ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1963)

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

O CZYNNIKU ANAMORFOZUJĄCYM, SPROWADZAJĄCYM RÓWNANIE $F(x, y, z, w) = 0$ DO POSTACI KANONICZNEJ CAUCHY'EGO Z CZTEREMA ZMIENNYMI

Pojęcie czynnika anamorfozującego zostało określone w pracach [1], [2]. W pracy tej zajmiemy się czynnikami anamorfozującymi, zależnymi od trzech zmiennych, sprowadzającymi równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do jednej z następujących postaci:

$$f(z)+g(x)h(y, w)+k(y, w) = 0, \tag{1}$$

$$f(z, w)+g(x)h(y)+k(y) = 0, \tag{2}$$

$$f(z)+g(x, w)h(y)+k(y) = 0. \tag{3}$$

I. Czynnik anamorfozujący, sprowadzający równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci (1).

1. Czynnik postaci $\varphi(x, y, z)$. W tym przypadku równanie ma postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y, z)}[f(z)+g(x)h(y, w)+k(y, w)] = 0. \tag{4}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli w kostce K, określonej nierównościami: $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, $w_0 \leqslant w \leqslant w_1$, funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu piątego, oraz $F_w \neq 0$, $P_z \neq 0$ i $R_x \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_w$, a $R \equiv P/P_z$, to na to, by funkcja F miała postać* (4) *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \ln|F_w| \equiv 0, \tag{5a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \ln|P_z| \equiv 0, \tag{5b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \ln|P_z| \equiv 0, \tag{5c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial w} \ln|R_x| \equiv 0, \tag{5d}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|R_x| \equiv 0, \tag{5e}$$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać (9).

Dowód konieczności. Z istnienia piątych pochodnych cząstkowych funkcji F oraz z twierdzenia o różniczkowalności uogólnionych wielomianów nomograficznych [3] wynika, że funkcje $\varphi(x,y,z)$, $f(z)$, $g(x)$, $h(y,w)$, $k(y,w)$ są pięciokrotnie różniczkowalne. Łatwo zatem sprawdzić, że warunki (5) są konieczne.

Dowód dostateczności. Z (5a) otrzymujemy $F_w \equiv A(x,y,w)\times \times B(x,y,z)$ oraz

$$F \equiv B(x,y,z)\int A(x,y,w)dw + C(x,y,z). \tag{6}$$

Z (5b) i (5c) mamy

$$\frac{C}{B} \equiv D(z)E(x,y)+G(x,y). \tag{7}$$

Z (5d) i (5e) wynika, że

$$G(x,y)+\int A(x,y,w)dw \equiv E(x,y)[H(x)L(y,w)+M(y,w)]. \tag{8}$$

Z tożsamości (6), (7) i (8) wynika, że funkcja F ma postać

$$F \equiv B(x,y,z)E(x,y)[D(z)+H(x)L(y,w)+M(y,w)].$$

Podstawiając: $\varphi(x,y,z) \equiv 1/B(x,y,z)E(x,y)$, $f(z) \equiv D(z)$, $g(x) \equiv H(x)$, $h(y,w) \equiv L(y,w)$, $k(y,w) \equiv M(y,w)$, otrzymujemy funkcję F w postaci (4). Warunki istnienia czynnika postaci $\varphi(x,z,w)$ otrzymujemy zamieniając miejscami zmienne y i w w twierdzeniu 1.

Z postaci funkcji F wynika tożsamość

$$F_w(x,y,z,w)P_z(x,y,\zeta,w) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\varphi(x,y,z)}[g(x)h_w(y,w)+k_w(y,w)]\frac{f'(\zeta)}{g(x)h_w(y,w)+k_w(y,w)},$$

gdzie ζ jest dowolną liczbą z przedziału $\langle z_0, z_1\rangle$. Wstawiając $f'(\zeta) = C$ i przekształcając otrzymujemy

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{C}{F_w(x,y,z,w)P_z(x,y,\zeta,w)}. \tag{9}$$

Stąd wynika

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja $F(x,y,z,w)$ spełnia założenia twierdzenia 1 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci $\varphi(x,y,z)$, sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci* (1), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

2. Czynnik postaci $\varphi(y, z, w)$. W tym przypadku równanie ma postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(y, z, w)}[f(z)+g(x)h(y, w)+k(y, w)] = 0. \tag{10}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu 1, funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego, oraz $F_x \neq 0$ i $P_z \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_x$, to na to, by funkcja F miała postać* (10) *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln|F_x| \equiv 0, \tag{11a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial w}\ln|F_x| \equiv 0, \tag{11b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\ln|F_x| \equiv 0, \tag{11c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\ln|P_z| \equiv 0, \tag{11d}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial w}\ln|P_z| \equiv 0, \tag{11e}$$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać (14).

Dowód konieczności jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1.

Dowód dostateczności. Z (11a), (11b) i (11c) otrzymujemy $F_x \equiv A(x)B(y, z, w)$ oraz

$$F \equiv B(y, z, w)\int A(x)dx + C(y, z, w). \tag{12}$$

Z (11d) i (11e) mamy

$$C(y, z, w) \equiv B(y, z, w)[D(z)E(y, w)+G(y, w)]. \tag{13}$$

Wstawiając (13) w (12) otrzymujemy

$$F \equiv B(y, z, w)E(y, w)\left[D(z)+\int A(x)dx\cdot\frac{1}{E(y, w)}+\frac{G(y, w)}{E(y, w)}\right];$$

dla $\varphi(y, z, w) \equiv \dfrac{1}{B(y, z, w)E(y, w)}$, $g(x) \equiv \int A(x)dx$, $h(y, w) \equiv \dfrac{1}{E(y, w)}$, $k(y, w) \equiv \dfrac{G(y, w)}{E(y, w)}$ otrzymujemy funkcję F w postaci (10).

Z postaci funkcji F wynika tożsamość

$$F_x(x, y, z, w)P_z(x, y, \zeta, w) \equiv \frac{1}{\varphi(y, z, w)}g'(x)h(y, w)\cdot\frac{f'(\zeta)}{g'(x)h(y, w)},$$

gdzie ζ jest dowolną liczbą z przedziału $\langle z_0, z_1\rangle$. $f'(\zeta) = C$ i przekształcając otrzymujemy

$$\varphi(y, z, w) \equiv \frac{C}{F_x(x, y, z, w)P_z(x, y, \zeta, w)}. \tag{14}$$

PRZYKŁAD. Dane jest równanie

$$F \equiv y^3zw^2 + xy^2zw + y^2w^3 + xyw^2 + yz^2 + zw = 0. \tag{a}$$

Należy sprawdzić, czy istnieje czynnik anamorfozujący postaci $\varphi(y, z, w)$, sprowadzający równanie (a) do postaci (1).

Obliczamy kolejno

$$F_x \equiv y^2zw + yw^2 \equiv yw[yz + w], \tag{b}$$

$$P \equiv \frac{y^3zw^2 + xy^2zw + y^2w^3 + xyw^2 + yz^2 + zw}{yw[yz + w]}, \tag{c}$$

$$P_z \equiv \frac{y^2z^2 + 2yzw + w^2}{yw[yz + w]^2} \equiv \frac{1}{yw}. \tag{d}$$

Z (b) wynika spełnienie tożsamości (11a), (11b) i (11c).

Z (d) wynika, że są spełnione tożsamości (11d) i (11e).

Widać zatem, że istnieje czynnik anamorfozujący żądanej postaci. Z tożsamości (14) wynika, że ma on postać

$$\varphi(y, z, w) \equiv \frac{C}{yz + w}.$$

Gdy $C = 1$, otrzymujemy czynnik anamorfozujący w najprostszej postaci

$$\varphi(y, z, w) \equiv \frac{1}{yz + w}.$$

Z tożsamości (9) wynika

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 3 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci $\varphi(y, z, w)$, sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci (1), to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

3. Czynnik postaci $\varphi(x, y, w)$. W tym przypadku mamy

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y, w)}[f(z) + g(x)h(y, w) + k(y, w)]. \tag{15}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu 1, funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do* *rzędu czwartego, oraz* $F_z \neq 0$ *i* $P_x \neq 0$, *gdzie* $P \equiv F/F_z$, *to na to, by funkcja* F *miała postać* (15) *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$(16a)\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \ln|F_z| \equiv 0, \qquad (16b)\quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \ln|F_z| \equiv 0,$$

$$(16c)\quad \frac{\partial^2}{\partial w \partial z} \ln|F_z| \equiv 0, \qquad (16d)\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|P_x| \equiv 0,$$

$$(16e)\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial w} \ln|P_x| \equiv 0,$$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać (19).

Dowód konieczności jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1.

Dowód dostateczności. Z (16a), (16b) i (16c) otrzymujemy $F_z \equiv A(z)B(x,y,w)$ oraz

$$(17)\qquad F \equiv B(x,y,w)\int A(z)dz + C(x,y,w).$$

Z (16d) i (16e) mamy

$$(18)\qquad C(x,y,w) \equiv B(x,y,w)[D(x)E(y,w)+G(y,w)].$$

Z (17) i (18) otrzymujemy

$$F \equiv B(x,y,w)\Big[\int A(z)dz + D(x)E(y,w)+G(y,w)\Big].$$

Podstawiając $\varphi(x,y,w) \equiv 1/B(x,y,w)$, $f(z) \equiv \int A(z)dz$, $g(x) \equiv D(x)$, $h(y,w) \equiv E(y,w)$, $k(y,w) \equiv G(y,w)$, otrzymujemy funkcję F w postaci (15).

Z postaci funkcji F wynika tożsamość

$$F_z(x,y,\zeta,w) \equiv \frac{f'(\zeta)}{\varphi(x,y,w)},$$

gdzie ζ jest dowolną liczbą z przedziału $\langle z_0, z_1\rangle$. Podstawiając $f'(\zeta) = C$ i przekształcając, otrzymujemy

$$(19)\qquad \varphi(x,y,w) \equiv \frac{C}{F_z(x,y,\zeta,w)}.$$

Stąd wynika

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli funkcja* $F(x,y,z,w)$ *spełnia założenia twierdzenia* 5 *i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci* $\varphi(x,y,w)$, *sprowadzające równanie* $F=0$ *do postaci* (1), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

II. Czynnik anamorfozujący, sprowadzający równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci (2).

1. Czynnik postaci $\varphi(x, y, z)$. W tym przypadku mamy

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y, z)}[f(z, w) + g(x)h(y) + k(y)]. \tag{20}$$

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu* 1, *funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego, oraz $F_w \neq 0$ i $P_x \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_w$, to na to, by funkcja F miała postać* (20), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

(21a) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial w} \ln|F_w| \equiv 0,$ (21b) $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial w} \ln|F_w| \equiv 0,$

(21c) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|P_x| \equiv 0,$ (21d) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} \ln|P_x| \equiv 0,$

(21e) $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z} \ln|P_x| \equiv 0,$ (21f) $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{P_y}{P_x}\right) \equiv 0,$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać

$$\varphi(x, y, z) \equiv C/F_w(x, y, z, w)P_x(\xi, \eta, z, w),$$

gdzie ξ jest dowolną liczbą z przedziału $\langle x_0, x_1\rangle$, η dowolną liczbą z przedziału $\langle y_0, y_1\rangle$, a C jest stałą.

Stąd wynika

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 7 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci $\varphi(x, y, z)$, sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci* (2), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

2. Czynnik postaci $\varphi(x, z, w)$. W tym przypadku mamy

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, z, w)}[f(z, w) + g(x)h(y) + k(y)] = 0. \tag{22}$$

TWIERDZENIE 9. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu* 1, *funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu piątego i $F_y \neq 0$, $P_z \neq 0$, $R_x \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_y$ i $R \equiv P/P_z$, to na to, by F miała postać* (22), *potrzeba i wystarcza, aby spełnione były tożsamości*

(23a) $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z} \ln|F_y| \equiv 0,$ (23b) $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial w} \ln|F_y| \equiv 0,$

(23c) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} \ln|P_z| \equiv 0,$ (23d) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial w} \ln|P_z| \equiv 0,$

(23e) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{P_w}{P_z}\right) \equiv 0,$ (23f) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|R_x| \equiv 0,$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać $\varphi(x, z, w) \equiv C/F_y(x, y, z, w) \times \times P_z(x, y, \zeta, \omega)$, *gdzie* ζ *jest dowolną liczbą z przedziału* $\langle z_0, z_1\rangle$, ω *dowolną liczbą z przedziału* $\langle w_0, w_1\rangle$, *a* C *jest stałą.*

Stąd wynika

TWIERDZENIE 10. *Jeżeli funkcja* $F(x, y, z, w)$ *spełnia założenia twierdzenia 9 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci* $\varphi(x, z, w)$, *sprowadzające równanie* $F = 0$ *do postaci* (2), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

3. Czynnik postaci $\varphi(y, z, w)$. W tym przypadku równanie ma postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(y, z, w)} [f(z, w) + g(x)h(y) + k(y)] = 0. \tag{24}$$

TWIERDZENIE 11. *Jeżeli w kostce* K, *określonej jak w twierdzeniu* 1, *funkcja* F *jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego, oraz* $F_x \neq 0$ *i* $P_z \neq 0$, *gdzie* $P \equiv F/F_x$, *to na to, by funkcja* F *miała postać* (24) *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|F_x| \equiv 0, \tag{25a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \ln|F_x| \equiv 0, \tag{25b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial w} \ln|F_x| \equiv 0, \tag{25c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \ln|P_z| \equiv 0, \tag{25d}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial w} \ln|P_z| \equiv 0, \tag{25e}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_w}{P_z}\right) \equiv 0, \tag{25f}$$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać $\varphi(y, z, w) = C/F_x(x, y, z, w)P_z(x, y, \zeta, \omega)$, *gdzie* ζ *jest dowolną liczbą z przedziału* $\langle z_0, z_1\rangle$, ω *dowolną liczbą z przedziału* $\langle w_0, w_1\rangle$, *a* C *jest stałą.*

Stąd wynika

TWIERDZENIE 12. *Jeżeli funkcja* $F(x, y, z, w)$ *spełnia założenia twierdzenia 11 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci* $\varphi(y, z, w)$, *sprowadzające równanie* $F = 0$ *do postaci* (2), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

III. Czynnik anamorfozujący, sprowadzający równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci (3).

1. Czynnik postaci $\varphi(x, y, z)$. W tym przypadku równanie ma postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y, z)} [f(z) + g(x, w)h(y) + k(y)] = 0. \tag{26}$$

TWIERDZENIE 13. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu 1, funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu piątego oraz $F_w \neq 0$, $P_z \neq 0$ i $R_x \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_w$ a $R \equiv P/P_z$, to na to, by funkcja F miała postać* (26) *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$(27a)\qquad \frac{\partial^2}{\partial w \partial z} \ln|F_w| \equiv 0, \qquad (27b)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \ln|P_z| \equiv 0,$$

$$(27c)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \ln|P_z| \equiv 0, \qquad (27d)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|R_x| \equiv 0,$$

$$(27e)\qquad \frac{\partial^2}{\partial w \partial y} \ln|R_x| \equiv 0, \qquad (27f)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R_w}{R_x}\right) \equiv 0,$$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać $\varphi(x, y, z) = C/F_w(x, y, z, w) \times \times P_z(x, y, \zeta, w)$, *gdzie ζ jest dowolną liczbą z przedziału* $\langle z_0, z_1 \rangle$, *C jest stałą.*

Stąd wynika

TWIERDZENIE 14. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 13 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci $\varphi(x, y, z)$, sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci* (3), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

2. Czynnik postaci $\varphi(x, y, w)$. W tym przypadku równanie ma postać

$$(28)\qquad F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y, w)}[f(z) + g(x, w)h(y) + k(y)] = 0.$$

TWIERDZENIE 15. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu 1, funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego, oraz $F_z \neq 0$ i $P_x \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_z$, to na to, by funkcja F miała postać* (28) *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$(29a)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \ln|F_z| \equiv 0, \qquad (29b)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \ln|F_z| \equiv 0,$$

$$(29c)\qquad \frac{\partial^2}{\partial w \partial z} \ln|F_z| \equiv 0, \qquad (29d)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|P_x| \equiv 0,$$

$$(29e)\qquad \frac{\partial^2}{\partial w \partial y} \ln|P_x| \equiv 0, \qquad (29f)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_w}{P_x}\right) \equiv 0,$$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać $\varphi(x, y, w) \equiv C/F_z(x, y, \zeta, w)$, *gdzie ζ jest dowolną liczbą z przedziału* $\langle z_0, z_1 \rangle$, *a C jest stałą.*

Stąd wynika

TWIERDZENIE 16. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 15 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci $\varphi(x, y, w)$,* *sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci (3), to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

3. Czynnik postaci $\varphi(x, z, w)$. W tym przypadku równanie ma postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, z, w)}[f(z) + g(x, w)h(y) + k(y)] = 0. \tag{30}$$

TWIERDZENIE 17. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu 1, funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu piątego, oraz $F_y \neq 0$, $P_z \neq 0$ i $R_x \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_y$, a $R \equiv \equiv P/P_z$, to na to, by funkcja F miała postać (30), potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \ln|F_y| \equiv 0, \tag{31a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \ln|P_z| \equiv 0, \tag{31b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \ln|P_z| \equiv 0, \tag{31c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln|R_x| \equiv 0, \tag{31d}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial y} \ln|R_x| \equiv 0, \tag{31e}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R_w}{R_x}\right) \equiv 0, \tag{31f}$$

przy czym czynnik anamorfozujący ma postać $\varphi(x, z, w) \equiv C/F_y(x, y, z, w)P_z(x, y, \zeta, w)$, gdzie ζ jest dowolną liczbą z przedziału $\langle z_0, z_1\rangle$, a C jest stałą.

Stąd wynika

TWIERDZENIE 18. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 17 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące postaci $\varphi(x, z, w)$, sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci (3), to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

Dowody twierdzeń 7-18 przebiegają analogicznie do dowodów twierdzeń poprzednich.

Prace cytowane

[1] J. Wojtowicz, *O sprowadzaniu równań do I i II formy kanonicznej równania trzeciego rzędu nomograficznego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej Nr 40, Budownictwo Nr 12, 1959.

[2] — *Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznej*, Zastosowania Matematyki 5 (1960), str. 1-20.

[3] — *Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome*, Annales Polonici Mathematici 8 (1960), str. 177-183.

Praca wpłynęła 12. 4. 1961

Я. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

О АНАМОРФИЗИРУЮЩЕМ ФАКТОРЕ, СВОДЯЩЕМ УРАВНЕНИЕ $F(x,y,z,w)=0$ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ КОШИ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

РЕЗЮМЕ

В работе представлены необходимые и достаточные условия существования анаморфизирующего фактора, зависимого от трех переменных, приводящего уравнение $F(x,y,z,w)=0$ к виду

а. $f(z)+g(x)h(y,w)+k(y,w)=0$ (тождества (5) или (11), или (16)),
б. $f(z,w)+g(x)h(y)+k(y)=0$ (тождества (21) или (23), или (25)),
в. $f(z)+g(x,w)h(y)+k(y)=0$ (тождества (27) или (29), или (31)),

в зависимости от того, от которых трех переменных зависит фактор.

В каждом из этих случаев дается формула для исчисления анаморфизирующего фактора. Кроме этого доказано, что анаморфизирующие факторы определенны с точностью до постоянной.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

ON THE ANAMORPHOSING FACTOR REDUCING THE EQUATION $F(x,y,z,w)=0$ TO THE CANONICAL CAUCHY FORM WITH FOUR VARIABLES

SUMMARY

The present paper gives the sufficient and necessary conditions of the existence of an anamorphosing factor, which depends on three variables and reduces the equation $F(x,y,z,w)=0$ to the following forms:

a. $f(z)+g(x)h(y,w)+k(y,w)=0$ (identities (5) or (11) or (16), according to the set of three variables on which the factor depends);

b. $f(z,w)+g(x)h(y)+k(y)=0$ (identities (21) or (23) or (25), according to the set of three variables on which the factor depends);

c. $f(z)+g(x,w)h(y)+k(y)=0$ (identities (27) or (29) or (31), according to the set of three variables on which the factor depends).

In each case the formula necessary for computing the anamorphosing factor is given. Besides, it is proved that each of the anamorphosing factors differs from any other at most by a constant.
