ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1961)

M. ŻYCZKOWSKI (Kraków)

CAŁKI WZGLĘDEM MODUŁU Z KWADRATÓW PEŁNYCH CAŁEK ELIPTYCZNYCH

1. Zakres pracy. Przy obliczaniu skończonych ugięć pręta przy wyboczeniu pełzającym ([8]), występuje całka

$$\bar{K}_{-1} = \int \frac{K^2(k)}{k} dk, \tag{1.1}$$

gdzie $K(k)$ jest pełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju, k — jej modułem, przy czym $0 \leqslant k \leqslant 1$. Całka ta należy do rodziny funkcyj, które będziemy oznaczać przez $\bar{K}_n(k)$, $\bar{E}_n(k)$ i $\bar{M}_n(k)$, a mianowicie

$$\begin{cases} \bar{K}_n(k) = \int k^n K^2(k) dk, \\ \bar{E}_n(k) = \int k^n E^2(k) dk, \\ \bar{M}_n(k) = \int k^n E(k) K(k) dk, \end{cases} \tag{1.2}$$

przy czym $E(k)$ jest pełną całką eliptyczną drugiego rodzaju. Są to funkcje modułu k; dla uproszczenia zazwyczaj będziemy opuszczali literę k w zapisie. Ponieważ zastosowanie całek należących do rodziny (1.2) może być znacznie szersze, wydaje się więc celowe przeprowadzenie pewnej analizy tych całek, wyprowadzenie wzorów redukcyjnych, rozwinięcie w szereg i stablicowanie. Te zagadnienia stanowią przedmiot niniejszej pracy. Rozważania nasze będą się odnosić w zasadzie do całek nieoznaczonych; stałe całkowania ustalimy tylko przy rozwinięciach na szeregi i przy tablicowaniu.

Funkcje (1.2) są na ogół nowymi funkcjami nieelementarnymi i nie zostały dotychczas zbadane. Należy jednak wspomnieć, że podobne, lecz prostsze funkcje, mianowicie

$$\int k^n K(k) dk, \qquad \int k^n E(k) dk,$$

dają się w wielu przypadkach wyrazić w postaci skończonej kombinacji przez całki eliptyczne, mianowicie dla n nieparzystych dodatnich lub parzystych ujemnych. Spis wzorów dla tych funkcji można znaleźć w monografii [1], a także w specjalnie im poświęconej pracy E. L. Kaplana [5], który ponadto podaje tablice liczbowe dla ułamkowych wartości n. Interesujące nas funkcje (1.2) wyrażają się natomiast w postaci skończonej przez całki eliptyczne tylko w bardzo nielicznych przypadkach.

2. Wzory redukcyjne. Zajmiemy się najpierw wyprowadzeniem wzorów redukcyjnych dla całek (1.2). Będziemy przy tym korzystać z wzorów na pochodne pełnych całek eliptycznych względem modułu, mianowicie:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dk}K(k) &= \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \\ \frac{d}{dk}E(k) &= \frac{E-K}{k}. \end{aligned}\right. \tag{2.1}$$

Różniczkując względem k funkcje

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dk}(k^{n+1}K^2) &= (n+1)k^n K^2 + 2k^{n+1}K\left[\frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}\right], \\ \frac{d}{dk}(k^{n+1}E^2) &= (n+1)k^n E^2 + 2k^{n+1}E\left(\frac{E}{k} - \frac{K}{k}\right), \\ \frac{d}{dk}(k^{n+1}EK) &= (n+1)k^n EK + k^{n+1}K\left(\frac{E}{k} - \frac{K}{k}\right) + \\ &\quad + k^{n+1}E\left[\frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}\right], \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

stwierdzamy, że w pochodnych występują wyłącznie iloczyny i kwadraty całek eliptycznych, a zatem, że całek typu (1.2) należy zasadniczo poszukiwać również wśród funkcyj tego samego typu. Po prawej stronie (2.2) występują jednak, prócz funkcyj typu $k^n K^2$, $k^n E^2$ i $k^n EK$, także funkcje ogólniejsze typu $k^n k'^m K^2$, $k^n k'^m E^2$ i $k^n k'^m EK$, gdzie

$$k' = \sqrt{1-k^2} \tag{2.3}$$

jest tzw. „modułem dopełniającym". Do bezpośredniego scałkowania równań (2.2) musimy więc zająć się również całkami typu

$$\left\{\begin{aligned} \bar{K}_{n;m} &= \int k^n k'^m K^2(k)\,dk, \\ \bar{E}_{n;m} &= \int k^n k'^m E^2(k)\,dk, \\ \bar{M}_{n;m} &= \int k^n k'^m E(k)K(k)\,dk. \end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

Całki te będziemy traktowali ubocznie; interesują nas one zasadniczo tylko dla $m = 0$, wtedy bowiem $\bar{K}_{n;0} = \bar{K}_n$, $\bar{E}_{n;0} = \bar{E}_n$, $\bar{M}_{n;0} = \bar{M}_n$.

Okaże się, że do wyprowadzenia wzorów redukcyjnych dla całek (1.2) wystarczy zająć się całkami (2.4) tylko dla $m = -2$.

Całkując obustronnie (2.2.1), otrzymujemy

$$k^{n+1}K^2 = (n-1)\bar{K}_n + 2\bar{M}_{n;-2}. \tag{2.5}$$

Ostatni składnik po prawej stronie daje się bezpośrednio wyrazić przez całki prostsze. Mianowicie

$$\bar{M}_{n;-2} = \int \frac{k^n EK}{1-k^2}\,dk = \int \frac{(k^n - k^{n-2} + k^{n-2})EK}{1-k^2}\,dk = \tag{2.6}$$

$$= -\bar{M}_{n-2} + \bar{M}_{(n-2);-2}.$$

Stosując ten wzór odpowiednią ilość razy dla całkowitych dodatnich n otrzymujemy

$$\bar{M}_{n;-2} = -\sum_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\dots\\1,3,5,\dots}\right.}^{n-2} \bar{M}_\nu + \bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}, \tag{2.7}$$

przy czym górny wiersz wskaźników odnosi się do n parzystych, dolny do nieparzystych. Tym samym zredukowaliśmy całki pomocnicze typu (2.4.3) do dwóch: $\bar{M}_{0;-2}$ i $\bar{M}_{1;-2}$ (podobną redukcję przeprowadzimy później dla n ujemnych). Ostatecznie, zmieniając strony tak, by wielkości niewiadome znalazły się po lewej, napiszemy wzór (2.5) w postaci

$$(n-1)\bar{K}_n - 2\sum_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\dots\\1,3,5,\dots}\right.}^{n-2} \bar{M}_\nu + 2\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.} = k^{n+1}K^2. \tag{2.8}$$

Podobnie, całkując obustronnie (2.2.2) otrzymujemy bezpośrednio

$$(n+3)\bar{E}_n - 2\bar{M}_n = k^{n+1}E^2. \tag{2.9}$$

Całkując obustronnie (2.2.3) otrzymujemy najpierw

$$k^{n+1}EK = (n+1)\bar{M}_n - \bar{K}_n + \bar{E}_{n;-2}, \tag{2.10}$$

a po zastosowaniu redukcji całki $\bar{E}_{n;-2}$ analogicznej do (2.7) uzyskujemy związek

$$(n+1)\bar{M}_n - \bar{K}_n - \sum_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\dots\\1,3,5,\dots}\right.}^{n-2} \bar{E}_\nu + \bar{E}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.} = k^{n+1}EK. \tag{2.11}$$

W równaniach (2.8), (2.9) i (2.11) występują tylko trzy całki rzędu n: $\bar{K}_n$, $\bar{E}_n$ i $\bar{M}_n$, ponadto występują całki niższych rzędów i funkcje znane. Traktując te równania jako układ trzech równań o powyższych trzech niewiadomych możemy uzyskać poszukiwane wzory, redukujące całki $\bar{K}_n$, $\bar{E}_n$ i $\bar{M}_n$ do $\bar{M}_{n-2}$, $\bar{E}_{n-2}$ oraz $\bar{M}_{0;-2}$ i $\bar{E}_{0;-2}$ lub $\bar{M}_{1;-2}$ i $\bar{E}_{1;-2}$. Rozwiązanie układu jest dość proste, żadne bowiem z trzech równań nie zawiera wszystkich trzech niewiadomych; ostateczne wzory redukcyjne, słuszne dla $n \geqslant 2$, przyjmują postać

$$
(2.12)\quad \begin{cases}
\bar{K}_n = \dfrac{1}{n-1}\Big[k^{n+1}K^2 + 2\sum\limits_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{M}_\nu - 2\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}\Big], \\[2ex]
\bar{E}_n = \dfrac{1}{(n^2-1)(n+3)}\Big[(n^2-1)k^{n+1}E^2 + 2(n-1)k^{n+1}EK + 2k^{n+1}K^2 + \\
\quad + 2(n-1)\sum\limits_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{E}_\nu - 2(n-1)\bar{E}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.} + 4\sum\limits_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{M}_\nu - 4\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}\Big], \\[2ex]
\bar{M}_n = \dfrac{1}{n^2-1}\Big[(n-1)k^{n+1}EK + k^{n+1}K^2 + (n-1)\sum\limits_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{E}_\nu - \\
\quad - (n-1)\bar{E}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.} + 2\sum\limits_{\nu=\left\{\substack{0,2,4,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{M}_\nu - 2\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}\Big].
\end{cases}
$$

Wyprowadzimy teraz analogiczne wzory redukcyjne dla ujemnych wartości wykładników. Zastępując w równaniach (2.2) n przez $(-n)$ i uważając znowu n za liczbę całkowitą dodatnią otrzymujemy po scałkowaniu

$$
(2.13)\quad \begin{cases}
k^{-n+1}K^2 = -(n-1)\bar{K}_{-n} + 2\bar{M}_{-n;-2} - 2\bar{K}_{-n}, \\
k^{-n+1}E^2 = -(n-3)\bar{E}_{-n} - 2\bar{M}_{-n}, \\
k^{-n+1}EK = -(n-1)\bar{M}_{-n} - \bar{K}_{-n} + \bar{E}_{-n;-2}.
\end{cases}
$$

Redukcja całek typu $\bar{M}_{-n;-2}$ jest zbliżona do (2.6):

$$
(2.14)\quad \bar{M}_{-n;-2} = \int \frac{EK}{k^n(1-k^2)}\,dk = \int \frac{(1-k^2+k^2)EK}{k^n(1-k^2)}\,dk =
$$
$$
= \bar{M}_{-n} + \bar{M}_{(-n+2);-2} = \bar{M}_{-n} + \sum_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{M}_{-\nu} + \bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}.
$$

Układ równań (2.13) przepiszemy teraz w postaci

$$
(2.15)\quad \begin{cases}
-(n+1)\bar{K}_{-n} + 2\bar{M}_{-n} + 2\sum\limits_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{M}_{-\nu} + 2\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.} = k^{-n+1}K^2, \\[2ex]
-(n-3)\bar{E}_{-n} - 2\bar{M}_{-n} = k^{-n+1}E^2, \\[2ex]
-(n-1)\bar{M}_{-n} - \bar{K}_{-n} + \bar{E}_{-n} + \sum\limits_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2} \bar{E}_{-\nu} + \bar{E}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.} = k^{-n+1}EK.
\end{cases}
$$

Traktując ten układ jako układ trzech równań o trzech niewiadomych $\bar{K}_{-n}$, $\bar{E}_{-n}$ i $\bar{M}_{-n}$, możemy uzyskać poszukiwane wzory redukcyjne. Układ (2.15) jest bardziej skomplikowany od poprzednio rozwiązywanego układu, bo tylko pierwsze dwa równania są niezupełne. Ostateczne wzory, redukujące całki $\bar{K}_{-n}, \bar{E}_{-n}$ i $\bar{M}_{-n}$ do $\bar{M}_{-n-2}, \bar{E}_{-n-2}$ oraz $\bar{M}_{0;-2}$ i $\bar{E}_{0;-2}$ lub $\bar{M}_{1;-2}$ i $\bar{E}_{1;-2}$ przyjmują dla $n \geqslant 2$ postać

$$
(2.16)\left\{\begin{aligned}
\bar{K}_{-n} &= \frac{1}{(n-1)^3}\Big[-(n^2-4n+5)k^{-n+1}K^2-2k^{-n+1}E^2-\\
&\quad -2(n-3)k^{-n+1}EK+2(n^2-4n+5)\sum_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2}\bar{M}_{-\nu}+\\
&\quad +2(n-3)\sum_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2}\bar{E}_{-\nu}+2(n^2-4n+5)\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}+2(n-3)\bar{E}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}\Big],\\
\bar{E}_{-n} &= \frac{1}{(n-1)^3}\Big[-(n^2+1)k^{-n+1}E^2-2k^{-n+1}K^2+2(n+1)k^{-n+1}EK+\\
&\quad +4\sum_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2}\bar{M}_{-\nu}-2(n+1)\sum_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2}\bar{E}_{-\nu}+4\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}-2(n+1)\bar{E}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}\Big],\\
\bar{M}_{-n} &= \frac{1}{(n-1)^3}\Big[(n-3)k^{-n+1}K^2-(n+1)k^{-n+1}E^2-\\
&\quad -(n+1)(n-3)k^{-n+1}EK-2(n-3)\sum_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2}\bar{M}_{-\nu}+\\
&\quad +(n+1)(n-3)\sum_{\nu=\left\{\substack{2,4,6,\ldots\\1,3,5,\ldots}\right.}^{n-2}\bar{E}_{-\nu}-2(n-3)\bar{M}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}+(n+1)(n-3)\bar{E}_{\left\{\substack{0;-2\\1;-2}\right.}\Big].
\end{aligned}\right.
$$

Szczególną uwagę zwrócimy na przypadek $n = 3$ w równaniach (2.15.2) i (2.16.3). Otrzymujemy wtedy

$$
(2.17)\qquad \bar{M}_{-3} = \int \frac{EK}{k^3}\,dk = -\frac{E^2}{2k^2}
$$

i odpowiedni wzór redukcyjny staje się wzorem zamkniętym, wyrażając bezpośrednio całkę $\bar{M}_{-3}$ przez całki eliptyczne. Jest to, jak się okazuje, jedyny przypadek całki typu (1.2), która daje się wyrazić przez skończoną liczbę całek eliptycznych.

Wzory (2.12) i (2.16) redukują rozpatrywane całki typu (1.2) dla dowolnego całkowitego n do 13 całek, mianowicie 9 całek typu (1.2): $\bar{K}_1$, $\bar{E}_1$, $\bar{M}_1$, $\bar{K}_0$, $\bar{E}_0$, $\bar{M}_0$, $\bar{K}_{-1}$, $\bar{E}_{-1}$, $\bar{M}_{-1}$, oraz 4 całek typu

(2.4): $\bar{M}_{0;-2}$, $\bar{M}_{1;-2}$, $\bar{E}_{0;-2}$ i $\bar{E}_{1;-2}$. Całki te są dodatkowo związane dziewięcioma równaniami, mianowicie niewykorzystanymi dotąd równaniami (2.5), (2.9) i (2.10) dla $n = 1$, $n = 0$ i $n = -1$. Zatem ostatecznie tylko cztery całki będą nowymi funkcjami nieelementarnymi, a pozostałe wyrażą się przez skończoną kombinację tych całek i całek eliptycznych.

Równania (2.5), (2.9) i (2.10) przyjmują w rozpatrywanym teraz przypadku następującą postać:

dla $n = 1$

$$\left\{\begin{aligned} 2\bar{M}_{1;-2} &= k^2K^2, \\ 4\bar{E}_1-2\bar{M}_1 &= k^2E^2, \\ 2\bar{M}_1-\bar{K}_1+\bar{E}_{1;-2} &= k^2EK; \end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

dla $n = 0$

$$\left\{\begin{aligned} -\bar{K}_0+2\bar{M}_{0;-2} &= kK^2, \\ 3\bar{E}_0-2\bar{M}_0 &= kE^2, \\ \bar{M}_0-\bar{K}_0+\bar{E}_{0;-2} &= kEK; \end{aligned}\right. \tag{2.19}$$

dla $n = -1$, po zastosowaniu redukcji typu (2.14),

$$\left\{\begin{aligned} -2\bar{K}_{-1}+2\bar{M}_{-1}+2\bar{M}_{1;-2} &= K^2, \\ 2\bar{E}_{-1}-2\bar{M}_{-1} &= E^2, \\ -\bar{K}_{-1}+\bar{E}_{-1}+\bar{E}_{1;-2} &= EK. \end{aligned}\right. \tag{2.20}$$

Z równań tych można bezpośrednio określić dwie poszukiwane całki, mianowicie z równania (2.18.1)

$$\bar{M}_{1;-2} = \int \frac{kEK}{1-k^2}\,dk = \tfrac{1}{2}k^2K^2, \tag{2.21}$$

a przez dodanie do siebie równań (2.20.1), (2.20.2) i pomnożonego przez (-2) równania (2.20.3), oraz wobec (2.21),

$$\bar{E}_{1;-2} = \int \frac{kE^2}{1-k^2}\,dk = \tfrac{1}{2}k^2K^2-\tfrac{1}{2}(K-E)^2. \tag{2.22}$$

Nie są to już jednak całki typu (1.2), lecz typu (2.4), a zatem mają dla nas jedynie znaczenie pomocnicze.

Pozostaje 7 niezależnych równań o 11 poszukiwanych funkcjach. Cztery spośród tych jedenastu funkcji przyjmiemy za nowe funkcje nieelementarne, przy czym powinny to być dwie spośród występujących w równaniach (2.19) funkcyj $\bar{K}_0$, $\bar{E}_0$, $\bar{M}_0$, $\bar{E}_{0;-2}$ i $\bar{M}_{0;-2}$, oraz dwie spośród występujących w równaniach (2.18) i (2.20) (z których po obliczeniu $\overline{M}_{1;-2}$ i $\overline{E}_{1;-2}$ już tylko cztery są niezależne) funkcyj $\overline{K}_1$, $\overline{E}_1$, $\overline{M}_1$, $\overline{K}_{-1}$, $\overline{E}_{-1}$ i $\overline{M}_{-1}$. Przy doborze tych funkcji będziemy się kierować względami praktycznymi, mianowicie łatwością ich stablicowania. Ponieważ funkcja $E(k)$ wykazuje słabszą osobliwość niż funkcja $K(k)$, i szeregi określające tę funkcję są szybciej zbieżne, a rachunki numeryczne obarczone mniejszym błędem, przeto z pierwszej grupy pięciu funkcji przyjmiemy za nowe funkcje nieelementarne całki $\overline{E}_0$ i $\overline{E}_{0;-2}$, a z drugiej grupy sześciu funkcji — całki $\overline{E}_1$ i $\overline{E}_{-1}$. Pozostałe całki wyrażą się wtedy następująco:

$$(2.23)\quad \begin{cases} \overline{K}_0 &= -\frac{1}{2}kE^2 - kEK + \frac{3}{2}\overline{E}_0 + \overline{E}_{0;-2}, \\ \overline{M}_0 &= -\frac{1}{2}kE^2 + \frac{3}{2}\overline{E}_0, \\ \overline{M}_{0;-2} &= \frac{1}{2}kK^2 - \frac{1}{2}kEK - \frac{1}{4}kE^2 + \frac{3}{4}\overline{E}_0 + \frac{1}{2}\overline{E}_{0;-2}, \\ \overline{K}_1 &= -\frac{1}{2}(1-k^2)K^2 + (1-k^2)EK - \frac{1}{2}(1+2k^2)E^2 + 4\overline{E}_1, \\ \overline{M}_1 &= -\frac{1}{2}k^2E^2 + 2\overline{E}_1, \\ \overline{K}_{-1} &= \frac{1}{2}k^2K^2 - \frac{1}{2}K^2 - \frac{1}{2}E^2 + \overline{E}_{-1}, \\ \overline{M}_{-1} &= -\frac{1}{2}E^2 + \overline{E}_{-1}. \end{cases}$$

W ten sposób dowolną całkę typu (1.2) dla całkowitych n sprowadzić możemy dzięki wzorom redukcyjnym (2.12) i (2.16) oraz wzorom (2.21), (2.22) i (2.23) do czterech całek $\overline{E}_0$, $\overline{E}_1$, $\overline{E}_{-1}$ i $\overline{E}_{0;-2}$. Zajmiemy się teraz pokrótce analizą tych całek.

3. Przedstawienie badanych całek przez szeregi. Pełną całkę eliptyczną drugiego rodzaju można przedstawić przez szereg potęgowy, zbieżny dla $k < 1$ (G. M. Fichtenholz [2], t. II, str. 487)

$$(3.1)\qquad E = E(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\right]^2 \frac{k^{2m}}{2m-1}\right\},$$

czyli, po obliczeniu pierwszych kilku współczynników,

$$(3.2)\qquad E = \frac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{3}{64}k^4 - \tfrac{5}{256}k^6 - \tfrac{175}{16384}k^8 - \tfrac{441}{65536}k^{10} - \ldots\right).$$

Stosując do (3.2) znane wzory na podnoszenie szeregu potęgowego do kwadratu, otrzymujemy

$$(3.3)\qquad E^2 = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{32}k^4 - \tfrac{1}{64}k^6 - \tfrac{77}{8192}k^8 - \tfrac{103}{16384}k^{10} - \ldots\right),$$

a stąd, przez mnożenie lub dzielenie i całkowanie wyraz po wyrazie, wynikają natychmiast wzory określające badane całki przez szeregi potęgowe. Przyjmując stałe całkowania C za równe zeru otrzymujemy

$$
(3.4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\bar{E}_0 &= \frac{\pi^2}{4}\left(k-\tfrac{1}{6}k^3-\tfrac{1}{160}k^5-\tfrac{1}{448}k^7-\tfrac{77}{73728}k^9-\tfrac{103}{180224}k^{11}-\ldots\right),\\
\bar{E}_1 &= \frac{\pi^2}{4}\left(\tfrac{1}{2}k^2-\tfrac{1}{8}k^4-\tfrac{1}{192}k^6-\tfrac{1}{512}k^8-\tfrac{77}{81920}k^{10}-\tfrac{103}{196608}k^{12}-\ldots\right),\\
\bar{E}_{-1} &= \frac{\pi^2}{4}\left(\ln k-\tfrac{1}{4}k^2-\tfrac{1}{128}k^4-\tfrac{1}{384}k^6-\tfrac{77}{65536}k^8-\tfrac{103}{163840}k^{10}-\ldots\right),\\
\bar{E}_{0;-2} &= \frac{\pi^2}{4}\left(k+\tfrac{1}{6}k^3+\tfrac{3}{32}k^5+\tfrac{29}{448}k^7+\tfrac{3635}{73728}k^9+\tfrac{7167}{180224}k^{11}+\ldots\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Wzory te określają badane funkcje dla $k < 1$, ale dla k bliskich jedności zbieżność szeregów (3.4) staje się bardzo słaba. W tym zakresie korzystniej jest posłużyć się szeregami o środku w punkcie $k = 1$.

Pełną całkę eliptyczną $E(k)$ przedstawimy teraz przez szereg (P. F. Byrd, M. D. Friedman [1], str. 298)

$$
(3.5)\quad E = 1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[(2m+1)!!]^2}{2^{2m+2}(2m+1)m!(m+1)!}\left[2\ln\frac{1}{k'}+\psi(m+2)-\right.
$$
$$
\left.-\psi(m+\tfrac{3}{2})+\psi(m+1)-\psi(m+\tfrac{1}{2})\right]k'^{2m+2},
$$

gdzie k' jest modułem dopełniającym (2.3), równym zeru dla $k = 1$, a $\psi(x)$ jest funkcją *di-gamma* Eulera

$$
(3.6)\quad \psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x).
$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości funkcji $\psi(x)$ ([7]), można wzór (3.5) rozwinąć następująco (¹):

$$
(3.7)\quad E = 1+\tfrac{1}{2}(\Lambda-\tfrac{1}{2})k'^2+\tfrac{3}{16}(\Lambda-\tfrac{13}{12})k'^4+\tfrac{15}{128}(\Lambda-\tfrac{6}{5})k'^6+\ldots,
$$

gdzie dla skrócenia oznaczono

$$
(3.8)\quad \Lambda = \ln\frac{4}{k'}.
$$

Podnosząc szereg (3.7) do kwadratu otrzymujemy

$$
(3.9)\quad E^2 = 1+(\Lambda-\tfrac{1}{2})k'^2+(\tfrac{1}{4}\Lambda^2+\tfrac{1}{8}\Lambda-\tfrac{11}{32})k'^4+(\tfrac{3}{16}\Lambda^2-\tfrac{1}{16}\Lambda-\tfrac{23}{128})k'^6+\ldots
$$

(¹) Warto zauważyć, że współczynnik przy k'^4 w bardzo zresztą starannie wydanej monografii [1] zawiera błąd, niesprostowany w „Errata", bowiem zamiast 13/12 wydrukowano 13/16.

Badane całki napiszemy teraz następująco:

$$
(3.10)\quad \begin{cases}
\bar{E}_0 = -\int\limits_k^1 E^2(\xi)d\xi + \bar{E}_0(1), \\
\bar{E}_1 = -\int\limits_k^1 \xi E^2(\xi)d\xi + \bar{E}_1(1), \\
\bar{E}_{-1} = -\int\limits_k^1 \frac{E^2(\xi)}{\xi}d\xi + \bar{E}_{-1}(1), \\
\bar{E}_{0;-2} = -\int\limits_k^1 \frac{E^2(\xi)}{1-\xi^2}d\xi + \bar{E}_{0;-2}(1);
\end{cases}
$$

stałe $\bar{E}_0(1)$, $\bar{E}_1(1)$, $\bar{E}_{-1}(1)$ i $\bar{E}_{0;-2}(1)$ wprowadzono dla uzyskania zgodności między (3.4) i (3.10). Równość (3.10.4) jest zresztą czysto formalna, ponieważ $\bar{E}_{0;-2}(1) \to \infty$ i otrzymujemy symbol nieoznaczony $\infty - \infty$; szereg określający tę funkcję napiszemy ostatecznie nieco inaczej.

Wprowadzimy nową zmienną całkowania

$$
(3.11)\qquad v = \tfrac{1}{16}(1-\xi^2), \qquad dv = -\tfrac{1}{8}\xi d\xi,
$$

i wzory (3.10) przepiszemy w postaci

$$
(3.12)\quad \begin{cases}
\bar{E}_0 = -8\int\limits_0^{k'^2/16} \frac{E^2(v)}{\sqrt{1-16v}}dv + \bar{E}_0(1), \\
\bar{E}_1 = -8\int\limits_0^{k'^2/16} E^2(v)dv + \bar{E}_1(1), \\
\bar{E}_{-1} = -8\int\limits_0^{k'^2/16} \frac{E^2(v)}{1-16v}dv + \bar{E}_{-1}(1), \\
\bar{E}_{0;-2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{k'^2/16} \frac{E^2(v)}{v\sqrt{1-16v}}dv + \bar{E}_{0;-2}(1),
\end{cases}
$$

przy czym w szeregu (3.9) należy zamiast k'^2 podstawić $16v$, a zamiast Λ podstawić $-\frac{1}{2}\ln v$. Tak więc szereg (3.9) przyjmie postać

$$
(3.13)\quad E^2(v) = 1-8(1+\ln v)v-8(11+2\ln v-2\ln^2 v)v^2- \\
-32(23-4\ln v-6\ln^2 v)v^3-\ldots
$$

Przeprowadzając dzielenie szeregów wyrazimy inne funkcje podcałkowe we wzorach (3.12) następująco:

$$(3.14)\quad \begin{cases} \dfrac{E^2(v)}{\sqrt{1-16v}} = 1-8v\ln v+8(-7-10\ln v+2\ln^2 v)v^2+ \\ \qquad +32(-29-24\ln v+10\ln^2 v)v^3+\dots \\ \dfrac{E^2(v)}{1-16v} = 1+8(1-\ln v)v+8(5-18\ln v+2\ln^2 v)v^2+ \\ \qquad +32(-3-68\ln v+14\ln^2 v)v^3+\dots \\ \dfrac{E^2(v)}{v\sqrt{1-16v}} = \dfrac{1}{v}-8\ln v+8(-7-10\ln v+2\ln^2 v)v+ \\ \qquad +32(-29-24\ln v+10\ln^2 v)v^2+\dots \end{cases}$$

Podstawienie (3.13), (3.14.1) i (3.14.2) do (3.12) i całkowanie wyraz po wyrazie daje

$$(3.15)\quad \begin{cases} \bar{E}_0 = \bar{E}_0(1)-\dfrac{k'^2}{2}-\left(1-2\ln\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^4}{16}-\left(-29-102\ln\dfrac{k'^2}{16}+\right. \\ \quad \left.+18\ln^2\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^6}{1728}-\left(-87-116\ln\dfrac{k'^2}{16}+40\ln^2\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^8}{4096}-\dots, \\ \bar{E}_1 = \bar{E}_1(1)-\dfrac{k'^2}{2}+\left(1+2\ln\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^4}{16}-\left(-89-30\ln\dfrac{k'^2}{16}+\right. \\ \quad \left.+18\ln^2\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^6}{1728}-\left(-93+4\ln\dfrac{k'^2}{16}+24\ln^2\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^8}{4096}-\dots, \\ \bar{E}_{-1} = \bar{E}_{-1}(1)-\dfrac{k'^2}{2}-\left(3-2\ln\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^4}{16}-\left(103-174\ln\dfrac{k'^2}{16}+\right. \\ \quad \left.+18\ln^2\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^6}{1728}-\left(63-300\ln\dfrac{k'^2}{16}+56\ln^2\dfrac{k'^2}{16}\right)\dfrac{k'^8}{4096}-\dots \end{cases}$$

W ostatniej całce (3.10.4) wprowadzimy oznaczenie

$$(3.16)\qquad \lim_{k\to 1}\left[\bar{E}_{0;-2}(k)+\tfrac{1}{2}\ln\frac{k'^2}{16}\right] = C$$

napiszemy ją w postaci

$$(3.17)\quad \bar{E}_{0;-2} = C-\tfrac{1}{2}\ln\frac{k'^2}{16}-\left(1-\ln\frac{k'^2}{16}\right)\frac{k'^2}{4}-\left(-1-12\ln\frac{k'^2}{16}+\right.$$
$$\left.+2\ln^2\frac{k'^2}{16}\right)\frac{k'^4}{128}-\left(-169-276\ln\frac{k'^2}{16}+90\ln^2\frac{k'^2}{16}\right)\frac{k'^6}{6912}-\dots$$

Wartości stałych $\bar{E}_0(1)$, $\bar{E}_1(1)$, $\bar{E}_{-1}(1)$ i C można będzie obliczyć przez bezpośrednie porównanie wyników wzorów (3.4), (3.15) i (3.17).

4. Przykład tablicowania. Ze względu na to, iż interesująca nas przede wszystkim funkcja $\bar{K}_{-1}$ daje się wyrazić przez $\bar{E}_{-1}$ (wzór (2.23.6)), stablicujemy tylko całkę $\bar{E}_{-1}$. Tablicowanie całek $\bar{E}_0$, $\bar{E}_1$ i $\bar{E}_{0;-2}$ przebiegałoby zupełnie podobnie.

Dla $k \leqslant 0{,}7$ pierwszych sześć wyrazów szeregu (3.4.3) daje dokładność pięciu cyfr po przecinku. Dla $0{,}7 \leqslant k \leqslant 0{,}98$ najdogodniej jest całkować numerycznie funkcję $E^2(k)/k$ mając do dyspozycji tablicę funkcji $E(k)$ A. Fletchera ([3]). Szczególnie korzystny jest tu wzór, wyrażający całkę przez wartości samej funkcji i jej parzystych różnic, cytowany np. przez D. R. Hartree ([4]) i Sz. E. Mikieładzego ([6]),

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\mu f - \tfrac{1}{12}\,\mu\delta^2 f + \tfrac{11}{720}\,\mu\delta^4 f - \tfrac{191}{60480}\,\mu\delta^6 f + \ldots\right], \tag{4.1}$$

gdzie μ oznacza operator „uśredniający" w symbolice W. F. Shepparda, mianowicie

$$\left\{\begin{aligned} \mu f &= \frac{f(a)+f(b)}{2}, \\ \mu\delta^2 f &= \frac{\delta^2 f(a) + \delta^2 f(b)}{2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

a symbol $\delta^n f$ oznacza n-tą różnicę centralną funkcji. Stosowanie tego wzoru jest łatwe, bowiem obliczenie kolejnych różnic centralnych nie przedstawia żadnej trudności, a dokładność jego jest wysoka. Jednak w otoczeniu punktu $k = 1$ błędy wzoru (4.1) rosną wobec występowania w tym punkcie osobliwości (pochodna funkcji podcałkowej rośnie nieograniczenie). Wobec tego najdogodniej jest tu zastosować szereg (3.15.3). Zbieżność tego szeregu jest stosunkowo słaba, ale dla $0{,}98 \leqslant k \leqslant 1$, czyli $0 \leqslant k' \leqslant 0{,}19899$ przytoczone pierwsze cztery wyrazy umożliwiają obliczenie szukanej całki z dokładnością pięciu miejsc po przecinku.

Wartości liczbowe funkcji $\bar{E}_{-1}(k)$ podano w tablicy 1. Przy obliczaniu tablicy posługiwano się trzema wspomnianymi metodami, stosując je jednak, dla sprawdzenia, w zachodzących na siebie zakresach: szeregiem (3.4.3) posługiwano się dla $0 \leqslant k \leqslant 0{,}75$, całkowaniem numerycznym wzorem (4.1) dla $0{,}65 \leqslant k \leqslant 0{,}98$ a szeregiem (3.15.3) dla $0{,}97 \leqslant k \leqslant 1$. Całkowanie numeryczne przeprowadzono przy zastosowaniu skoku $h = b-a = 0{,}01$; taki właśnie jest skok tablicy Fletchera [3]. Pokrywające się zakresy wykazały wymaganą zgodność wyników stosowanych metod całkowania; wartość stałej $\bar{E}_{-1}(1)$ z dokładnością sześciu miejsc po przecinku wyniosła $-0{,}650459$. W tablicy 1 podano ponadto wartości funkcyj $K^2(k)$ i $E^2(k)$, obliczone za pomocą tablicy [3]; znajomość wartości liczbowych tych funkcji ułatwia stosowanie wzoru (2.23.6).

TABLICA 1

Wartości funkcyj $\bar{E}_{-1}(k)$, $K^2(k)$ i $E^2(k)$.

k	$\bar{E}_{-1}(k)$	$K^2(k)$	$E^2(k)$
0	$-\infty$	2,46740	2,46740
0,001	−17,04420	2,46740	2,46740
0,002	−15,33393	2,46741	2,46739
0,005	−13,07309	2,46743	2,46737
0,01	−11,36286	2,46752	2,46728
0,02	−9,65278	2,46790	2,46691
0,03	−8,65264	2,46851	2,46629
0,04	−7,94325	2,46938	2,46543
0,05	−7,39321	2,47049	2,46432
0,10	−5,68757	2,47982	2,45506
0,15	−4,69484	2,49560	2,43960
0,20	−3,99584	2,51815	2,41793
0,25	−3,45917	2,54799	2,38998
0,30	−3,02636	2,58582	2,35571
0,35	−2,66620	2,63260	2,31504
0,40	−2,36007	2,68960	2,26786
0,45	−2,09599	2,75854	2,21405
0,50	−1,86580	2,84175	2,15345
0,55	−1,66367	2,94244	2,08584
0,60	−1,48534	3,06514	2,01096
0,65	−1,32758	3,21648	1,92845
0,70	−1,18793	3,40659	1,83782
0,75	−1,06447	3,65188	1,73837
0,80	−0,95572	3,98123	1,62907
0,85	−0,86052	4,45183	1,50825
0,90	−0,77806	5,20090	1,37287
0,95	−0,70791	6,70816	1,21599
0,99	−0,66082	11,26677	1,05776
1,00	−0,65046	∞	1,00000

Tablicą 1 posługiwano się przy obliczaniu skończonych ugięć pręta przy wyboczeniu pełzającym ([8]).

5. Uwagi końcowe. Badane całki należą do znacznie szerszej klasy całek, mianowicie

$$J = \int k^n k'^m E^r K^s dk.$$

Dla całek tych można wyprowadzić wzory redukcyjne oraz przedstawić je szeregami w analogiczny sposób, jednak przy większej wartości sumy wykładników $r+s$ liczba nowych funkcyj nieelementarnych rośnie, a rachunki ulegają komplikacji (w rozważanym przez nas przypadku $r+s = 2$). Całkami tymi będzie prawdopodobnie warto zająć się dopiero wtedy, gdy znajdą one bezpośrednie zastosowanie.

Prace cytowane

[1] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

[2] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, Москва-Ленинград 1949.

[3] A. Fletcher, *A table of complete elliptic integrals*, Phil. Mag. 30 (1940), seventh series, str. 516-519.

[4] D. R. Hartree, *Numerical analysis*, sec. ed., Oxford 1958.

[5] E. L. Kaplan, *Multiple elliptic integrals*, Journ. Math. Phys. 29 (1950), str. 69-75.

[6] Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*, Москва 1953.

[7] M. Życzkowski, *Tablice funkcyj Eulera i pokrewnych*, Warszawa 1954.

[8] — *Geometrically non-linear creep buckling of bars*, Arch. Mech. Stos. 12 (1960), zeszyt 3.

Praca wpłynęła 5. 5. 1960

М. ЖИЧКОВСКИЙ (Краков)

ИНТЕГРАЛЫ ПО МОДУЛУ ОТ КВАДРАТОВ ПОЛНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

РЕЗЮМЕ

Статья посвящена исследованию интегралов типа (1.2) и — вспомогательно — интегралов (2.4). Интеграл (1.1), принадлежащий к семейству (1.2), появляется при вычислении конечных деформаций стержня при продольным изгибе при ползучести, [8].

Найдены формулы приведения для интегралов (1.2); это формулы (2.12) и (2.16), верные при $n \geqslant 2$ или $n \leqslant -2$. При $n = 1$, $n = 0$ и $n = -1$ действительны формулы (2.18), (2.19) и (2.20). Таким образом, в конечном счету, только четыре из рассматриваемых интегралов являются новыми неэлементарными функциями. В качестве этих функций приняты $\bar{E}_0$, $\bar{E}_1$, $\bar{E}_{-1}$ и $\bar{E}_{0;-2}$ из практических соображений, так как функция $E(k)$ менее особенна чем $K(k)$ и соответствующие ряды быстрее сходятся. Другие интегралы: порядка 1, 0 и -1 можно выразить через этих четыре по формулам (2.23).

Исследуемые функции были разложены в ряды (3.4), (3.15), (3.17). Эти ряды использованы для составления таблиц функции $\bar{E}_{-1}$, именно для $0 \leqslant k \leqslant 0{,}75$ применялся ряд (3.4.3), а для $0{,}97 \leqslant k \leqslant 1$ — ряд (3.15.3). В остальной области применялось численное интегрирование по формуле (4.1) с использованием таблиц А. Флетчера [3]. Таблицы функций $\bar{E}_0$, $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_{0;-2}$ составлялись подобным образом. Таблица 1 была использована для вычисления конечной деформации стержня при продольным изгибе при ползучести, [8].

M. ŻYCZKOWSKI (Kraków)

INTEGRALS WITH RESPECT TO MODULUS OF THE SQUARED COMPLETE ELLIPTIC INTEGRALS

SUMMARY

The paper deals with the analysis of integrals of the type (1.2), and, in an auxiliary way, of the type (2.4). The integral (1.1) from the family (1.2)

has appeared in connection with computing finite deflections under creep buckling [8].

The reduction formulas for integrals (1.2) have been derived; namely, formulas (2.12) and (2.16) valid for $n \geqslant 2$ and $n \leqslant -2$. For $n = 1$, $n = 0$ and $n = -1$ formulas (2.18), (2.19) and (2.20) hold, so that finally, only four of the considered integrals are non-elementary functions. For practical reasons, these functions were taken as $\bar{E}_0, \bar{E}_1, \bar{E}_{-1}$ and $\bar{E}_{0;-2}$, since the function $E(k)$ has a weaker singularity than $K(k)$, and the corresponding series converge faster. Other integrals of order $1, 0$ and -1 may be expressed by these four using formulas (2.23).

The four functions investigated have been represented as series (3.4), (3.15) and (3.17). These series were then used for tabulating function $\bar{E}_{-1}$; for $0 \leqslant k \leqslant 0{,}75$ we applied series (3.4.3) and for $0{,}97 \leqslant k \leqslant 1$, series (3.15.3). In the remaining domain we applied the numerical integration by formula (4.1), using a table of Fletcher [3]. The tabulation of functions $\bar{E}_0, \bar{E}_1$ and $\bar{E}_{0;-2}$ was quite similar. Table 1 was used for computing finite deflections under creep buckling.