C O L L O Q U I U M   M A T H E M A T I C U M

VOL. XXXVIII | 1978 | FASC. 2

SPECTRE MAXIMAL D'UNE ALGÈBRE DE KRASNER

PAR

ALAIN ESCASSUT (TALENCE)

Introduction. Cet article a pour objet d'étudier les idéaux maximaux de codimension infinie d'une algèbre d'éléments analytiques au sens de Krasner. Soit un infraconnexe fermé borné D d'un corps algébriquement clos ultramétrique complet K; en utilisant les résultats de [2] concernant la caractérisation des semi-normes multiplicatives continues de l'algèbre de Krasner $H(D)$ par des filtres circulaires de D, et grâce aux résultats de [8] montrant que tout idéal maximal de $H(D)$ définit au moins une semi-norme multiplicative continue, nous chercherons à associer à chaque idéal maximal de codimension infinie $\mathcal{M}$ un filtre circulaire particulier $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{M}$ soit l'idéal des éléments $f \in H(D)$ tels que

$$\lim_{\mathcal{F}} f(x) = 0.$$

On retrouvera naturellement les problèmes classiques d'analycité et on utilisera fréquemment la notion de T-filtre [3].

Ce problème est en rapport avec celui évoqué par B. Guennebaud concernant l'existence de plusieurs valeurs absolues continues dans une extension Γ de K munie d'une structure de K-algèbre de Banach et nous tenterons de confirmer dans le cas des algèbres $H(D)$ sa conjecture selon laquelle si le corps résiduel de K ou si le groupe des valeurs de K est non dénombrable, alors Γ n'admet qu'une seule valeur absolue continue.

I. FILTRES CIRCULAIRES DISTINGUÉS

1. Rappels et notations. Rappelons très brièvement quelques résultats et définitions de [1] et [2]. Dans tout cet article, on désignera par K un corps algébriquement clos possédant une valeur absolue $|\cdot|$ ultramétrique pour laquelle il est complet, et par k son corps résiduel.

Soit D un fermé borné de K et soit $K(D)$ la K-algèbre des fractions rationnelles $h(x) \in K(x)$, sans pôle dans D. Si D est infini, on note $\|\cdot\|_D$ la norme de la convergence uniforme sur D et on note $H(D)$ la K-algèbre de Banach complétée de $K(D)$ pour cette norme. Les éléments de $H(D)$ sont appelés *éléments analytiques au sens de Krasner sur D.* Rappelons quelques propriétés élémentaires.

Pour tout point $a \in D$ l'idéal $\mathscr{I}(a)$ des éléments de $H(D)$ nuls au point a est un idéal maximal de codimension 1 et, d'après le théorème IV.2 de [1] et le théorème I.3 de [4], il est clair que $\mathscr{I}(a)$ est engendré par le polynôme $x-a$ si $a \in \overset{\circ}{D}$ et que $\mathscr{I}(a)$ n'est pas de type fini si $a \in D-\overset{\circ}{D}$. Réciproquement, pour tout idéal maximal $\mathscr{M}$ de codimension 1 de $H(D)$, l'homomorphisme φ de $H(D)$ sur K tel que $\operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{M}$ est continu et si l'on note $a = \varphi(x)$ il est clair que $\varphi(f) = 0$ si et seulement si $f(a) = 0$, donc $\mathscr{M} = \mathscr{I}(a)$.

L'étude des idéaux maximaux de codimension infinie d'une telle algèbre $H(D)$ utilise les propriétés des semi-normes multiplicatives continues d'une K-algèbre normée.

Soit A une K-algèbre normée dont la norme est notée $\|\cdot\|$. On notera $\operatorname{Mult}(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|\cdot\|$.

Il est clair que l'ensemble $\operatorname{Ker}\varphi$ des $x \in A$ tels que $\varphi(x) = 0$ ($\varphi \in \operatorname{Mult}(A, \|\cdot\|)$) est un idéal premier. On notera $\operatorname{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des $\varphi \in \operatorname{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que $\operatorname{Ker}\varphi$ soit un idéal maximal de A et on notera $\operatorname{Mult}_a(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des $\varphi \in \operatorname{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que $\operatorname{Ker}\varphi$ soit un idéal maximal de codimension 1.

Le théorème 1 de [8] a pour conséquence la proposition I.1.

PROPOSITION I.1. *Pour tout idéal maximal $\mathscr{M}$ d'une K-algèbre de Banach A, le corps $\Gamma = A/\mathscr{M}$ muni de sa structure de K-algèbre de Banach quotient admet au moins une valeur absolue continue $|\cdot|$ et si Φ désigne la surjection canonique de A sur Γ, l'application $\varphi\colon x \to |\Phi(x)|$ est telle que* $\operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{M}$.

L'étude de $\operatorname{Mult}\big(H(D), \|\cdot\|_D\big)$ (où D est un fermé borné infini de K) a été faite dans [2] et [6]. Nous allons en rappeler les principaux résultats qui utilisent notamment la notion de filtre circulaire. Précisons d'abord quelques notations.

Soit $a \in K$ et $r \geqslant 0$. On notera $d(a, r)$ l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a| \leqslant r$, appelé *disque circonférencié de centre a de diamètre r.* De même, l'ensemble $d^-(a, r)$ des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a| < r$ est appelé *disque non circonférencié de centre a de diamètre r.*

On notera $C(a, r)$ l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a| = r$ (appelé *cercle de centre a de rayon r*). Enfin soit $a \in K$ et soient $r_1, r_2 \in R$ tels que $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2$. On notera $\Gamma(a, r_1, r_2)$ l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $r_1 \leqslant |\xi - a| \leqslant r_2$.

D'autre part, on appellera *classe* d'un disque circonférencié ou d'un cercle de diamètre r tout disque non circonférencié de diamètre r inclus dans ce disque ou ce cercle.

Enfin, pour toute partie bornée D, de diamètre R, de K, on notera $\underline{\underline{D}}$ le plus petit disque circonférencié contenant D, c'est-à-dire $d(a, R)$ pour $a \in D$.

On appelle *filtre circulaire* de K un filtre de K qui admet un système générateur de la forme $\Phi \cup \hat{\Phi}$ (que l'on nomme *système générateur canonique*), où Φ est une suite strictement décroissante de disques circonférenciers d_n (où l'on note $r = \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(d_n)$) et où $\hat{\Phi}$ est la famille des couronnes $\Gamma(a, r_1, r_2)$ telles que

$$a \in \bigcap_{d \in \mathscr{F}} \underline{\underline{d}} \quad \text{et} \quad r_1 < r < r_2$$

(en particulier, $\hat{\Phi}$ est la famille vide si $\bigcap_{d \in \mathscr{F}} \underline{\underline{d}} = \emptyset$).

Le nombre r est appelé *diamètre* de $\mathscr{F}$; on note $\Delta(\mathscr{F})$ l'ensemble $\bigcap_{n \in N} d_n$ et les points de $\Delta(\mathscr{F})$ sont appelés *centres* de $\mathscr{F}$. De plus, on dit qu'un filtre circulaire est *large* si son diamètre est positif (c'est-à-dire si ce n'est pas un filtre de Cauchy).

Enfin, pour tout filtre $\mathscr{F}$ dans K sécant à une partie D de K (c'est-à-dire tel que $F \cap D \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathscr{F}$), on notera $\mathscr{F} \cap D$ le filtre induit par $\mathscr{F}$ sur D (c'est-à-dire le filtre défini dans D par les $F \cap D$, $F \in \mathscr{F}$).

Nous résumerons les résultats de [2] et [6] par le théorème I.1.

THÉORÈME I.1. *Soit D un fermé borné. Pour tout $\varphi \in \operatorname{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$ il existe un filtre circulaire unique $\mathscr{F}_\varphi$ sécant à D tel que*

$$\varphi(f) = \lim_{\mathscr{F}_\varphi \cap D} |f(x)|$$

et l'application $\varphi \to \mathscr{F}_\varphi$ est une bijection de $\operatorname{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$ sur l'ensemble des filtres circulaires de K sécants à D.

De plus, $\varphi \in \operatorname{Mult}_a(H(D), \|\cdot\|_D)$ si et seulement si $\mathscr{F}_\varphi$ est un filtre de Cauchy; alors, si $\varphi \in \operatorname{Mult}_a(H(D), \|\cdot\|_D)$, $\mathscr{F}_\varphi \cap D$ est le filtre des voisinages d'un point $a \in D$ et l'on a $\varphi(f) = |f(a)|$ pour tout $f \in H(D)$.

Nous considérerons uniquement des filtres circulaires sécants à l'ensemble D considéré et il est immédiat de voir que si deux filtres circulaires de K ont une même intersection avec D, ils sont égaux. On nommera donc *filtre circulaire de D* l'intersection avec D d'un filtre circulaire de K sécant à D et on pourra confondre sans inconvénient tout filtre circulaire de K sécant à D avec son intersection avec D.

Alors, si $\mathscr{F}$ est un filtre circulaire de D, on notera $\Delta(\mathscr{F}, D)$ l'ensemble $\Delta(\mathscr{F}) \cap D$ (où l'on considère $\mathscr{F}$ comme filtre circulaire de K).

D'autre part, nous dirons ici qu'un filtre circulaire $\mathscr{F}$ est *entouré* par un filtre circulaire $\mathscr{G}$ si l'un des éléments de $\mathscr{F}$ est inclus dans $\Delta(\mathscr{G})$.

Enfin, on a défini dans [2] la notion de filtre monotone de K que l'on peut résumer de la façon suivante: un filtre $\mathscr{G}$ de K est *décroissant* s'il admet un système générateur de la forme $\mathscr{F} \cap \complement \Delta(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est un filtre circulaire large de K, et un filtre $\mathscr{G}$ est *croissant* s'il admet un système générateur de la forme $\mathscr{F} \cap d$, où $\mathscr{F}$ est un filtre circulaire et où d est l'une des classes du disque $\Delta(\mathscr{F})$. Alors d est le plus petit disque appartenant à $\mathscr{G}$.

Enfin, on appelle filtre *monotone* de K un filtre croissant ou décroissant. Alors, il est clair qu'avec les notations ci-dessus, le filtre $\mathscr{F}$ servant à définir le filtre décroissant ou croissant $\mathscr{G}$ est le seul filtre circulaire sécant à $\mathscr{G}$. On l'appelle *filtre circulaire associé à* $\mathscr{G}$ et nous dirons ici qu'un filtre monotone $\mathscr{G}$ est *entouré* par un filtre circulaire $\mathscr{F}'$ si son filtre circulaire associé $\mathscr{F}$ est entouré par $\mathscr{F}'$. De même nous dirons que $\mathscr{F}'$ est *entouré par* $\mathscr{G}$ si $\mathscr{F}'$ est entouré par $\mathscr{F}$.

Alors, si D est un fermé borné de K, on appelle *filtre monotone* de D l'intersection avec D d'un filtre monotone de K sécant à D. D'autre part, si $\mathscr{G}$ est un filtre décroissant de D et si $\mathscr{F}$ est son filtre circulaire associé, on appelle *plage* de $\mathscr{G}$ l'ensemble

$$\mathscr{P}(\mathscr{G}) = \Delta(\mathscr{F}, D);$$

si $\mathscr{G}$ est un filtre croissant de D, et si $\mathscr{F}$ est son filtre circulaire associé, on appelle *plage* de $\mathscr{G}$ l'ensemble

$$\mathscr{P}(\mathscr{G}) = (\complement d) \cap D,$$

où d est le plus petit disque appartenant à $\mathscr{G}$. Enfin, pour tout filtre monotone $\mathscr{F}$ de D, on appelle *chapeau* de $\mathscr{F}$, noté $\mathscr{C}(\mathscr{F})$, le complémentaire de $\mathscr{P}(\mathscr{F})$ dans D.

Rappelons qu'une partie D de K est dite *infraconnexe* si, pour tout $a \in D$, l'adhérence dans $\boldsymbol{R}$ de l'ensemble des $|x-a|$, $x \in D$, est un intervalle.

On a défini dans [2] une fonction $w_{\mathscr{F}}(f, \mu)$ associée à un filtre décroissant $\mathscr{F}$ sur un infraconnexe D, pour un élément analytique $f \in H(D)$ et un nombre réel μ. Nous allons tenter de résumer cette définition.

Soit D un infraconnexe fermé borné et soit $d(a, r)$ un disque circonférencié inclus dans D. Alors il existe un filtre circulaire unique $\mathscr{E}$ de K tel que $\Delta(\mathscr{E}) = d(a, r)$ et on montre que $\mathscr{E}$ est sécant à D; notons $\varphi_{d(a,r)}$ la semi-norme multiplicative de $H(D)$ qu'il définit: on a donc, pour tout $f \in H(D)$,

$$\varphi_{d(a,r)}(f) = \lim_{\substack{|x-a| \to r \\ |x-a| \neq r \\ x \in D}} |f(x)|.$$

On note

$$v_a(f, \mu) = -\log \varphi_{d(a, \exp(\mu))}(f) \qquad (\mu \in \boldsymbol{R})$$

et on sait que la fonction de valuation $\mu \to v_a(f, \mu)$ (à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$) est continue et, dans les intervalles où elle est bornée, elle est affine par morceaux [2] et [12].

Considérons maintenant un filtre décroissant $\mathscr{F}$ de D, de diamètre R et soit $f \in H(D)$. On sait que $\mathscr{F}$ admet pour base une suite D_n de la forme

$$\left[d(a_n, r_n) - \bigcap_{i=1}^{\infty} d(a_i, r_i)\right] \cap D,$$

où $d(a_n, r_n)$ est une suite décroissante de disques circonférenciés. Alors, pour $r \geqslant r_p$, on a $d(a_p, r) = d(a_n, r)$ pour tout $n \geqslant p$ et, par suite, si l'on considère $f \in H(D)$, la suite $n \to \varphi_{d(a_n, r)}(f)$ est constante pour $n \geqslant p$, de sorte que, pour tout $r \geqslant R$, la suite $n \to \varphi_{d(a_n, r)}(f)$ admet trivialement une limite.

Afin de pallier l'absence éventuelle de centre pour le filtre décroissant $\mathscr{F}$, on définit la fonction $\mu \to w_{\mathscr{F}}(f, \mu)$ dans l'intervalle $]-\infty, -\log R[$, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, par

$$w_{\mathscr{F}}(f, \mu) = -\log\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_{d(a_n, \exp(\mu))}(f)\right);$$

alors *cette fonction est continue et, de plus, dans tout intervalle où elle est bornée, elle est affine par morceau* [2].

D'autre part, il est clair que le filtre circulaire $\mathscr{E}$ associé à $\mathscr{F}$ définit une semi-norme φ de $H(D)$ telle que

$$-\log \varphi(h) = w_{\mathscr{F}}(h, -\log R).$$

Nous dirons qu'un élément $f \in H(D)$ est *annulé* par un filtre $\mathscr{G}$ de D si l'on a

$$\lim_{\mathscr{G}} f(x) = 0$$

et nous noterons $\mathscr{I}(\mathscr{G})$ l'idéal des $f \in H(D)$ tels que

$$\lim_{\mathscr{G}} f(x) = 0.$$

Maintenant, si $\mathscr{F}$ est un filtre décroissant de diamètre R, la propriété

$$\lim_{\mu\to -\log R} w_{\mathscr{F}}(f, \mu) = +\infty$$

implique $f \in \mathscr{I}(\mathscr{F})$. Nous dirons que f est *strictement annulé* par un filtre décroissant $\mathscr{F}$ de diamètre R si l'on a

$$\lim_{\mu\to -\log R} w_{\mathscr{F}}(f, \mu) = +\infty \quad \text{et} \quad w_{\mathscr{F}}(f, \mu) < +\infty \quad \text{pour tout } \mu < -\log R.$$

De même, si $\mathscr{F}$ est un filtre croissant, de centre a, diamètre R, nous dirons que f est *strictement annulé* par $\mathscr{F}$ si l'on a

$$\lim_{\mu\to -\log R} v_a(f, \mu) = +\infty \quad \text{et} \quad v_a(f, \mu) < +\infty \quad \text{pour tout } \mu > -\log R.$$

Les filtres monotones $\mathscr{F}$ pour lesquels il existe un élément f strictement annulé par $\mathscr{F}$ sont caractérisés à l'aide de la disposition et du diamètre des trous de D et ils sont appelés *T-filtres* ([3], théorème I.6).

2. Filtres circulaires distingués. Nous allons caractériser les idéaux maximaux de codimension infinie par les filtres circulaires distingués que nous allons définir.

Nous dirons qu'un filtre circulaire $\mathcal{F}$ d'un infraconnexe D est *sous-distingué* s'il possède les deux propriétés suivantes:

(i) $\Delta(\mathcal{F}, D)$ est vide ou bien admet une partition par une famille de chapeaux de T-filtres croissants.

(ii) Tout T-filtre décroissant de $\Delta(\mathcal{F}, D)$ est sécant à au moins un chapeau de T-filtre croissant de $\Delta(\mathcal{F}, D)$.

De plus, nous dirons qu'un filtre circulaire sous-distingué est *distingué* s'il possède la propriété (iii):

(iii) $\Delta(\mathcal{F}, D)$ est égal à D, ou bien à la plage d'un T-filtre décroissant de D.

LEMME I.1. *Si $\mathcal{F}$ est un filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné D, $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ n'est inclus dans aucun idéal maximal de codimension* 1.

Démonstration. On a vu que tout idéal maximal de codimension 1 est de la forme $\mathcal{I}(a)$ (où $a \in D$). Or pour tout $a \in \Delta(\mathcal{F}, D)$ il existe un T-filtre $\mathcal{T}$ croissant de $\Delta(\mathcal{F}, D)$ de centre a et il existe donc un élément $f \in H(D)$ strictement annulé par $\mathcal{T}$, tel que $f(a) \neq 0$, de sorte que $f \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \not\subset \mathcal{I}(a)$. De même, pour tout $a \in D - \Delta(\mathcal{F}, D)$, grâce à la condition (iii), il existe un T-filtre décroissant $\mathcal{T}'$ entourant $\mathcal{F}$, tel que $f(a) \neq 0$ de sorte que $f \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \not\subset \mathcal{I}(a)$.

LEMME I.2. *Deux filtres circulaires distingués distincts définissent des idéaux incomparables.*

Démonstration. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux filtres circulaires distingués distincts. Supposons d'abord $\mathcal{F}_1$ entouré par $\mathcal{F}_2$. Alors $\Delta(\mathcal{F}_1, D) \neq D$, donc $\Delta(\mathcal{F}_2, D)$, qui contient strictement $\Delta(\mathcal{F}_1, D)$, admet au moins un T-filtre décroissant $\mathcal{T}$ non sécant à $\Delta(\mathcal{F}_1, D)$ et $\mathcal{T}$ est donc sécant à un chapeau de T-filtre croissant $\mathcal{S}$ de $\Delta(\mathcal{F}_2, D)$. Alors il existe un élément $f \in H(D)$ strictement annulé par $\mathcal{S}$, et non annulé par $\mathcal{T}$, de sorte que $f \notin \mathcal{I}(\mathcal{F}_1)$ et $f \in \mathcal{I}(\mathcal{F}_2)$ et il existe $g \in H(D)$, strictement annulé par $\mathcal{T}$, et non annulé par $\mathcal{I}$, de sorte que $g \notin \mathcal{I}(\mathcal{F}_2)$ et $g \in \mathcal{I}(\mathcal{F}_1)$, ce qui prouve que $\mathcal{I}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{I}(\mathcal{F}_2)$ sont incomparables.

LEMME I.3. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres circulaires de diamètres R et S d'un infraconnexe fermé borné D tels que $\mathcal{G}$ entoure $\mathcal{F}$. Alors on a $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \supset \supset \mathcal{I}(\mathcal{G})$ (respectivement $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{I}(\mathcal{G})$) si et seulement si $\mathcal{F}$ n'est entouré par aucun T-filtre croissant de diamètre $r \in]R, S]$ (respectivement décroissant de diamètre $r \in [R, S[$).*

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ un T-filtre croissant entourant $\mathcal{F}$ et de diamètre $r \in]R, S]$; il existe des éléments $f \in H(D)$ strictement annulés par $\mathcal{T}$, donc annulés par $\mathcal{G}$ et non annulés par $(\mathcal{F})$ de sorte que $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \neq \mathcal{I}(\mathcal{G})$. Réciproquement, si $\mathcal{F}$ n'est entouré par aucun T-filtre croissant de diamètre $r \in]R, S]$, la relation

$$w_{\mathscr{F}}(f, -\log S) = +\infty$$

implique

$$w_{\mathscr{F}}(f, \mu) = +\infty \quad \text{pour tout } \mu \in [-\log S, -\log R[,$$

d'où $w_{\mathscr{F}}(f, -\log R) = +\infty$ et $\mathscr{I}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{I}(\mathscr{F})$. De même, si $\mathscr{T}$ est un T--filtre décroissant entourant $\mathscr{F}$, de diamètre $r \in [R, S[$, il existe un élément $f \in H(D)$ strictement annulé par $\mathscr{T}$ et donc annulé par $\mathscr{F}$, mais non par $\mathscr{G}$, de sorte que $\mathscr{I}(\mathscr{F}) \not\subset \mathscr{I}(\mathscr{G})$, et si $\mathscr{F}$ n'est entouré par aucun T-filtre décroissant de diamètre $r \in [R, S[$, alors $\mathscr{I}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{I}(\mathscr{G})$; le lemme I.3 est donc établi.

Définitions. Soit D un infraconnexe. Nous dirons qu'une suite $\mathscr{G}_n$ de filtres croissants (respectivement décroissants) est *ascendante* si la suite $\mathscr{C}(\mathscr{G}_n)$ est croissante et nous appellerons diamètre de la suite $\mathscr{G}_n$ la limite de la suite $\operatorname{diam}(\mathscr{G}_n)$.

Nous appellerons *sommet* d'une suite ascendante $\mathscr{G}_n$ le filtre des parties de D de la forme $\bigcup\limits_{n \geq q} A_n$, $A_n \in \mathscr{G}_n$, $q \in N$.

Remarque. Si $\mathscr{G}_n$ est une suite ascendante de filtres croissants et si son diamètre est $R < +\infty$, il est clair que pour tout $a \in \mathscr{C}(\mathscr{G}_n)$ $(n \in N)$ le sommet de la suite $\mathscr{G}_n$ est le filtre croissant de centre a et de diamètre R.

Si $\mathscr{G}_n$ est une suite ascendante de filtres décroissants, si son diamètre est $R > 0$, et si

$$\bigcap_{n \in N} \mathscr{P}(\mathscr{G}_n) \neq \emptyset,$$

il est clair que pour tout $a \in \bigcap\limits_{n \in N} \mathscr{P}(\mathscr{G}_n)$ le sommet de la suite $\mathscr{G}_n$ est le filtre décroissant de centre a et de diamètre R.

Définition. Nous appellerons *centre* d'une suite ascendante tout centre de son sommet.

THÉORÈME I.2. *Le sommet d'une suite ascendante de T-filtres est un T-filtre.*

Démonstration. Considérons par exemple une suite ascendante de T-filtres décroissants $\mathscr{T}_n$ de diamètres respectifs r_n et soit R le diamètre de la suite.

Pour tout entier n, considérons suivant les notations habituelles [3] une suite caractéristique du T-filtre $\mathscr{T}_n$: $(d_m^n, \gamma_m^n, q_m^n)_{m \in N}$. Alors il existe un rang M_n tel que $d_{M_n}^n < r_n$ et, par hypothèse, on a

$$\lim_{m \to \infty} \gamma_m^n \prod_{j=M_n}^{m-1} \left(\frac{d_m^n}{d_j^n}\right)^{q_j^n} = 0.$$

Alors, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, soit

$$S_n = \sup_{m \geqslant M_n} \gamma_m^n \prod_{j=M_n}^{m-1} \left(\frac{d_m^n}{d_j^n}\right)^{q_j^n}$$

et soit N_n tel que

$$\prod_{j=M_n}^{N_n} \left(\frac{r_n}{d_j^n}\right)^{q_j^n} < \frac{1}{nS_n}.$$

Considérons maintenant la suite (d_m, γ_m, q_m) définie lorsque

$$\sum_{i=1}^{n} N_i - M_i < m \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} N_i - M_i$$

par

$$(d_m, \gamma_m, q_m) = (d_{\sigma(m)}^n, \gamma_{\sigma(m)}^n, q_{\sigma(m)}^n), \quad \text{où } \sigma(m) = m - \sum_{i=1}^{n} (N_i - M_i).$$

Alors il est immédiat de voir que cette suite (d_m, γ_m, q_m) satisfait

$$\lim_{m \to \infty} \gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} = 0$$

et comme par hypothèse on a $\lim d_m = R$, on voit que le sommet de la suite $\mathscr{G}'_n$ est un T-filtre. Il est clair qu'une démonstration symétrique prouve le résultat analogue lorsque les filtres $\mathscr{T}_n$ sont croissants.

Corollaire I.1. *Soit D un infraconnexe borné admettant un recouvrement par une famille de chapeaux de T-filtres croissants $\mathscr{C}(\mathscr{T}_i)_{i \in I}$; alors D admet une partition par une famille de chapeaux de T-filtres.*

Démonstration. Pour tout $a \in D$, soit $r(a)$ la borne supérieure des diamètres de T-filtre $\mathscr{T}_i$ $(i \notin I)$ tels que $a \in \mathscr{C}(\mathscr{T}_i)$. Alors, d'après le théorème I.2, le filtre croissant de centre a, de diamètre r est un T-filtre que l'on notera $\mathscr{T}_a$ et il est immédiat de voir que la famille $\mathscr{C}(\mathscr{T}_a)_{a \in D}$ constitue une partition de D car si $b \notin \mathscr{C}(\mathscr{T}_a)$, alors $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}_b$ sont complémentaires [4] donc

$$\mathscr{C}(\mathscr{T}_a) \cap \mathscr{C}(\mathscr{T}_b) = \emptyset.$$

Définition. Soit $\mathscr{F}$ un filtre circulaire distingué d'un infraconnexe D et pour tout $a \in \Delta(\mathscr{F}, D)$ soit $\mathscr{T}_a$ le T-filtre croissant de centre a et de plus grand diamètre. Nous appellerons *partition canonique* de $\Delta(\mathscr{F}, D)$ la famille $(\mathscr{T}_a) a \in \Delta(\mathscr{F}, D)$.

Théorème I.3. *Si $\mathscr{F}$ est un filtre circulaire distingué d'un infraconnèxe D, on a $\mathscr{I}(\mathscr{T}_a) = \mathscr{I}(\mathscr{F})$ pour tout $a \in \Delta(\mathscr{F}, D)$.*

Démonstration. Par hypothèse, d'après la condition (ii), pour tout $a \in \Delta(\mathscr{F}, D)$ et pour tout T-filtre décroissant τ de $\Delta(\mathscr{F}, D)$, τ est sécant à $\mathscr{C}(\mathscr{T}_a)$ de sorte que le filtre circulaire $\mathscr{G}$ associé à $\mathscr{T}_a$ n'est entouré par aucun T-filtre décroissant de diamètre $r \in [\mathrm{diam}(\mathscr{G}), \mathrm{diam}(\mathscr{F})[$. De même puisque $\mathscr{T}_a$ est le T-filtre de plus grand diamètre, de $\Delta(\mathscr{F}, D)$ qui ait pour centre a, alors $\mathscr{G}$ n'est entouré par aucun T-filtre croissant de centre a, de diamètre $r \in]\mathrm{diam}(\mathscr{G}), \mathrm{diam}(\mathscr{F})]$ de sorte que finalement $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$; or $\mathscr{I}(\mathscr{G}) = \mathscr{I}(\mathscr{T}_a)$.

II. CARACTÉRISATION DES IDÉAUX MAXIMAUX ET PROBLÈMES D'UNICITÉ

1. Caractérisation. Nous nous proposons maintenant de caractériser les idéaux maximaux par les filtres circulaires distingués.

LEMME II.1. *Soit $\mathscr{F}$ un filtre circulaire d'un infraconnexe fermé borné D tel que $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ soit un idéal maximal de codimension ∞. Alors $\mathscr{F}$ est sous-distingué et il existe un filtre circulaire distingué $\mathscr{G}$ qui entoure $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$.*

Démonstration. Nous allons montrer que $\mathscr{F}$ satisfait nécessairement (i) et (ii). En effet, pour tout $a \in \Delta(\mathscr{F}, D)$ il existe $f \in \mathscr{I}(\mathscr{F})$ tel que $f(a) \neq 0$; mais on a évidemment $v_a(f, -\log R) = +\infty$; soit μ_a le plus grand des nombres μ tels que $v_a(f, \mu) = +\infty$. Alors f est strictement annulé par un T-filtre croissant $\mathscr{T}_a$ de centre a, de diamètre $\exp(-\mu_a) \leqslant r$, de sorte que $\Delta(\mathscr{F}, D) \supset \mathscr{C}(\mathscr{T}_a)$. Or, par définition,

$$\bigcup_{a \in \Delta(\mathscr{F}, D)} \mathscr{C}(\mathscr{T}_a) \supset \Delta(\mathscr{F}, D),$$

donc la condition (i) est satisfaite d'après le corollaire I.1.

Supposons maintenant que la condition (ii) ne soit pas satisfaite. Alors $\Delta(\mathscr{F}, D) \neq \emptyset$ et il existe un T-filtre décroissant $\mathscr{T}$ de $\Delta(\mathscr{F}, D)$, de diamètre r, qui n'est sécant à aucun chapeau de T-filtre croissant de $\Delta(\mathscr{F}, D)$. Alors, pour tout $f \in \mathscr{I}(\mathscr{F})$, on a $f \in \mathscr{I}(\mathscr{T})$ car $w_{\mathscr{T}}(f, -\log R) = +\infty$, donc

$$w_{\mathscr{T}}(f, \mu) = +\infty \qquad \text{pour tout } \mu \in [-\log R, -\log r]$$

puisque $\mathscr{T}$ n'est sécant à aucun chapeau de T-filtre croissant. Donc $\mathscr{I}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{I}(\mathscr{T})$. Or puisque $\mathscr{T}$ est entouré par $\mathscr{F}$, il est clair que tout élément $f \in H(D)$, strictement annulé par $\mathscr{T}$ n'appartient pas à $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ ce qui contredit le fait que $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ soit maximal. Donc la condition (ii) est satisfaite et $\mathscr{F}$ est sous-distingué.

Supposons maintenant que $\mathscr{F}$ ne soit pas distingué; alors il ne satisfait pas la condition (iii). Supposons d'abord que $\mathscr{F}$ ne soit entouré par aucun T-filtre décroissant et soit R' le diamètre de D. Soit $\mathscr{G}'$ le filtre circulaire de D de diamètre R', qui entoure $\mathscr{F}$. Alors on a $\mathscr{I}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{I}(\mathscr{G}')$

d'après le lemme I.3, donc $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G}')$ puisque $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ est un idéal maximal. Supposons enfin qu'il existe des T-filtres décroissants qui entourent $\mathscr{F}$ et soit R'' la borne inférieure de l'ensemble de leurs diamètres. Alors, d'après le théorème I.2, $\mathscr{F}$ est entouré par un T-filtre de diamètre R''. Le filtre circulaire $\mathscr{G}''$ de diamètre R'' qui entoure $\mathscr{F}$ est tel que $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G}'')$ (toujours grâce au lemme I.2) et le filtre $\mathscr{G} = \mathscr{G}'$ ou $\mathscr{G}''$ que nous avons fait apparaître est sous-distingué, puisque $\mathscr{I}(\mathscr{G})$ est maximal et il est clair que $\mathscr{G}$ satisfait la condition (iii), ce qui achève la démonstration du lemme II.1.

PROPOSITION II.1. *Soit $\mathscr{F}$ un filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné D. Alors $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ est un idéal maximal de codimension infinie de $H(D)$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{M}$ un idéal maximal contenant $\mathscr{I}(\mathscr{F})$. Alors $\mathscr{M}$ est de codimension infinie car sinon $\mathscr{M}$ serait de la forme $\mathscr{I}(a)$ (où $a \in D$) et on aurait donc $f(a) = 0$ pour tout $f \in \mathscr{I}(\mathscr{F})$, ce qui contredit le fait que $\mathscr{F}$ soit distingué. Alors, d'après le lemme II.1, $\mathscr{M}$ est de la forme $\mathscr{I}(\mathscr{G})$ où $\mathscr{G}$ est un filtre circulaire distingué. Mais, d'après le lemme I.2, on a $\mathscr{G} = \mathscr{F}$.

THÉORÈME II.1. *L'application $\mathscr{I}$ induit une bijection de l'ensemble des filtres circulaires distingués sur l'ensemble des idéaux maximaux de codimension ∞.*

Démonstration. Grâce au lemme I.2 et à la proposition II.1, il est clair que $\mathscr{I}$ induit une injection de l'ensemble des filtres circulaires distingués dans l'ensemble des idéaux maximaux de codimension ∞. Mais, grâce à la proposition II.1 et au lemme II.1, tout idéal maximal de codimension ∞ de $H(D)$ est de la forme $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ où $\mathscr{F}$ est un filtre circulaire distingué, ce qui prouve le théorème.

COROLLAIRE II.1. *Un idéal maximal d'une algèbre de Banach $H(D)$ sans idempotent différent de* 0 *et* 1 *est*

ou bien principal, de codimension 1, *de la forme $\mathscr{I}(a) = (x-a)H(D)$ où $a \in \mathring{D}$;*

ou bien de type infini, de codimension 1, *de la forme $\mathscr{I}(a)$ où $a \in D - \mathring{D}$;*

ou bien de type et codimension infinis, de la forme $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ où $\mathscr{F}$ est un filtre circulaire distingué.

2. Filtres distingués réguliers. Nous allons chercher maintenant à quelle condition on peut avoir un filtre sous-distingué $\mathscr{G}$ et un filtre distingué $\mathscr{F}$ tels que $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$.

PROPOSITION II.2. *Soit $\mathscr{G}$ un filtre circulaire distingué de diamètre S et soit $\mathscr{F}$ un filtre circulaire sous-distingué de diamètre R tel que $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$. Alors $\mathscr{G}$ entoure $\mathscr{F}$ et, pour tout $a \in D$ tel que $w_{\mathscr{F}}(a) \in [-\log S, -\log R]$, a est centre d'un T-filtre croissant de diamètre $\varrho \leqslant p^{-w_{\mathscr{F}}(a)}$.*

Démonstration. Il est immédiat de voir que $\mathscr{G}$ entoure $\mathscr{F}$ car $\mathscr{F}$ est entouré par un filtre circulaire distingué $\mathscr{G}'$ tel que $\mathscr{I}(\mathscr{G}') = \mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$. Or $\mathscr{I}(\mathscr{G}) = \mathscr{I}(\mathscr{G}')$ implique $\mathscr{G} = \mathscr{G}'$ d'après le lemme I.2. D'autre part, puisque $\mathscr{G}$ est distingué, pour tout $a \in \Delta(\mathscr{G}, D)$, a est centre d'un T-filtre croissant $\mathscr{T}$ de diamètre $\varrho \leqslant S$. Mais puisque $\mathscr{T}$ n'entoure pas $\mathscr{F}$, on a $-\log\varrho \geqslant w_{\mathscr{F}}(a)$, ce qui prouve la proposition II.2.

Définition. Nous dirons qu'un filtre circulaire distingué $\mathscr{G}$ d'un infraconnexe fermé borné D est *régulier* si D n'admet pas de filtre circulaire sous-distingué $\mathscr{F}$, différent de $\mathscr{G}$, tel que $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$. Si $\mathscr{G}$ n'est pas régulier, nous dirons que $\mathscr{G}$ est *irrégulier*.

Définition. Nous dirons que la partition canonique $\mathscr{C}(\mathscr{T}_a)_{a\in\Delta(\mathscr{F},D)}$ d'un filtre circulaire distingué est *contigue* si pour tout $a \in \Delta(\mathscr{F}, D)$ on a $\operatorname{diam}(\mathscr{T}_a) = \operatorname{diam}(\mathscr{F})$.

THÉORÈME II.2. *Un filtre circulaire distingué $\mathscr{F}$ est régulier si et seulement si $\Delta(\mathscr{F}, D)$ est vide ou bien admet une partition canonique contigue.*

Démonstration. Il est évident que si $\Delta(\mathscr{F}, D) = \emptyset$ alors $\mathscr{F}$ est régulier. De même, il est facile de voir que si $\Delta(\mathscr{F}, D)$ admet une partition canonique contigue, alors $\mathscr{F}$ est régulier. En effet, si $\mathscr{G}$ est un filtre circulaire sous-distingué tel que $\mathscr{I}(\mathscr{G}) = \mathscr{I}(\mathscr{F})$, on sait que $\mathscr{G}$ est sécant à $\Delta(\mathscr{F}, D)$ de sorte que l'un des filtres $\mathscr{T}_a$ entoure $\mathscr{G}$ et l'on a donc $\mathscr{I}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{I}(\mathscr{T}_a)$. Mais par hypothèse $\mathscr{I}(\mathscr{T}_a) = \mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$ et comme $\mathscr{T}_a$ est un T-filtre croissant, la relation $\mathscr{I}(\mathscr{T}_a) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$ implique évidemment que $\mathscr{G}$ soit le filtre circulaire associé à $\mathscr{T}_a$, donc $\mathscr{G} = \mathscr{F}$.

Supposons maintenant que la partition canonique de $\Delta(\mathscr{F}, D)$ ne soit pas contigue. Alors il existe $a \in \Delta(\mathscr{F}, D)$ tel que $\operatorname{diam}(\mathscr{T}_a) < \operatorname{diam}(\mathscr{F})$ et le filtre circulaire de centre a de diamètre $r = \operatorname{diam}(\mathscr{T}_a)$ est évidemment sous-distingué et distinct de $\mathscr{F}$. Mais d'après le théorème I.3 on a $\mathscr{I}(\mathscr{T}_a) = \mathscr{I}(\mathscr{F})$ et comme $\mathscr{I}(\mathscr{T}_a) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$, on a donc $\mathscr{I}(\mathscr{G}) = \mathscr{I}(\mathscr{F})$, ce qui montre que $\mathscr{F}$ est irrégulier.

Le problème de l'existence de filtre circulaire irrégulier est assez délicat. Or ce problème est lié à un autre problème soulevé par B. Guennebaud:

Soit $(A, \|\cdot\|)$ une K-algèbre de Banach et soit $\mathscr{M}$ un idéal maximal de codimension infinie; le corps $\Gamma = A/\mathscr{M}$ peut-il être muni de plusieurs valeurs absolues continues pour la norme de K-algèbre de Banach de Γ quotient de celle de A? Si l'on note Φ la surjection canonique de A sur Γ, il est clair que l'ensemble des valeurs absolues continues w du corps normé Γ est en bijection avec l'ensemble des $f \in \operatorname{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que $\operatorname{Ker}(f) = \mathscr{M}$ par l'application $w \to f_w$ telle que $f_w(x) = w(\Phi(x))$ et l'on est donc ramené, par l'intermédiaire des f_w, à rechercher deux filtres circulaires distincts $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ tels que $\mathscr{I}(\mathscr{F}_1) = \mathscr{I}(\mathscr{F}_2) = \mathscr{M}$.

Si $\mathscr{G}$ est un filtre circulaire irrégulier, alors il existe en effet des filtres circulaires sous-distingués $\mathscr{F} \neq \mathscr{G}$ tels que $\mathscr{I}(\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{G})$ et réciproquement, si $\mathscr{I}(\mathscr{F}_1) = \mathscr{I}(\mathscr{F}_2) = \mathscr{M}$ alors, d'après le lemme I.2 et la proposition II.1, $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont entourés par un même filtre circulaire distingué $\mathscr{G}$ tel que

$$\mathscr{I}(\mathscr{G}) = \mathscr{I}(\mathscr{F}_1) = \mathscr{I}(\mathscr{F}_2) = \mathscr{M}$$

et comme $\mathscr{F}_1 \neq \mathscr{F}_2$ on a au moins $\mathscr{F}_1$ ou $\mathscr{F}_2 \neq \mathscr{G}$, ce qui prouve que $\mathscr{G}$ est irrégulier.

On voit donc que le problème posé par B. Guennebaud, lorsqu'il est restreint à l'étude des algèbres de Krasner, se ramène à celui de l'existence de filtres circulaires distingués irréguliers.

Nous allons résoudre ce problème grâce au théorème II.3.

THÉORÈME II.3. *Si $|K|$ ou si k est non dénombrable, tout filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné de K est régulier. Si $|K|$ et k sont dénombrables, il existe des infraconnexes fermés bornés admettant des filtres circulaires distingués irréguliers.*

Démonstration. Supposons qu'un infraconnexe D admette un filtre circulaire distingué irrégulier $\mathscr{G}$, de diamètre R. Alors $\Delta(\mathscr{G}, D)$ admet une partition non triviale par une famille de chapeaux de T-filtres croissants et, d'après le théorème I.2, il existe un point $O \in \Delta(\mathscr{G}, D)$ (que nous prendrons pour origine) et un nombre $R' < R$ qui majore tous les diamètres des T-filtres croissants de $\Delta(\mathscr{G}, D)$ centrés en O, et tel que pour tout r appartenant à l'ensemble $J = [R', R] \cap |K|$, toute classe Γ du cercle $C(r) = \{x \in K, |x| = r\}$ contienne au moins un trou de D. Nous allons montrer que si $|K|$ ou k est non dénombrable, alors D admet un T-filtre croissant de centre O, de diamètre R, ce qui contredit l'existence de R'.

Supposons d'abord k non dénombrable et montrons que $\Delta(\mathscr{G}, D)$ admet un T-filtre croissant de centre O, de diamètre R.

Pour cela, remarquons que, pour tout $r \in J$, il existe un nombre $\varrho(r) > 0$ et une suite $\Gamma_n(r)$ de classes de $C(r)$ contenant chacune au moins un trou de D, $T_n(r)$ de diamètre au moins égal à $\varrho(r)$. En effet, sinon, l'ensemble des classes percées de $C(r)$ serait dénombrable, car si l'on considère une famille Φ de nombres positifs, non dénombrable, alors il existe $\delta > 0$ et il existe une sous-famille Φ', non dénombrable de Φ, telle que $x \geqslant \delta$ pour tout $x \in \Phi'_j$ or l'ensemble des classes percées n'est pas dénombrable puisque toute classe est percée et que k n'est pas dénombrable. Nous allons construire le T-filtre croissant cherché de la façon suivante. Soit d_n une suite croissante de J telle que

$$\lim_{n \to \infty} d_m = R$$

et soit $C_m = C(d_m)$ et $\varrho_m = \varrho(d_m)$. Pour tout $m \geqslant 2$, soit q_{m-1} tel que

$$\left(\frac{d_{m-1}}{d_m}\right)^{q_{m-1}} \frac{d_m}{\varrho_m} < \frac{1}{m}.$$

Alors il est clair que

$$\frac{d_m}{\varrho_m} \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_j}{d_m}\right)^{q_j} < \frac{1}{m}$$

quel que soit $m \geqslant 2$.

Considérons maintenant q_m classes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{q_m}$ de C_m contenant chacune au moins un trou de D de diamètre supérieur ou égal à ϱ_m. Alors, on a trivialement

$$\gamma_D(\Gamma_i, 1) \leqslant \frac{d_m}{\varrho_m}.$$

Soit

$$\gamma_m = \inf_{1 \leqslant i \leqslant q_m} \gamma(\Gamma_i, D, 1).$$

Il est clair que la suite $(C_m, d_m, q_m, \gamma_m)$ est une suite caractéristique d'un T-filtre croissant de D dont le diamètre est R (voir [3]). La démonstration est donc achevée pour k non dénombrable.

Supposons maintenant que $|K|$ est non dénombrable. Soit r_n une suite croissante de J telle que

$$\lim_{n \to \infty} r_n = R$$

et soit r'_n une suite croissante de J telle que $r_{n-1} < r'_n < r_n$, quel que soit n. Puisque $|K|$ est non dénombrable, $J \cap [r_{n-1}, r'_n]$ est non dénombrable et il existe une suite de nombres $\varrho_n > 0$ et, pour tout n fixé, il existe une suite $j \to (\xi_j^n)$ de J telle que $r_{n-1} < \xi_j^n < r'_n$ quel que soit j et telle que le cercle $C(\xi_j^n)$ contienne au moins un trou T_j^n de D de diamètre supérieur ou égal à ϱ_n. Alors, pour tout n fixé, choisissons une classe Γ_j^n du cercle $C(\xi_j^n)$ telle que Γ_j^n contienne un trou T_j^n de diamètre au moins égal à ϱ_n. Alors, par hypothèse, on a $\gamma_D(\Gamma_j^n, 1) \leqslant R/\varrho_n$ pour tout $j \in N$, et pour tout $n \in N$.

Définissons une suite d_m de la façon suivante. Pour tout $n \in N$, soit $S_n \in N$ tel que

$$\left(\frac{r'_n}{r_n}\right)^{S_n} \frac{1}{\varrho_n} < \frac{1}{n}$$

et soit

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Alors soient $d_m = \xi^{n+1}_{m-t_n}$ et $\gamma_m = \gamma_D(\Gamma^{n+1}_{m-t_n}, 1)$ pour tout m tel que $t_n < m \leqslant t_{n+1}$. Il est clair que si $t_n < m \leqslant t_{n+1}$, on a

$$\gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \frac{d_j}{d_m} < \frac{1}{n},$$

ce qui montre que la suite $(C(d_m), d_m, 1, \gamma_m)$ est une suite caractéristique d'un T-filtre [3] et la première partie du théorème est donc établie.

Montrons maintenant que si $|K|$ et k sont dénombrables, alors il existe des infraconnexes fermés bornés admettant un filtre circulaire distingué irrégulier. Pour cela nous allons construire un infraconnexe D inclus dans la couronne $\frac{1}{2} < |x| < 1$, tel que pour tout cercle $C(0, r)$, où $\frac{1}{2} < r < 1$ et $r \in |K|$, et pour toute classe Γ de $C(0, r)$, $\Gamma \cap D$ soit un infraconnexe dont l'ensemble des trous internes est une suite à distances croissantes qui définit un T-filtre croissant $\mathscr{T}(\Gamma)$, de diamètre r, satisfaisant certaines conditions que nous préciserons ensuite.

Il est clair que la famille des ensembles $\mathscr{C}(\mathscr{T}(\Gamma))$, où Γ parcourt l'ensemble Λ des classes de tous les cercles $C(0, r)$, $r \in]\frac{1}{2}, 1[\cap |K|$, est une partition de D; alors nous montrerons que l'on peut imposer aux T-filtres $\mathscr{T}(\Gamma)$ $(\Gamma \in \Lambda)$ des conditions telles que tout T-filtre de D appartienne à l'ensemble τ des T-filtres $\mathscr{T}(\Gamma)$, $\Gamma \in \Lambda$, ce qui prouve que le filtre circulaire de D de centre 0, de diamètre 1, est distingué et irrégulier.

Remarquons d'abord que puisque $|K|$ est dénombrable, nous pouvons nous ramener au cas où $\log r \in Q$ pour tout $r \in |K|$, ce que nous supposerons donc.

Pour tout $r \in]\frac{1}{2}, 1[\cap |K|$, écrivons $\log r$ sous sa forme irréductible $a/b \in Q$ et soit $l(r) = a^b$. Alors il est immédiat de voir que l'application définie sur $]\frac{1}{2}, 1[\cap |K|$ par $r \to l(r)$ est injective. Pour chaque cercle $C(0, r)$ et pour tout entier $q \geqslant 1$, soit

$$\gamma(r, q) = \sup_{\substack{i=1,\dots,k \\ q_1+\dots+q_k=q}} \gamma_D(\Gamma_i, q_i),$$

où les Γ_i sont des classes quelconques du cercle $C(0, r)$.

Nous construirons ultérieurement l'ensemble D tel que l'on ait pour tout r et pour tout $q \in N$

$$\log \gamma(r, q) \geqslant l(r)^{2^{l(r)+1}} \sqrt{q} \tag{1}$$

et nous allons montrer que si cette relation est vraie pour tout r et pour tout q, alors le problème est résolu.

En effet, supposons que D admette un T-filtre Φ qui n'appartienne pas à la famille τ. Alors Φ n'est sécant à aucune classe Γ d'aucun cercle

$C(0, r)$ puisque le seul T-filtre d'un ensemble de la forme $\Gamma \cap D$ appartient à τ par construction. Par conséquent, Φ admet l'origine pour centre; soit R son diamètre. Nous supposerons pour la démonstration que Φ est croissant; si Φ est décroissant, on obtient naturellement par inversion une démonstration calquée sur celle-ci puisque de toute façon Φ est centré à l'origine.

Exprimons le fait que Φ soit un T-filtre croissant.

Il existe une suite $d_m \in K$ telle que

$$d_m < d_{m+1} \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} d_m = R$$

et une suite d'entiers q_m satisfaisant

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m-1} (\log R - \log d_j) q_j - \log \gamma_m(q_m) = +\infty,$$

où l'on note $\gamma_m(q_m) = \gamma(d_m, q_m)$. A fortiori on a donc

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m-1} q_j - \log \gamma_m(q_m) = +\infty$$

et, trivialement, il existe un rang u tel que, pour tout $m \geqslant u$, on ait

$$\sum_{j=1}^{m-1} q_j - \log \gamma_m(q_m) \geqslant 0,$$

d'où, grâce à (1),

$$\sqrt{q_m} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{m-1} q_j}{\lambda_m}, \tag{2}$$

où l'on pose

$$\lambda_m = l(d_m)^{2^{l(d_m)+1}}. \tag{3}$$

Pour tout m, soit

$$h(m) = \sup_{j<m} q_j;$$

alors, d'après (2), on a

$$q_m \leqslant \left(\frac{m h(m)}{\lambda_m}\right)^2.$$

On en déduit par récurrence et à l'aide de majorations grossières en posant $A = h(u)$ que la suite q_m admet une suite majorante de la forme $(mA)^{2^m}/\lambda_m^2$. En effet, il existe une suite finie décroissante $n_1, \ldots, n_s$

telle que $q_{n_1} = h(m)$, $q_{n_{i+1}} = h(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, $q_u = h(n_s)$ et l'on voit par récurrence que

$$q_m \leqslant \frac{m^2 n_1^{2^2} \dots n_s^{2^{s+1}} h(u)^{2^{s+1}}}{\lambda_m^2 \lambda_{n_1}^{2^2} \dots \lambda_{n_s}^{2^{s+1}}},$$

d'où a fortiori

$$q^m \leqslant \frac{m^{\sum_{i=1}^{m-1} 2^i} A^{2^{m-1}}}{\lambda_m^2},$$

car $s+1 \leqslant m-u \leqslant m-1$; or

$$\sum_{i=1}^{m-1} 2^i = 2^m - 2,$$

d'où finalement

$$q_m \leqslant \frac{(mA)^{2^m}}{\lambda_m^2}. \tag{4}$$

D'autre part, comme la fonction définie sur $Q \cap \,]\tfrac{1}{2}, 1[$ par $r \to n(r)$ est injective, la suite $m \to g(m) = n(d_m)$ est injective et il existe donc une sous-suite $t \to m_t$ telle que $g(m_t) \geqslant m_t$ pour tout t. Alors, d'après (2) et (3), la relation (4) donne

$$q_{m_t} \leqslant \frac{A^{2^{m_t}} m_t^{2^{m_t}}}{[g(m_t)^{2^{g(m_t)}}]^4} = \frac{A^{2^{m_t}}}{g(m_t)^{2^{g(m_t)}}} \frac{m_t^{2^{m_t}}}{g(m_t)^{2^{g(m_t)}}} \frac{1}{g(m_t)^{2^{g(m_t)+1}}}$$
$$\leqslant \frac{1}{g(m_t)^{2^{g(m_t)+1}}},$$

ce qui prouve que

$$\lim_{t \to \infty} q_{m_t} = 0,$$

donc $q_{m_t} < 1$ pour t assez grand, ce qui est absurde puisque $q_m \geqslant 1$ pour tout m par définition.

Construisons maintenant l'ensemble D tel que pour toute classe $\Gamma \in \Lambda$, $\Gamma \cap D$ admette un T-filtre croissant de diamètre $r = \operatorname{diam}(\Gamma)$ et tel que pour chaque cercle $C(0, r)$ l'on ait

$$\log \gamma(r, q) \geqslant l(r)^{2^{l(r)+1}} \sqrt{q}.$$

Soit $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$; nous allons définir un ensemble $\Delta(\lambda)$ qui servira ensuite de modèle pour construire chaque classe d'un cercle $C(0, r)$ de l'ensemble

D cherché. Soit $a_1, \dots, a_n, \dots$ une suite de K telle que $v(a_n) = \lambda/\sqrt{n}$ et soit $\Delta(\lambda)$ l'ensemble des $x \in K$ tels que $v(x) > 0$ et $v(x-a_n) \leqslant \lambda\sqrt{n}/2$ quel que soit $n \in N$.

Il est immédiat de voir que $\Delta(\lambda)$ admet un T-filtre croissant de diamètre 1. En effet, $\Delta(\lambda)$ admet un filtre percé croissant $\mathscr{F}$ de diamètre 1, défini par la suite des trous T_n de centre a_n, de diamètre

$$\varrho_n = \exp\left(-\frac{\lambda\sqrt{n}}{2}\right),$$

et si l'on note $\delta_n = d(0, T_n)$, on a $\log\delta_n = -\lambda/\sqrt{n}$ de sorte que

$$\sum_{j=1}^{n-1}(\log\delta_n - \log\delta_j) = \lambda\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}}\right) - \sqrt{n}\right] \geqslant \lambda\sqrt{n}$$

et

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1}\log\delta_n - \log\delta_j\right) + \log\varrho_n \geqslant \frac{\lambda}{2}\sqrt{n},$$

ce qui prouve que $\mathscr{F}$ est un T-filtre.

Nous allons maintenant minorer les expressions $\gamma(\Delta(\lambda), q)$, $q \in N$. Nous allons établir la relation

$$\text{(5)} \qquad \log\gamma(\Delta(\lambda), q) \geqslant \frac{\lambda\sqrt{q}}{2}.$$

En effet, soient $a_1, \dots, a_q$ appartenant à des trous internes $T_{n_1}, \dots, T_{n_q}$ (non nécessairement tous distincts) de $\Delta(\lambda)$. Alors ou bien il existe un indice i tel que $n_i \geqslant q$, et alors

$$\log\left\|\frac{1}{x-a_i}\right\|_{\Delta(\lambda)} = -\log\varrho_{n_i} \geqslant \frac{\lambda\sqrt{q}}{2},$$

d'où a fortiori

$$\log\left\|\frac{1}{\prod_{i=1}^{q}(x-a_i)}\right\|_{\Delta(\lambda)} \geqslant \frac{\lambda\sqrt{q}}{2},$$

ou bien $n_i < q$ pour tout i et alors pour $|x| \leqslant d_q$, on a

$$\left\|\prod_{i=1}^{q}(x-a_i)\right\|_{\Delta(\lambda)} \leqslant d_q^q,$$

d'où

$$\log\left\|\frac{1}{\pi(x-a_i)}\right\|_{\Delta(\lambda)} \geqslant \lambda q\log d_q = \lambda\sqrt{q},$$

ce qui prouve la relation (5) dans tous les cas.

Avant de construire l'ensemble D, remarquons encore que si un infraconnexe D_2 de K est image d'un infraconnexe D_1 par une similitude S, on a pour tout $q \in N$, $\gamma(D_2, q) = \gamma(D_1, q)$. D'autre part, si D_1 admet, par exemple, un T-filtre de centre a et de diamètre r, alors D_2 admet un T-filtre de centre $S(a)$ et de diamètre ϱr, où ϱ est le rapport de la similitude S.

Pour tout $r \in]\frac{1}{2}, 1[$, on peut indexer les classes du cercle $C(0, r)$ en une suite Γ_n, puisque k est dénombrable. Soit a_n une suite de $C(0, r)$ telle que $a_n \in \Gamma_n$; notons $B(r) = l(r)^{2^{l(r)}+1}$ et pour tout $n \in N$, soit $\Delta_{r,n}$ l'image de $\Delta\big(2^{n+1}B(r)\big)$ par une similitude de rapport r qui applique 0 sur a_n et soit

$$D = \bigcup_{\substack{n\in N\\ r\in]1/2,1[}} \Delta_{r,n}.$$

D'après les propriétés des ensembles $\Delta(\lambda)$ que l'on retrouve dans les $\Delta_{r,n}$, il est clair que pour chaque classe Γ de $C(0, r)$, $\Gamma \cap D$ possède un T-filtre unique croissant, de diamètre r; il reste donc à montrer que D n'admet pas d'autre T-filtre que ceux-ci et pour cela, comme nous l'avons vu, que les expressions $\gamma(r, q)$ satisfont la relation (1).

En effet, d'après la relation (5), on a

$$\log\gamma(\Delta_{r,n}, q) \geqslant 2^{n+2}B(r)\frac{\sqrt{q}}{2} = 2^{n+1}B(r)\sqrt{q}.$$

Mais, en reprenant les notations précédentes, on a

$$\log\gamma(r, q) = \sup_{\substack{i=1,\dots,k\\ q_1+\dots+q_k=q}} \log\gamma_D(\Gamma_i, q_i) = \sup_{\substack{i=1,\dots,k\\ q_1+\dots+q_k=q}} \log\gamma(\Delta_{r,n_i}, q_i),$$

ce qui nous donne, pour tout $i = 1, \dots, k$,

$$\sqrt{q_i}\,2^{n_i+1}B(r) \leqslant \log\gamma(r, q),$$

d'où

$$q = \sum_{i=1}^{k} q_i \leqslant \left(\frac{\log\gamma(r, q)}{B(r)}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} 2^{-(n_i+1)}.$$

Mais comme $n_i \neq n_j$ pour $i \neq j$ (par définition), on a

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{-(n_i+1)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} = 1,$$

d'où la relation cherchée $\sqrt{q}B(r) \leqslant \log\gamma(r, q)$ et l'ensemble D est construit.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Escassut, *Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne*, Indagationes Mathematicae 36 (1974), p. 339-351.

[2] — *Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 110 (1977), p. 335-352.

[3] — *T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) 25 (2) (1975), p. 75-110.

[4] — *Algèbres de Krasner intègres et noethériennes*, Proceedings of the Section of Sciences. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A, 79 (1976), p. 109-130.

[5] — *Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate*, Astérisque 10, Octobre 1973, p. 1-107.

[6] G. Garandel, *Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner*, Proceedings of the Section of Sciences. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A, 78 (1975), p. 327-341.

[7] L. Gruson, *Algèbres de Banach ultramétriques*, Journées Poitou-Aquitaine (1967) (polycopié).

[8] B. Guennebaud, *Algèbres localement convexes sur les corps values*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-ème série, 91 (1967), p. 75-96.

[9] — *Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques*, Doctorat ès-Sciences, Université de Poitiers 1, 1973.

[10] M. Krasner, *Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres*, Colloques Internationaux du C.N.R.S. 143, Clermont-Ferrand 1964, Edition du C.N.R.S. 1966.

[11] — *Prolongement analytique dans les corps valués complets: démonstration du théorème de Mittag-Löffler; singularités au bord*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 245 (1957), p. 1285-1287.

[12] M. Lazard, *Les zéros d'une fonction analytique*, P.U.F. Paris, I.H.E.S., Publication Mathématique 14.

[13] E. Motzkin et Ph. Robba, *Prolongement analytique en analyse p-adique*, Séminaire de Théorie des Nombres, Faculté des Sciences de Bordeaux (J. Lesca) 3 (1968-1969) (polycopié).

[14] Ph. Robba, *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*, Astérisque 10, Octobre 1973.

[15] P. Salmon, *Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, serie IVT, 65 (1964).

[16] J. Tate, *Rigid analytic spaces*, Inventiones Mathematicae 12 (1971), p. 257-289.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ASSOCIÉ DU C.N.R.S.
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX 1
TALENCE, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 23. 9. 1975;
en version modifiée le 11. 3. 1976