ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1964)

Sur certains problèmes aux limites pour l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique

par A. PISKOREK (Warszawa)

A la mémoire de Witold Pogorzelski

1. Introduction. Dans cet article nous allons resoudre les deux problèmes aux limites concernant l'équation aux dérivées partielles du type parabolique dans un domaine non cylindrique [5].

Nous y considérons un domaine non cylindrique D_T à $n+1$ dimensions ($n \geqslant 2$) situé dans l'espace-temps de points $(X, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$ ou X désigne un point variable de l'espace euclidien $E^{(n)}$ à n dimensions, t la coordonnée du temps.

La frontière du domaine D_T est composée des domaines bornés Ω_0 et Ω_T à n dimensions dans les hyperplans $t=0$ et $t=T$, et d'une surface latérale s_T située entre les hyperplans $t=0$ et $t=T$.

Nous désignons par S_τ la variété à $n-1$ dimensions formée par l'intersection de la surface latérale s_T et du plan $t=\tau$, et par Ω_τ — la variété à n dimensions, formée par l'intersection du domaine D_T et du plan $t=\tau$, pour $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Nous supposons que le domaine D_T est borné et la surface latérale s_T possède l'orientation du temps par rapport à l'équation linéaire aux dérivées partielles du type parabolique

$$(1)\qquad \Psi u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(X,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

où les coefficients $a_{ij}(X,t)$, $b_k(X,t)$, $c(X,t)$ sont continus dans le domaine cylindrique (produit cartésien) $\Omega \times \langle 0, T\rangle$, contenant le domaine fermé D_T dans son intérieur, Ω étant un domaine borné, et vérifient la condition de Hölder

$$(2)\qquad \begin{aligned} &|a_{ij}(X,t)-a_{ij}(\bar{X},\bar{t})| \leqslant \mathrm{const}(|X\bar{X}|^h + |t-\bar{t}|^{h'}),\\ &|b_k(X,t)-b_k(\bar{X},t)| \leqslant \mathrm{const}|X\bar{X}|^h, \qquad i,j,k = 1,\ldots,n,\\ &|c(X,t)-c(\bar{X},t)| \leqslant \mathrm{const}|X\bar{X}|^h, \qquad 0<h\leqslant 1;\ 0<h'\leqslant 1 \end{aligned}$$

où $|X\bar{X}|$ designe la distance euclidienne entre les points X et $\bar{X}$.

Sous l'hypothèse (2) W. Pogorzelski a demontré dans le travail [9] l'existence de la solution fondamentale $\Gamma(X, t; Y, \tau)$ de l'équation (1). Cette solution fondamentale est donnée par les formules suivantes

$$\Gamma(X, t; Y, \tau) = w^{(Y,\tau)}(X, t; Y, \tau) + \overline{w}(X, t; Y, \tau), \tag{3}$$

$$\overline{w}(X, t; Y, \tau) = \int_\tau^t \iiint_\Omega w^{(M,\theta)}(X, t; M, \theta)\Phi(M, \theta; Y, \tau)\, dM\, d\theta \tag{4}$$

où la fonction

$$w^{(M,\theta)}(X, t; Y, \tau) = (t-\tau)^{-n/2}\exp\Big[-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(M, \theta)(x_i-y_i)(x_j-y_j)/4(t-\tau)\Big] \tag{5}$$

est la quasi-solution, bien connue, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux points arbitraires du domaine Ω, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $a^{ij}(M, \theta)$ désignent les éléments de la matrice inverse à la matrice $[a_{ij}(M, \theta)]$ fixés au point arbitraire M du domaine Ω pour $0 \leqslant \theta \leqslant T$, et la fonction $\Phi(X, t; Y, \tau)$ est une solution de l'équation intégrale du type Volterra

$$\Phi(X, t; Y, \tau) = f(X, t; Y, \tau) + \int_\tau^t \iiint_\Omega K(X, t; M, \theta)\Phi(M, \theta; Y, \tau)\, dM\, d\theta \tag{6}$$

où l'on a

$$K(X, t; M, \theta) = \big(\det[a^{ij}(X, t)]\big)^{1/2}\Psi w^{(M,\theta)}(X, t; M, \theta),$$

$$f(X, t; Y, \tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}K(X, t; Y, \tau).$$

La solution fondamentale (3) est déterminée pour tout couple de points $X \neq Y$ du domaine Ω et pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$. Elle vérifie l'équation (1), c'est-à-dire on a

$$\Psi\Gamma(X, t; Y, \tau) = 0 \tag{7}$$

par rapport aux variables X, t, où $X \neq Y$ et $t > \tau$.

D'après les formules (3), (4), (5) et les résultats obtenus dans les travaux [9], [10], [6] les dérivées partielles de la solution fondamentale $\Gamma(X, t; Y, \tau)$ vérifient les inégalités

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Gamma(X, t; Y, \tau)\right| \leqslant \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^\mu |XY|^{n+2k_0+k_1+\ldots+k_n-2\mu}}, \\ 2k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2, \qquad 1-h^* < \mu < 1 \end{gathered} \tag{8}$$

et sont continueés pour $X \neq Y$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, où X, Y désignent deux points arbitraires du domaine Ω, $h^* = \min(h, 2h')$.

En s'appuyant sur les propriétés de la solution fondamentale (3) on peut définir les intégrales suivantes de l'équation (1) dans le domaine non cylindrique D_T. Nous donnerons les définitions de ces intégrales.

1. On appelle potentiel de simple couche, relatif à l'équation (1), la fonction déterminée par l'intégrale de surface

$$U(X,t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \Gamma(X,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau \tag{9}$$

où la fonction $\varphi(Q,\tau)$, dite densité de la couche, est définie et intégrable sur la surface laterale s_T.

2. On appelle potentiel de charge spatiale, relatif à l'équation (1), l'intégrale de volume suivante

$$V(X,t) = \int_0^t \iiint_{\Omega_\tau} \Gamma(X,t;Y,\tau)\varrho(Y,\tau)dY d\tau \tag{10}$$

où la fonction $\varrho(Y,\tau)$, dite densité de la charge, est définie et intégrable dans le domaine non cylindrique D_T.

3. On appelle intégrale de Poisson-Weierstrass généralisée l'intégrale suivante

$$J(X,t) = \iiint_{\Omega_0} \Gamma(X,t;Y,0)f(Y)dY \tag{11}$$

$f(Y)$ étant une fonction définie et intégrable dans le domaine Ω_0.

Plusieurs propriétés de ces intégrales ont ête étudiées par W. Pogorzelski [9], [10] dans le cas où le domaine D_T est cylindrique, et dans le cas où D_T est un domaine non cylindrique par M. Gevrey [3] pour $n=1$, par A. Friedman [1] pour $n \geqslant 2$ et par moi-même [5], [6], [7].

Maintenant, en nous basant sur les propriétés, nous allons résoudre les deux problèmes aux limites concernant l'équation aux dérivées partielles (1) dans un domaine non cylindrique D_T.

Ce deux problèmes pour le domaine cylindrique ont ête resolu par W. Pogorzelski dans ses travaux [10], [11] et par moi-même [8].

Autres problèmes pour le domaine non cylindrique ont ête résolu par A. Friedman [2] et par L. I. Kamynin et V. N. Maslennikova [4].

2. Problème linéaire aux limites. Dans ce travail nous résoudrons le problème de la recherche d'une fonction $u(X,t)$ qui satisfait à l'équation parabolique

$$\Psi u(X,t) = F(X,t) \tag{12}$$

en tout point intérieur (X, t) du domaine non cylindrique D_T, vérifie pour $t > 0$ la relation limite à la dérivée transversale ([1])

$$\frac{du}{dT_{P_t}} + g(P, t)u = G(P, t) \tag{13}$$

en tout point (P, t) de la surface latérale s_T du domaine D_T, qui possède une orientation du temps ([2]) relative à l'équation (12), et, de plus, satisfait à la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} u(X, t) = f(X) \tag{14}$$

en tout point intérieur X du domaine Ω_0.

Pour résoudre le problème proposé plus haut nous admettons les suppositions suivantes:

I. *La surface latérale s_T vérifie les conditions connues de Liapounoff* (v. [5], p. 126), *dont l'une, concernant l'angle (N_{P_t}, N_{Q_τ}) entre les normales aux deux points (P, t), (Q, τ) de la surface s_T, à la forme*

$$(N_{P_t}, N_{Q_\tau}) \leqslant \mathrm{const}(|PQ| + |t-\tau|^a), \qquad (0 < a \leqslant 1); \tag{15}$$

II. *Les exposants de Hölder dans les conditions* (2) *prenant des valeurs*

$$h = 1, \qquad \tfrac{1}{2} \leqslant h' \leqslant 1; \tag{16}$$

III. *La fonction donnée $F(X, t)$ est déterminée et continuée dans l'intérieur du domaine non cylindrique D_T, vérifie l'inégalité*

$$|F(X, t)| \leqslant m_F t^{-\mu_F}/|XP_X|^{p_F} \tag{17}$$

et une condition de Hölder

$$|F(X, t) - F(\overline{X}, t)| \leqslant \mathrm{const}|X\overline{X}|^{h_F} \tag{18}$$

dans tout domaine fermé D_T^* situé à l'intérieur du domaine D_T, où P_X désigne un point de la variété S_t le plus approché du point X et m_F, p_F, μ_F, h_F sont des constantes données; on admet que

$$0 \leqslant \mu_F < 1, \qquad 0 \leqslant p_F < 1, \qquad 0 < h_F \leqslant 1; \tag{19}$$

([1]) Nous remarquons que les symboles u et du/dT_{P_t} dans la relation (13) désignent les valeurs limites de la fonction $u(X, t)$ et de la dérivée transversale de cette fonction respectivement, c'est-à-dire

$$u = \lim_{\substack{X \to P \\ t > 0}} u(X, t), \qquad du/dT_{P_t} = \lim_{\substack{X \to P \\ t > 0}} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(X, t) u_{x_j}(X, t) \cos(x_k, n_P) \tag{i}$$

où n_P désigne la normale intérieure à la variété S_t au point P.

([2]) La surface s_T n'est tangente à aucune caractéristique $t = \mathrm{const}$ de l'équation (12).

IV. *Les fonctions $g(P, t)$ et $G(P, t)$ sont définies et continues sur la surface latérale s_T pour $t > 0$ et vérifient les inégalités*

$$|g(P, t)| \leqslant m_g t^{-\mu_g}, \qquad |G(P, t)| \leqslant m_G t^{-\mu_G} \tag{20}$$

m_g, m_G, μ_g, μ_G, étant des constantes données, en outre on admet que

$$0 \leqslant \mu_g < \tfrac{1}{2}, \qquad 0 \leqslant \mu_G < 1; \tag{21}$$

V. *La fonction $f(X)$ est continue à l'intérieur de la base Ω_0 et vérifie une inégalité*

$$|f(X)| \leqslant m_f/|X\hat{P}|^{p_f} \tag{22}$$

où m_f, p_f sont des constantes données, $\hat{P}$ désigne un point de la variété S_0 le plus approché du point X, et l'exposant p_f vérifie l'inégalité $0 \leqslant p_f < 1$.

Nous allons chercher la solution du problème proposé sous la forme d'une somme

$$u(X, t) = \iiint\limits_{\Omega_0} \tilde{\Gamma}(X, t; Y, 0) f(Y) dY - \\ - \int_0^t \iiint\limits_{\Omega_\tau} \tilde{\Gamma}(X, t; Y, \tau) F(Y, \tau) dY d\tau + \int_0^t \iint\limits_{S_\tau} \tilde{\Gamma}(X, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dS_Q d\tau \tag{23}$$

de l'intégrale de Poisson-Weierstrass, du potentiel de charge spatiale et du potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q, \tau)$.

On a posé

$$\tilde{\Gamma}(X, t; Y, \tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n} \Gamma(X, t; Y, \tau) \big(\det[a^{ij}(Y, \tau)]\big)^{1/2}. \tag{24}$$

La fonction (23) vérifie l'équation (12) en tout point intérieur (X, t) du domaine D_T et la condition initiale (14), quelle que soit la densitè $\varphi(Q, \tau)$ de simple couche.

En demandant que la fonction (23) vérifie pour $t > 0$ la condition limite (13) en tout point (P, t) de la surface latérale s_T; sous l'hypothèse que la fonction $\varphi(Q, \tau)$ soit continue, nous arrivons à une équation intégrale de Volterra

$$\varphi(P, t) - \int_0^t \iint\limits_{S_\tau} N(P, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dS_Q d\tau = \Phi(P, t) \tag{25}$$

où l'on a désigne

$$N(P, t; Q, \tau) = 2\left(\frac{d\tilde{\Gamma}(P, t; Q, \tau)}{dT_{P_t}} - g(P, t)\tilde{\Gamma}(P, t; Q, \tau)\right), \tag{26}$$

$$(27)\qquad \Phi(P,t) = -2\Big[G(P,t) - \iiint\limits_{\Omega_0} \frac{d\tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,0)}{dT_{P_t}} f(Y)\,dY +$$

$$+\int_0^t \iiint\limits_{\Omega_\tau} \frac{d\tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,\tau)}{dT_{P_t}} F(Y,\tau)\,dY\,d\tau + g(P,t)\Big(\iiint\limits_{\Omega_0} \tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,0) f(Y)\,dY -$$

$$-\int_0^t \iiint\limits_{\Omega_\tau} \tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,\tau) F(Y,\tau)\,dY\,d\tau\Big)\Big].$$

D'après les résultats de travail [5] le noyau $N(P,t;Q,\tau)$ de l'équation (25) vérifie l'inégalité aux singularités séparées

$$(28)\qquad |N(P,t;Q,\tau)| \leqslant \frac{\text{Const}}{t^{\mu g}(t-\tau)^{\mu}|PQ'|^{n-2\mu}}$$

où μ est une constante positive fixée dans l'intervalle $(\frac{1}{2},1)$, Q' — la projection orthogonale du point Q de la variété S_τ sur le plan au tangente au point P de la variété S_t, Const — constante positive qui ne dépend que de la surface latérale s_T du domaine D_T, des coefficients de l'équation (12), de la constante μ et des fonctions $g(P,t)$.

Remarquons que les singularités de la limitation (28) sont faibles relativement à l'intégrale de surface et à l'intégrale simple, puisque nous avons

$$n-2\mu < n-1, \quad \text{si} \quad \tfrac{1}{2} < \mu < 1 .$$

Il en résulte, par le raisonnement classique de la théorie des équations intégrales, que nous pouvons resoudre l'équation (25) en basant sur le lemme suivant:

Lemme fondamental ([3]). *Si les fonctions $K_1(P,t;Q,\tau)$ et $K_2(P,t;Q,\tau)$ sont intégrables par rapport aux points (P,t), (Q,τ) sur la surface latérale s_T, qui est de classe C^1 et possède une orientation du temps relative à l'équation* (1), *alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$(29)\qquad \int_0^t \iint\limits_{S_\tau} K_1(P,t;Q,\tau)\Big[\int_0^\tau \iint\limits_{S_\zeta} K_2(Q,\tau;Z,\zeta)\,dS_Z\,d\zeta\Big]dS_Q\,d\tau$$

$$= \int_0^t \iint\limits_{S_\zeta} \Big[\int_\zeta^t \iint\limits_{S_\tau} K_1(P,t;Q,\tau) K_2(Q,\tau;Z,\zeta)\,dS_Q\,d\tau\Big]dS_Z\,d\zeta$$

où (P,t), (Q,τ), (Z,ζ) désignent les points de la surface latérale s_t.

([3]) La démonstration de ce lemme base sur la définition de la surface de classe C^1, sur la orientation du temps de la surface latérale s_T et sur le théorème sur le changement d'ordre d'intégration aux intégrales itérées.

Par conséquent, d'après la théorie classique, écrivons la formule de Volterra pour l'équation (25) sous la forme

$$\varphi(P,t)=\Phi(P,t)+\int_0^t\iint_{S_\tau}\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau)\Phi(Q,\tau)dS_Q d\tau \tag{30}$$

où $\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau)$ est le noyau résolvant du noyau $N(P,t;Q,\tau)$ donné par la somme de la série des noyaux itérés

$$\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau)=\sum_{\nu=0}^{\infty}N_\nu(P,t;Q,\tau) \tag{31}$$

déterminés par la relation de récurrence

$$\begin{gathered} N_0(P_0,t;Q,\tau)=N(P,t;Q,\tau)\,,\\ N_{\nu+1}(P,t;Q,\tau)=\int_\tau^t\iint_{S_\zeta}N_0(P,t;Z,\zeta)N_\nu(Z,\zeta;Q,\tau)dS_Z d\zeta\,,\\ \nu=0,1,2,\ldots \end{gathered} \tag{32}$$

La formule (30) présente la solution $\varphi(P,t)$ de l'équation (25), si l'on peut démontrer que les noyaux itérés (32) sont absolument convergents et que la série (31) est absolument et uniformement convergente sur la surface latérale s_T.

En s'appuyant sur la limitation (28) et le lemme fondamental on peut montrer que les termes de la série (31) sont bornés à partir d'un indice ν_0 et qu'ils vérifient l'inégalités

$$|N_{\nu_0+m}(P,t;Q,\tau)|\leqslant\frac{c_1[c_2\Gamma(1-\mu)(t-\tau)^{1-\mu}]^m}{m(1-\mu)\Gamma\big(m(1-\mu)\big)} \tag{33}$$

où $m=1,2,\ldots$,

$$\nu_0=\max\left[E\left(\frac{1}{1-\mu}\right),E\left(\frac{n-1}{1-2(1-\mu)}\right)\right],$$

$$c_1=\sup_{s_T}|N_{\nu_0}(P,t;Q,\tau)|,\qquad c_2=\sup_{s_T}\left(\iint_{S_\zeta}\frac{\mathrm{const}\cdot dS_Z}{|PZ|^{n-2\mu}}\right).$$

Le dénominateur $\Gamma\big(m(1-\mu)\big)$ dans la limitation (33) assure la convergence absolue et uniforme de la série (31) pour toute valeur $t-\tau$, abstraction faite de quelques termes non bornés.

Par consequent, la formule (30) présente la solution unique de l'équation (25) pour toute valeur du temps $t>0$. Cette solution $\varphi(Q,\tau)$ est continue en tout point intérieur (Q,τ) de la surface latérale s_T et, d'après les suppositions (17), (20), (22) et les résultats de notre travail [7], elle vérifie l'inégalité

$$(34) \qquad |\varphi(Q,\tau)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\tau^{\mu^*}}$$

où $\mu^* = \max\left(\frac{1}{2}(1+p_f),\ \mu_F+\frac{1}{2}p_F-\frac{1}{2},\ \mu_g+\frac{1}{2}p_f,\ \mu_g+\frac{1}{2}p_F+\mu_F-1,\ \mu_G\right)$.

Cette propriété permet de conclure que la substitution de la fonction $\varphi(Q,\tau)$ dans la formule (23) fournit, grâce à la condition (18), la solution cherchée $u(X,t)$ du problème proposé.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si la surface latérale s_T du domaine non cylindrique D_T, les coefficients de l'équation*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)u''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(X,t)u'_{x_k} + c(X,t)u - u'_t = F(X,t)$$

et les fonctions $F(X,t)$, $g(P,t)$, $G(P,t)$, $f(X)$ vérifient les hypothèses I, II, III, IV, V, *alors il existe au moins une fonction $u(X,t)$, qui vérifie l'équation aux dérivées partielles donnée plus haut en tout point intérieur (X,t) du domaine D_T, qui vérifie pour $t>0$ la condition limite* (13) *en tout point (P,t) de la surface latérale s_T, et vérifie la condition initiale* (14) *en tout point intérieur X du domaine Ω_0.*

3. Problème semi-linéaire aux limites. Soit l'équation semi-linéaire aux dérivées partielles du type parabolique de la forme

$$(35) \qquad \Psi u(X,t) = F\left(X,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

$F(X,t,u_0,u_1,\ldots,u_n)$ étant une fonction donnée.

Nous posons le problème de la recherche d'une fonction $u(X,t)$, qui satisfait à l'équation semi-linéaire (35) en tout point intérieur (X,t) du domaine non cylindrique D_T, vérifie la condition limite à la dérivée transversale

$$(36) \qquad \frac{du}{dT_{P_t}} + g(P,t)u = G(P,t,u)$$

pour $t>0$ en tout point (P,t) de la surface latérale s_T du domaine D_T, qui possede l'orientation du temps relative à l'équation (35) et, de plus, satisfait à la condition initiale

$$(37) \qquad \lim_{t\to 0} u(X,t) = f(X)$$

en tout point intérieur X du domaine Ω_0.

Admettons les suppositions suivantes:

(i) *La fonction donnée* $F(X,t,u_0,u_1,\dots,u_n)$ *est définie et continue dans le produit cartésien*

$$D_T\times\{(u_0,u_1,\dots,u_n)\colon\ |u_i|<\infty,\ i=0,1,\dots,n\}\tag{38}$$

où elle vérifie l'inégalité

$$|F(X,t,u_0,u_1,\dots,u_n)|\leqslant\frac{M_F}{t^{\mu_F}|XP|^{p_F}}+M_F\Big(\sum_{i=0}^{n}|u_i|\Big)\tag{39}$$

et une condition de Hölder de la forme

$$\begin{aligned}|F(X,t,u_0,u_1,\dots,u_n)-F(\overline{X},t,\bar u_0,\bar u_1,\dots,\bar u_n)|&\\ \leqslant \operatorname{const}|X\overline{X}|^{h_F}+k_F\Big(\sum_{j=0}^{n}|u_j-\bar u_j|\Big)&\end{aligned}\tag{40}$$

dans tout domaine fermé $D_T^*\times U$ *situé à l'intérieur du produit cartésien* (38), *où* $\mu_F, p_F, h_F, M_F, M_F, k_F$ *sont des constantes données vérifiant les inégalités*

$$\begin{gathered}0\leqslant\mu_F<1,\quad 0\leqslant p_F<1,\quad 0<h_F\leqslant 1,\quad 0<M_F,\\ 0<M_F,\quad 0<k_F\end{gathered}\tag{41}$$

et const *est une constante positive, dépendant du domaine* D_T, *qui en général, n'est pas bornée, si ce domaine* D_T^* *s'approche vers le domaine* D_T.

(ii) *Les fonctions données* $g(P,t)$ *et* $G(P,t,u_0)$ *sont définies et continues pour* $t>0$ *dans les régions respectives*

$$s_T\quad\text{et}\quad s_T\times\{u_0\colon\ |u_0|<\infty\}\tag{42}$$

où elles vérifient les inégalités

$$\begin{gathered}|g(P,t)|\leqslant m_g t^{-\mu_g},\\ |G(P,t,u_0)|\leqslant m_G t^{-\mu_G}+M_G t^{-p_G}|u_0|\end{gathered}\tag{43}$$

et la fonction $G(P,t,u_0)$ *vérifie la condition de Hölder de la forme*

$$|G(P,t,u_0)-G(P,t,\bar u_0)|\leqslant k_G t^{-\mu_G}|u_0-\bar u_0|\tag{44}$$

où $\mu_g,\mu_G,p_G,m_g,M_G,m_G,k_G$ *sont des constantes données vérifiant les inégalités*

$$\begin{gathered}0\leqslant\mu_g<\tfrac12,\quad 0\leqslant\mu_G<\tfrac12,\quad 0\leqslant p_G<\tfrac12,\quad 0<m_g,\\ 0<M_G,\quad 0<m_G,\quad 0<k_G.\end{gathered}\tag{45}$$

Quant à la surface latérale s_T du domaine non cylindrique D_T, aux éxposants des coefficients de l'équation (35) et à la fonction donnée $f(X)$ dans la condition initiale (37) nous admettons les mêmes suppositions que dans le problème linéaire (v. p. 104 et 105, les suppositions I, II, et V).

Nous allons chercher la solution du problème proposé plus haut sous la forme d'une (v. p. 105, la formule (23)) somme

$$(46)\quad u(X,t) = \iiint\limits_{\Omega_0} \tilde{\Gamma}(X,t;\,Y,0)f(Y)dY + \int\limits_0^t \iint\limits_{S_\tau} \tilde{\Gamma}(X,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau$$

$$-\int\limits_0^t \iiint\limits_{\Omega_\tau} \tilde{\Gamma}(X,t;\,Y,\tau)F\big(Y,\tau,u(Y,\tau),u'_{y_1}(Y,\tau),\ldots,u'_{y_n}(Y,\tau)\big)dY d\tau$$

de l'intégrale de Poisson-Weierstrass, du potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q,\tau)$ et du potentiel de charge spatiale.

En demandant que la fonction (46) vérifie la condition limite (36) pour $t>0$ en tout point (P,t) de la surface latérale s_T, sous la l'hypothèse que la fonction $\varphi(Q,\tau)$ soit continue, on arrive (v. p. 105, l'équation (25)) à une équation intégro-différentielle de la forme

$$(47)\quad \varphi(P,t) - \int\limits_0^t \iint\limits_{S_\tau} N(P,t;\,Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau$$

$$= -2\Big[G\big(P,t,u(P,t)\big) - \iiint\limits_{\Omega_0} \frac{d\tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,0)}{dT_{P_t}} f(Y)dY +$$

$$+\int\limits_0^t \iiint\limits_{\Omega_\tau} \frac{d\tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,\tau)}{dT_{P_t}} F\big(Y,\tau,u(Y,\tau),u'_{y_1}(Y,\tau),\ldots,u'_{y_n}(Y,\tau)\big)dY d\tau +$$

$$+g(P,t)\Big(\int\limits_0^t \iiint\limits_{\Omega_\tau} \tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,\tau)F\big(Y,\tau,u(Y,\tau),u_{y_1}(Y,\tau),\ldots,u_{y_n}(Y,\tau)\big)dY d\tau +$$

$$+\iiint\limits_{\Omega_0} \tilde{\Gamma}(P,t;\,Y,0)f(Y)dY\Big)\Big]$$

où le noyau $N(P,t;\,Q,\tau)$ est donné par la formule (26).

En conséquence nous voyons que le problème proposé se ramène à la résolution du système d'équations intégro-différentielles (46), (47) aux deux fonctions inconnues $u(X,t)$ et $\varphi(P,t)$ — la prémière définie dans l'intérieur du domaine non cylindrique D_T et la seconde définie pour $t>0$ sur la surface latérale s_T.

Pour résoudre le système d'équations (46), (47) considérons le système de $n+2$ équations intégrales

$$(48)\quad u_j(X,t)$$

$$= -\int_0^t \iiint_{\Omega_\tau} \tilde{\Gamma}_j(X,t;\,Y,\tau) F\big(Y,\tau,u_0(Y,\tau),u_1(Y,\tau),\ldots,u_n(Y,\tau)\big)\,dY\,d\tau +$$

$$+\iiint_{\Omega_0} \tilde{\Gamma}_j(X,t;\,Y,0) f(Y)\,dY + \int_0^t \iint_{S_\tau} \tilde{\Gamma}_j(X,t;\,Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau\,,$$

$$j=0,1,\ldots,n\,,$$

$$\varphi(P,t) - \int_0^t \iint_{S_\tau} N(P,t;\,Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau$$

$$= -2\,G\big(P,t,u_0(P,t)\big) + \iiint_{\Omega_0} N(P,t;\,Y,0) f(Y)\,dY -$$

$$-\int_0^t \iiint_{\Omega_\tau} N(P,t;\,Y,\tau) F\big(Y,\tau,u_0(Y,\tau),u_1(Y,\tau),\ldots,u_n(Y,\tau)\big)\,dY\,d\tau$$

aux fonctions inconnues $u_0(X,t), u_1(X,t), \ldots, u_n(X,t), \varphi(P,t)$, où on a posè

$$\tilde{\Gamma}_j(X,t;\,Y,\tau) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(X,t;\,Y,\tau), & \text{pour} \quad j=0\,, \\ \tilde{\Gamma}'_{x_j}(X,t;\,Y,\tau), & \text{pour} \quad j=1,\ldots,n\,. \end{cases}$$

En s'appuyant sur les propriétés des intégrales (v. [6], [7]), qui figurent dans les équations (48) et en tenant les hypothèses (i), (ii), V, I, II, on prévoit que les fonctions inconnues sont continues pour $t>0$ dans les régions D_T, s_T respectivement, et qu'elles sont non bornées, **quand le point intérieur (X,t) du domaine non cylindrique D_T tend pour $t>0$ vers le point (P,t) de la surface latérale s_T ou quand t tend vers** zero. Ces fonctions vérifient les inégalités

$$|u_0(X,t)| \leqslant \frac{\text{const}}{t^{\mu_*}}\,,$$

$$(49)\qquad |u_j(X,t)| \leqslant \frac{\text{Const}}{t^{\mu_*}|XP|^{2\theta}}\,,\qquad j=1,\ldots,n\,,$$

$$|\varphi(P,t)| \leqslant \frac{\text{const}}{t^{\mu_*}}$$

où

$$\mu_* = \max(\mu^*, p_G+\mu_F+\tfrac{1}{2}p_F-1, p_G+\tfrac{1}{2}p_f)\,,$$

$$\max\big(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\max\big(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}(1+\mu_*)\big)\big) < \theta < \tfrac{1}{2}\,.$$

Pour éviter cette singularité on multiplie les fonctions $u_0(X, t)$ et $\varphi(P, t)$ par t^χ, et les fonctions restantes $u_1(X, t), \ldots, u_n(X, t)$ — par $t^\chi|XP|^{2\theta+\varkappa}$, où les constantes χ et $\varkappa$ vérifient les inégalités

$$\mu_* < \chi < 1, \quad 0 < \varkappa < \min(1-2\theta, 2-2\theta-2\mu_G). \tag{50}$$

Nous introduirons donc nouvelles fonctions inconnues

$$\begin{aligned} v_0(X, t) &= t^\chi u_0(X, t), \\ v_j(X, t) &= t^\chi|XP|^{2\theta+\varkappa}u_j(X, t), \quad j = 1, \ldots, n, \\ \psi(P, t) &= t^\chi\varphi(P, t). \end{aligned} \tag{51}$$

Le système d'équations (48) prendra alors la forme suivante

$$\begin{aligned} v_0(X, t) \\ = \iiint\limits_{\Omega_0} t^\chi\tilde{\Gamma}_0(X, t; Y, 0)f(Y)dY + \int\limits_0^t\iint\limits_{S_\tau} t^\chi\tilde{\Gamma}_0(X, t; Q, \tau)\frac{\psi(Q, \tau)}{\tau^\chi}dS_Q d\tau - \\ - \int\limits_0^t\iiint\limits_{\Omega_0} t^\chi\tilde{\Gamma}_0(X, t; Y, \tau)F\left(Y, \tau, \frac{v_0(Y, \tau)}{\tau^\chi}, \frac{v_1(Y, \tau)}{\tau^\chi|YQ_Y|^{2\theta+\varkappa}}, \ldots, \frac{v_n(Y, \tau)}{\tau^\chi|YQ_Y|^{2\theta+\varkappa}}\right)dY d\tau \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} v_j(X, t) = \iiint\limits_{\Omega_0} t^\chi|XP|^{2\theta+\varkappa}\tilde{\Gamma}_j(X, t; Y, 0)f(Y)dY + \\ + \int\limits_0^t\iint\limits_{S_\tau} t^\chi|XP|^{2\theta+\varkappa}\tilde{\Gamma}_j(X, t; Q, \tau)\frac{\psi(Q, \tau)}{\tau^\chi}dS_Q d\tau + \\ + \int\limits_0^t\iiint\limits_{\Omega_\tau} t^\chi|XP|^{2\theta+\varkappa}\tilde{\Gamma}_j(X, t; Y, \tau)F\left(Y, \tau, \frac{v_0(Y, \tau)}{\tau^\chi}, \frac{v_1(Y, \tau)}{\tau^\chi|YQ_Y|^{2\theta+\varkappa}}, \ldots\right. \\ \left. \ldots, \frac{v_n(Y, \tau)}{\tau^\chi|YQ_Y|^{2\theta+\varkappa}}\right)dY d\tau, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(P, t) - \int\limits_0^t\iint\limits_{S_\tau} t^\chi N(P, t; Q, \tau)\frac{\psi(Q, \tau)}{\tau^\chi}dS_Q d\tau \\ = 2t^\chi G\left(P, t, \frac{v_0(P, t)}{t^\chi}\right) + \iiint\limits_{\Omega_0} t^\chi N(P, t; Y, 0)f(Y)dY - \\ - \int\limits_0^t\iiint\limits_{\Omega_\tau} t^\chi N(P, t; Y, \tau)F\left(Y, \tau, \frac{v_0(Y, \tau)}{\tau^\chi}, \frac{v_1(Y, \tau)}{\tau^\chi|YQ_Y|^{2\theta+\varkappa}}, \ldots\right. \\ \left. \ldots, \frac{v_n(Y, \tau)}{\tau^\chi|YQ_Y|^{2\theta+\varkappa}}\right)dY d\tau. \end{aligned}$$

Pour abreger nous écrivons ce système de la façon suivante

$$v = Av \tag{53}$$

où v désigne le système des fonctions inconnues

$$v_0(X, t),\ v_1(X, t),\ \ldots,\ v_n(X, t),\ \psi(P, t),$$

A désigne une opération fonctionnelle définie par les membres droits du système (52).

Nous résoudrons le système (52) par la méthode des approximations successive en appliquant le théorème de Banach.

THÉORÈME DE BANACH. *Soit A une opération donnée dans l'espace metrique complet X, A étant la transformation de l'espace X dans lui même. Pour toutes points $\tilde{v}$, v de l'espace X l'opération A vérifie la condition de Lipschitz*

$$d(A\tilde{v}, Av) \leqslant a d(\tilde{v}, v)$$

avec la constante $a < 1$, où $d(\ ,\ )$ désigne la metrique dans l'espace X.

Alors l'équation $u = Au$ admet une solution unique v^* dans l'espace X. Cette solution v^* on peut déterminer par la méthode des approximations successives d'après la formule

$$v_{i+1} = Av_i \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

où v_0 est un point de l'espace X fixé arbitrairement.

Dans ce but considérons l'espace metrique complet X composé de tous systèmes des fonctions

$$w = \{w_0(X, t), w_1(X, t), \ldots, w_n(X, t), \varrho(P, t)\} \tag{54}$$

définies et continues sur les fermetures des régions D_T et s_T respectivement, avec la metrique définie par la formule

$$d(w, v) = \max\Big(\max_{0\leqslant r\leqslant n}\big(\sup_{D_T}|w_r(X, t) - v_r(X, t)|\big), \sup_{s_T}|\varrho(P, t) - \psi(P, t)|\Big). \tag{55}$$

En vertu des suppositions I, II, (i), (ii) et d'après la définition (52), (53) de l'opération A nous avons (v. [7], les théorèmes 1 et 2) les inégalités

$$\begin{gathered}|\tilde{w}_0(X, t) - w_0(X, t)| \leqslant C_0 k_F t \sup_{(Y,\tau)}|\tilde{v}_0(Y, \tau) - v_0(Y, \tau)| + \\ + C_0' k_F t^{1-\theta-\frac{1}{2}\varkappa} n \cdot \max_{1\leqslant r\leqslant n}\big(\sup_{(Y,\tau)}|\tilde{v}_r(Y, \tau) - v_r(Y, \tau)|\big) + C_0'' t^{\frac{1}{2}} \sup_{(Q,\tau)}|\tilde{\psi}(Q, \tau) - \psi(Q, \tau)|, \\ |\tilde{w}_j(X, t) - w_j(X, t)| \leqslant C_1 k_F t^{\frac{1}{2}} |XP|^{2\theta+\varkappa} \sup_{(Y,\tau)}|\tilde{v}_0(Y, \tau) - v_0(Y, \tau)| + \\ + C_1' k_F t^{\frac{1}{2}-\theta-\frac{1}{2}\varkappa} |XP|^{2\theta+\varkappa} n \cdot \max_{1\leqslant r\leqslant n}\big(\sup_{(Y,\tau)}|\tilde{v}_r(Y, \tau) - v_r(Y, \tau)|\big) + \\ + C_1'' t^{\theta} |XP|^{\varkappa} \sup_{(Q,\tau)}|\tilde{\psi}(Q, \tau) - \psi(Q, \tau)| \quad (j = 1, \ldots, n),\end{gathered} \tag{56}$$

$$|\tilde{\varrho}(P,t)-\varrho(P,t)| \leqslant C_2 k_G k_F t^{1-\mu_G} \sup_{(Y,\tau)} |\tilde{v}_0(Y,\tau)-v_0(Y,\tau)| +$$
$$+C_2' k_G k_F t^{1-\theta-\frac{1}{2}\varkappa-\mu_G} n \cdot \max_{1\leqslant r\leqslant n} \big(\sup_{(Y,\tau)} |\tilde{v}_r(Y,\tau)-v_r(Y,\tau)|\big) +$$
$$+C_2'' k_G t^{\frac{1}{2}-\mu_G} \sup_{(Q,\tau)} |\tilde{\psi}(Q,\tau)-\psi(Q,\tau)| + C_2''' k_F t^{\frac{1}{2}} \sup_{(Y,\tau)} |\tilde{v}_0(Y,\tau)-v_0(Y,\tau)| +$$
$$+C_2^{\mathrm{IV}} k_F t^{\frac{1}{2}-\theta-\frac{1}{2}\varkappa} n \cdot \max_{1\leqslant r\leqslant n} \big(\sup_{(Y,\tau)} |\tilde{v}_r(Y,\tau)-v_r(Y,\tau)|\big)$$

où les systèmes des fonctions $\tilde{w} = \{\tilde{w}_0(X,t), \tilde{w}_1(X,t), \dots, \tilde{w}_n(X,t), \tilde{\varrho}(P,t)\}$ et $w = \{w_0(X,t), w_1(X,t), \dots, w_n(X,t), \varrho(P,t)\}$ désignent les points $A\tilde{v}$ et Av respectivement, $\tilde{v}$ et v étant les points donnés dans l'espace X.

Donc, nous voyons que l'opération A satisfait à la condition de Lipschitz

$$d(A\tilde{v}, Av) \leqslant a d(\tilde{v}, v) \tag{57}$$

où la constante a ait inférieur à l'unité, si T est suffisamment petite, c'est-à-dire, si

$$T = \min(T_0, T_1, T_2), \tag{58}$$

T_0, T_1, T_2 étant des constantes positives telles que

$$C_0 k_F T_0 + n C_0' k_F T_0^{1-\theta-\frac{1}{2}\varkappa} + C_0'' T_0^{\frac{1}{2}} < 1,$$
$$C_1 k_F T_1^{\frac{1}{2}} + n C_1' k_F T_1^{\frac{1}{2}-\theta-\frac{1}{2}\varkappa} + C_1'' T_1^{\theta} < 1,$$
$$C_2 k_G k_F T_2^{1-\mu_G} + n C_2' k_G k_F T_2^{1-\theta-\frac{1}{2}\varkappa-\mu_G} + C_2'' k_G T_2^{\frac{1}{2}-\mu_G} +$$
$$+ C_2''' k_F T^{\frac{1}{2}} + n C_2^{\mathrm{IV}} k_F T_2^{\frac{1}{2}-\theta-\frac{1}{2}\varkappa} < 1.$$

En somme toutes les conditions du théorème de Banach étant vérifiées, nous en concluons l'existence et l'unité d'un point

$$v^* = \{v_0^*(X,t), v_1^*(X,t), \dots, v_n^*(X,t), \psi^*(P,t)\} \tag{59}$$

de l'espace X, qui constitue la solution du système d'équations intégrales (52), parce qu'on a

$$v^* = Av^*. \tag{60}$$

En s'appuyant sur les formules (51) nous arrivons au système des $n+2$ fonctions

$$u^* = \{u_0^*(X,t), u_1^*(X,t), \dots, u_n^*(X,t), \varphi^*(P,t)\}, \tag{61}$$

où

$$u_0^*(X,t) = v_0^*(X,t)/t^{\chi},$$
$$u_j^*(X,t) = v_j^*(X,t^{\chi})/t^{\chi}|XP|^{2\theta+\varkappa}, \qquad j = 1, \dots, n,$$
$$\varphi^*(P,t) = \psi^*(P,t)/t^{\chi}.$$

Ces fonctions sont définies en tout point intérieur (X, t) du domaine non cylindrique D_T et pour $t > 0$ en tout point (P, t) de la surface latérale s_T respectivement, en outre ces fonctions constituent une solution du système d'équations intégrales (48).

En s'appuyant sur les propriétés des intégrales, figurant dans ce système (48), exprimées par les théorèmes des travaux [5], [6] nous concluons les relations

$$u_j^*(X, t) = \frac{\partial u_0^*(X, t)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{62}$$

en tout point intérieur (X, t) du domaine non cylindrique D_T. Par conséquent les fonctions $u_0^*(X, t)$ et $\varphi^*(P, t)$ constituent la solution du système d'équations intégro-différentielles (46), et (47).

Nous allons prouver que la fonction déterminée $u_0^*(X, t)$ représente une solution du problème aux limites proposé.

En effet, d'après les propriétés des dérivées du potentiel de charge spatiale relatif à l'équation parabolique (1) (v. [10], p. 186, le théorème 6), les dérivées spatiales d'ordre prèmier de la fonction $u_0^*(X, t)$ vérifient la condition de Hölder dans tout domaine fermé $D_T^* \subset D_T$, donc grâce à la supposition (40), la fonction

$$F\left(Y, \tau, u_0^*(Y, \tau), \frac{\partial u_0^*(Y, \tau)}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u_0^*(Y, \tau)}{\partial y_n}\right)$$

vérifie aussi dans tout domaine D_T^* la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales. Il en résulte que la fonction $u_0^*(X, t)$ admet des dérivées spatiales d'ordre second qui vérifient l'équation parabolique semilinéaire (35) en tout point intérieur (X, t) du domaine D_T.

La fonction $\varphi^*(P, t)$ est continue pour $t > 0$ sur la surface latérale (v. [10], les théorèmes 6, 8 et v. [5], le théorème 4) s_T, donc la valeur limite de la dérivée transversale de la fonction $u_0^*(X, t)$ existe pour $t > 0$ en tout point (P, t) de la surface s_T (v. [5], le théorème 1) et, d'après l'équation intégrale (47), la fonction $u_0^*(X, t)$ vérifie la condition limite (36). Elle vérifie évidemment aussi (v. [10], le théorème 8) la condition initiale (37).

Donc nous pouvons énoncer le théorème suivant

THÉORÈME 2. *Si la surface latérale s_T du domaine non cylindrique D_T, les coefficients de l'équation*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t)u''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(X, t)u'_{x_k} + c(X, t)u - u'_t = F(X, t, u, u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_n})$$

et les fonctions $F(X, t, u_0, u_1, \ldots, u_n)$, $g(P, t)$, $G(P, t, u_0)$, $f(X)$ vérifient les hypothèses I, II, (i), (ii), V, *alors pour T donné par la formule* (58) *il existe au moins une fonction $u(X, t)$, qui vérifie l'équation aux dérivées partielles* *donnée plus haut en tout point intérieur* (X, t) *du domaine* D_T, *qui vérifie pour* $t > 0$ *la condition limite* (36) *en tout point* (P, t) *de la surface latérale* s_T *et vérifie la condition initiale* (37) *en tout point intérieur* X *du domaine* Ω_0.

Travaux cités

[1] A. Friedman, *Interior estimates for parabolic systems of partial differentiel equations*, Journ. Math. and Mech. 7, n. 5 (1958), p. 771-791.

[2] — *On quasi-linear parabolic equations of the second order*, II, Journ. Math. and Mech. 9, n. 4 (1960), p. 539-556.

[3] M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Journ. de Math. 78 (1913), p. 305-471.

[4] L. I. Kamynin et V. N. Maslennikova, *Sur la solution du premièr problème aux limites pour l'équation quasi-linéaire dans un domaine non cylindrique* (en russe), Mat. Sbornik 57 (99), (1962), p. 241-262.

[5] A. Piskorek, *Propriétés d'une intégrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), p. 125-137.

[6] — *Dérivation d'une integrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique*, Ann. Polon. Math. 14 (1963), p. 13-28.

[7] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique*, Ann. Polon. Math. 12 (1962), p. 301-317.

[8] — *Sur certains problèmes aux limites pour l'équation semi-linéaire parabolique normale*, Bulletin de l'Acad. Pol. d. Sc. vol. VI, n. 8 (1958), p. 505-510.

[9] W. Pogorzelski, *Etude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche Mat. 5 (1956), p. 25-57.

[10] — *Sur certaines propriétés des intégrales analogues aux potentiels et un problème aux limites pour l'équation parabolique*, Ricerche Mat. 10 (1961), p. 173-213.

[11] — *Problèmes aux limites pour l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 110-126.

Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1963