) sont satisfaites par les fonctions (8). Les fonctions (8) sont-elles les seules solutions de (3) si l'on exige seulement que P soit une transformation continue de R sur R?

Référence

[1] H. Świątak, *A characterization of exponential functions with non-linear exponents*, Canadian Math. Bull. 18 (1975), 277–281.

Reçu par la Rédaction le 3. 05. 1978