COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLIII 1980 FASC. 2

ÜBER DIE VERTEILUNG DER PYTHAGORÄISCHEN DREIECKE

VON

JOHANN DUTTLINGER (BRÄUNLINGEN)
UND WOLFGANG SCHWARZ (FRANKFURT AM MAIN)

1. Einleitung. Ein *pythagoräisches Dreieck* ist ein Tripel $\langle a, b, c\rangle$ natürlicher Zahlen, die $a \leqslant b$ und $a^2+b^2 = c^2$ erfüllen; das Dreieck $\langle a, b, c\rangle$ heißt *primitiv*, wenn a, b und c teilerfremd sind([1]). Für die Anzahl $P(N)$ der primitiven pythagoräischen Dreiecke $\langle a, b, c\rangle$ vom Flächeninhalt $\frac{1}{2}ab \leqslant N$ zeigten Lambek und Moser [3]

$$P(N) = cN^{1/2}+O(N^{1/3})$$

mit der Konstanten

$$c = \{2\pi^5\}^{-1/2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}53134. \tag{1.1}$$

Wie Lambek und Moser ausführen, legt die Tafel [4] eine asymptotische Formel

$$P(N) = cN^{1/2}-c'N^{1/3}+R(N) \tag{1.2}$$

mit einem Rest $R(N) = o(N^{1/3})$ nahe, wobei die Konstante c' ungefähr 0,295 sein sollte.

Wild [9] zeigte, daß dies ziemlich genau zutrifft; er bewies nämlich (1.2) mit der Konstanten([2])

$$c' = \frac{|\zeta(1/3)|}{\zeta(4/3)}\,\frac{1+2^{-1/3}}{1+4^{-1/3}} \approx 0{,}29746 \tag{1.3}$$

und dem Restglied

$$R(N) = O(N^{1/4}\log N). \tag{1.4}$$

([1]) Parameterdarstellungen, die sämtliche pythagoräischen (bzw. sämtliche primitiven pythagoräischen) Dreiecke in gewissen Integritätsbereichen mit eindeutiger Faktorzerlegung geben, findet man bei K. K. Kubota, American Mathematical Monthly 79 (1972), S. 503-505, bzw. N. Sexhauer, ibidem 73 (1966), S. 829-834, und ibidem 75 (1968), S. 278-279.

([2]) $\zeta(4/3) \approx 3{,}600938$, $\zeta(1/3) \approx -0{,}973360$, $\Gamma(1/4) \approx 3{,}625610$ (alle Werte gerundet).

Der Beweis wird auf die Bestimmung der Anzahl $L(N)$ der *Gitterpunkte* (x, y) im ebenen Bereich

$$xy(x^2-y^2) < N, \quad 0 < y < x, \tag{1.5}$$

zurückgeführt. Nach [9] ist

$$L(N) = dN^{1/2} - d'N^{1/3} + F(N) \tag{1.6}$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} d &= \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\{4\sqrt{2\pi}\}^{-1} \approx 1{,}31103, \\ d' &= \left|\zeta\left(\frac{1}{3}\right)\right|\{1+2^{-1/3}\} \approx 1{,}74592, \end{aligned} \tag{1.7}$$

und dem Restglied

$$F(N) = O(N^{1/4}). \tag{1.8}$$

In dieser Note soll gezeigt werden, daß in (1.2) ein drittes Hauptglied von der Gestalt $c''N^{1/4}$ *nicht* auftritt. Dies beruht insbesondere auf einer Verschärfung der Abschätzung (1.8). Genauer wird gezeigt:

(1) *Es gilt die asymptotische Formel* (1.2) *mit dem schärferen Restglied*

$$R(N) = O(N^{1/4}\exp[-\gamma\sqrt{\log N}]), \quad \gamma > 0. \tag{1.4'}$$

(2) *Unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung gilt* (1.2) *mit dem Restglied*

$$R(N) = O(N^{5/22+\varepsilon}). \tag{1.4''}$$

(3) *Die asymptotische Formel* (1.6) *trifft zu mit dem Restglied*

$$F(N) = O(N^{1/6}\log N). \tag{1.8'}$$

2. Beweis von (1.8'). Der diesem speziellen Problem angepaßte Beweisansatz ist derselbe wie bei Wild [9]. In $0 < y < x$ ist die Kurve $xy(x^2-y^2) = N$ symmetrisch zu der Geraden $y = ax$, wobei

$$a = \sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^{-1} = \sqrt{2}-1 \tag{2.1}$$

ist; auf dieser Geraden liegen keine Gitterpunkte. Bei Spiegelung an dieser Geraden geht das ganzzahlige Gitter $\Lambda_0 = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ in das von den Vektoren $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ und $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ erzeugte Gitter

$$\Lambda = \left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,n,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,n'\right);\ n, n' \in \mathbf{Z},\ n \equiv n' \pmod 2\right\}$$

über. Daher ist

$$L(N) = \sum_y \sum_x 1$$

mit den Summationsbedingungen $0 < y < Y$, $x > a^{-1}y$, $xy(x^2 - y^2) < N$, $(x, y) \in \Lambda_0 \cup \Lambda$, wobei

$$Y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} N^{1/4}$$

zu setzen ist. Die kubische Gleichung $x^3 - xy^2 - N/y = 0$ hat für jedes y in $0 < y < Y$ genau eine reelle positive Wurzel $\xi(y)$, die mit der Diskriminante

$$D = \frac{1}{4}\left(\frac{N}{y}\right)^2 - \frac{1}{27} y^6$$

durch

$$\xi(y) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{N}{y} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{N}{y} - \sqrt{D}}$$

gegeben wird. Demnach wird

$$L(N) = \sum_{0<y<Y} \sum_{\substack{a^{-1}y<x\leq\xi(y) \\ (x,y)\in\Lambda_0\cup\Lambda}} 1.$$

Mit den Abkürzungen $N' = \sqrt{2}N$, $N'' = \sqrt{2}N - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\varphi(\beta) = \beta - [\beta] - \frac{1}{2}$ folgt nach kurzer Rechnung

$$L(N) = H_1 - H_2 - F_1 + F_2 \tag{2.2}$$

mit den Hauptgliedern

$$H_1 = \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N}} \xi(y) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N'\cup N''}} \xi(y),$$

$$H_2 = \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N}} a^{-1}y + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N'\cup N''}} a^{-1}y,$$

und mit den Fehlergliedern

$$F_1 = \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N}} \varphi(\xi(y)) + \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N'}} \varphi\left(\frac{\xi(y)}{\sqrt{2}}\right) + \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N''}} \varphi\left(\frac{\xi(y)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.3}$$

und

$$F_2 = \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N}} \varphi(a^{-1}y) + \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N'}} \varphi\left(a^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \sum_{\substack{y<Y \\ y\in N''}} \varphi\left(a^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right). \tag{2.4}$$

Leicht ergibt sich für den von den Termen $a^{-1}y$ stammenden Teil H_2 des Hauptglieds in (2.2) die Asymptotik

$$H_2 = a^{-1}Y^2 - a^{-1}Y\psi(Y) - \frac{1}{2}\sqrt{2}a^{-1}Y\psi(\sqrt{2}Y) + O(1). \tag{2.5}$$

Im Hauptglied H_1 wird die y-Summation bei $N^{1/5}$ aufgeteilt; im ersten Bereich wird die für $0 < y < Y$ gültige Näherung

$$\xi(y) = \left(\frac{N}{y}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{y^7}{N}\right)^{1/3} + O(y^{23/3}N^{-5/3}) \tag{2.6}$$

verwendet. Die beim Einsetzen entstehenden Summen vom Typ $\sum y^\varrho$ können mit der Eulerschen Summenformel ausgewertet werden (man vgl. [5] und [6]). Man erhält z.B.

$$\sum_{y<N^{1/5}} \xi(y) = \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{10}\right) N^{1/3} + \frac{3}{2} N^{7/15} - \psi(N^{1/5}) N^{4/15} + O(N^{2/15}).$$

Im Bereich $N^{1/5} < y < Y$ werden die Summen mit der Eulerschen Summenformel (vgl. etwa [7], S. 195) durch die entsprechenden Integrale ersetzt. Das entstehende Integral $\int_0^Y \xi(u)du$ wird als Flächeninhalt gedeutet, zur Auswertung von $\int_0^{N^{1/5}} \xi(u)du$ wird die Näherung (2.6) benutzt; wegen der Monotonie der Ableitung $\xi'(u)$ in $0 < u \leqslant Y$ kann, etwa nach dem zweiten Mittelwertsatz, das Integral

$$\left|\int_{N^{1/5}}^{Y} \psi(u)\xi'(u)du\right| \leqslant 2 \sup_{N^{1/5}\leqslant u\leqslant Y} |\xi'(u)| = O(N^{1/15})$$

abgeschätzt werden. Insgesamt ergibt sich schließlich nach längerer Rechnung, die jedoch Routine ist,

$$\sum_{\substack{y<Y\\ y\in N}} \xi(y) = \frac{1}{4} N^{1/2} \frac{\Gamma^2(1/4)}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} a^{-1}Y^2 - \psi(Y)\xi(Y) + \zeta\left(\frac{1}{3}\right) N^{1/3} + O(N^{2/15}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{y<Y\\ y\in N'\cup N''}} \xi(y) = \frac{1}{4} N^{1/2} \frac{\Gamma^2(1/4)}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} a^{-1}Y^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{2}\psi(\sqrt{2}Y)\xi(Y) + 2^{-1/3}\zeta\left(\frac{1}{3}\right) N^{1/3} + O(N^{2/15})$$

und es folgt

$$L(N) = dN^{1/2} - d'N^{1/3} + O(N^{2/15}) - F_1 + F_2. \tag{2.7}$$

3. Abschätzung der Fehlerglieder F_1 und F_2. Zur Behandlung der Fehlerglieder wird ein elementarer Hilfssatz vom Typ der Van der Corput-Abschätzungen aus [10] verwendet.

LEMMA 1. *Hat die reellwertige Funktion f im Intervall $[Q, Q']$ eine stetige zweite Ableitung, die den Bedingungen*

$$\frac{1}{B} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{l}{B} \quad \textit{mit } B > 2,\ l \geqslant 1 \tag{3.1}$$

genügt, so gilt

$$\sum_{Q<n\leqslant Q'} \psi(f(n)) = O\left(\{2l^2(Q'-Q)\log B + lB\}B^{-1/3}\right). \tag{3.2}$$

Zur Anwendung dieses Hilfssatzes benötigt man eine Ungleichung für $\xi''(y)$. Eine etwas langwierige Rechnung ergibt für $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant Y$ mit positiven Konstanten $c_1 < c_2$ die Ungleichung

$$c_1 y^{-7/3} N^{1/3} \leqslant \xi''(y) \leqslant c_2 y^{-7/3} N^{1/3}. \tag{3.3}$$

Um Lemma 1 anwenden zu können, zerlegen wir das Intervall $0 < y < Y$ in Teilintervalle

$$N^{1/7}\cdot 2^k < y \leqslant N^{1/7}\cdot 2^{k+1}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant K$$

(und ein Restintervall), wobei K so bestimmt wird, daß

$$N^{1/7}\cdot 2^{K+1} \leqslant Y \leqslant N^{1/7}\cdot 2^{K+2}$$

ist. Wegen (3.3) können die Summen über die Teilintervalle mit Hilfe von Lemma 1 abgeschätzt werden; man erhält etwa

$$\sum_{0<y<Y} \psi(\xi(y)) \ll \sum_{k=0}^{K+1} \{N^{1/7}\cdot 2^{2k/9}\log N + 2^{14k/9}\} \ll N^{1/6}\log N. \tag{3.4}$$

Die restlichen Summen in (2.3) lassen sich analog behandeln und man erhält

$$F_1 = O(N^{1/6}\log N). \tag{3.5}$$

Zur Abschätzung des Fehlergliedes F_2 verwenden wir die für $x \notin Z$ gültige Darstellung (man vgl. etwa [2])

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{-M\leqslant m\leqslant M \\ m\neq 0}} \frac{1}{m} \exp[2\pi i m x] + O\left(\frac{1}{M\|x\|}\right), \tag{3.6}$$

wobei $M > 0$ beliebig ist und

$$\|x\| = \operatorname*{Min}_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$$

gesetzt wird. Da a^{-1} eine quadratische Irrationalzahl ist, ergibt der Liouville'sche Satz die Ungleichung $\|a^{-1}n\| > c_3(a)n^{-1}$, und für $n, n' \in N$, $n \neq n'$, die Ungleichung

$$\big|\|a^{-1}n\| - \|a^{-1}n'\|\big| > c_4\{\operatorname{Max}(n, n')\}^{-1}.$$

Hieraus erhält man

$$\sum_{0<n\leqslant N} \frac{1}{\|a^{-1}n\|} \leqslant c_5 N \sum_{l\leqslant c_6 N} \frac{1}{l} = O(N \log N). \tag{3.7}$$

Benützt man noch die bekannte Abschätzung

$$\sum_{\nu_1 \leqslant n \leqslant \nu_2} \exp[2\pi i m a^{-1} n] = O\left(\frac{1}{\|ma^{-1}\|}\right),$$

so folgt aus (3.6) mit $M = Y$ und (3.7) die Abschätzung

$$\sum_{0<n<Y} \psi(a^{-1}n) = O(\log^2 N).$$

Entsprechende Abschätzungen der restlichen Summen in (2.4) ergeben

$$F_2 = O(\log^2 N). \tag{3.8}$$

Aus (2.7), (3.5) und (3.8) folgt (1.8').

4. Beweis von (1.4') und (1.4''). Nach [3] wird die Anzahl $L'(N)$ der *primitiven* Gitterpunkte, die (1.5) erfüllen, gegeben durch

$$L'(N) = \sum_{r \leqslant N^{1/4}} \mu(r) L(Nr^{-4}). \tag{4.1}$$

Die Abbildung $n \mapsto L(n)$ ist eine monoton nichtfallende Funktion mit abzählbar vielen Sprungstellen $s_1 < s_2 < \ldots$ und den Sprunghöhen $h(1)$, $h(2), \ldots$; somit läßt sich $L(N)$ in der Gestalt

$$L(N) = \sum_{s_j \leqslant N} h(j) \tag{4.2}$$

schreiben. Sei $A = N^{1/4}$ und $B < A$ geeignet gewählt. Die Dirichletsche Zerlegung (man vgl. [7], S. 112-113, und besonders [8])

$$L'(N) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_3$$

mit

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{r \leqslant B} \mu(r) L(Nr^{-4}), \qquad \sum\nolimits_2 = \sum_{s_j \leqslant NB^{-4}} h(j) \sum_{r \leqslant (N/s_j)^{1/4}} \mu(r),$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{s_j \leqslant NB^{-4}} h(j) \sum_{r \leqslant B} \mu(r)$$

ermöglicht in Verbindung mit der *unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung* gültigen Abschätzung

$$\sum_{r\leqslant y} \mu(r) = O(y^{1/2+\varepsilon}), \tag{4.3}$$

folgende Abschätzungen für $\sum_1$, $\sum_2$ und $\sum_3$.

Aus (1.6), (1.8′) und (4.3) folgt nach kurzer Rechnung

$$\sum\nolimits_1 = \frac{d}{\zeta(2)} N^{1/2} - \frac{d'}{\zeta(4/3)} N^{1/3} + O\left\{\left\{\left(\frac{N}{B^3}\right)^{1/2} + \left(\frac{N^2}{B^5}\right)^{1/6} + N^{1/6}B^{1/3}\right\} N^\varepsilon\right\}.$$

Für $\sum_3$ erhält man leicht (mit (4.3) und (1.6))

$$\sum\nolimits_3 \ll (NB^{-3})^{1/2} N^\varepsilon.$$

Aus (4.2) und (1.6) folgt durch partielle Summation

$$\sum_{s_j\leqslant D} h(j) s_j^{-1/8} \ll D^{3/8}.$$

Somit wird

$$\sum\nolimits_2 \ll \sum_{s_j\leqslant NB^{-4}} h(j) \left(\frac{N}{s_j}\right)^{1/8} N^\varepsilon \ll (NB^{-3})^{1/2} N^\varepsilon.$$

Die Wahl $B = N^{2/11}$ führt nun zu (1.4″), wenn man noch die Formel

$$P(N) = \sum_{i\geqslant 0} (-1)^i L'(N\cdot 4^{-i}) \tag{4.4}$$

aus [3] verwendet.

Ganz entsprechend folgt (1.4′) wenn man statt (4.3) die wohlbekannte Abschätzung

$$\sum_{r\leqslant y} \mu(r) = O\left(y \exp\left[-\gamma\sqrt{\log y}\right]\right) \tag{4.5}$$

verwendet.

LITERATURNACHWEIS

[1] W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, Teil II, Wien 1961.

[2] M. N. Huxley, *The distribution of prime numbers*, Oxford 1972.

[3] J. Lambek and L. Moser, *On the distribution of Pythagorean triangles*, Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), S. 73-83.

[4] F. L. Miksa, *Table of primitive Pythagorean triangles with area up to* 10^9 *in order of increasing area*, nicht veröffentlicht.

[5] H. E. Richert, *Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. I*, Mathematische Zeitschrift 56 (1952), S. 21-32.

[6] — *Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. II*, ibidem 58 (1953), S. 71-84.
[7] W. Schwarz, *Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie*, B. I. Mannheim 1969.
[8] J. P. Tull, *Dirichlet multiplication in lattice point problems. I, II*, Duke Mathematical Journal 26 (1959), S. 73-80; Pacific Journal of Mathematics 9 (1959), S. 601-615.
[9] R. E. Wild, *On the number of primitive Pythagorean triangles with area less than n*, Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), S. 85-91.
[10] I. M. Winogradow, *Elemente der Zahlentheorie*, München 1956.

Reçu par la Rédaction le 3. 11. 1977