ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1973)

Sur l'existence des solutions d'une équation intégro-différentielle

par K. Zima (Rzeszów)

Dans ce travail nous étudions le problème de l'existence de la solution de l'équation intégro-différentielle

$$y'(t) = f\Big(t, \int_{-\infty}^{\infty} y(s)\,dH(t,s)\Big), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$
$$y(0) = \eta.$$

Moyennant des hypothèses convenables sur les fonctions f et H nous allons montrer que le problème (1) admet au moins une solution définie dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$; à l'encontre des hypothèses que fait Myszkis [2] sur les équations de ce genre, nous admettrons dans ce travail que l'intégrale de Stieltjes dans l'équation (1) pourra être essentiellement généralisée dans les deux sens. Cependant, avant de formuler ces hypothèses et d'énoncer le théorème sur l'existence d'une solution, nous allons faire quelques raisonnements auxiliaires relatifs à un espace fonctionnel et à des conditions suffisantes de compacité dans celui-ci.

1. Un espace du type de Banach. Soit une fonction θ, définie et continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, à valeurs réelles positives. Désignons par $X\{\theta\}$ l'ensemble des fonctions de x continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ tells que

$$\sup_{(-\infty,\infty)} \{|x(t)|\,\theta(|t|)\} < \infty. \tag{2}$$

L'ensemble $X\{\theta\}$ muni de l'addition ordinaire des fonctions et de la multiplication par un nombre est un espace linéaire. Si l'on définit encore la norme de l'élément $x \in X\{\theta\}$ par l'égalité

$$\|x\|_\theta = \sup_{(-\infty,\infty)} \{|x(t)|\,\theta(|t|)\}, \tag{3}$$

l'ensemble $X\{\theta\}$ devient un espace linéaire normé. Nous le désignerons par $\mathscr{X}\{\theta\}$. On voit aisément que l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$ est complet, c'est donc un espace de Banach. En effet, supposons que la suite $\{x_n\}$ d'éléments de l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$ soit fondamentale au sens de la métrique induite par la norme (3). Cela signifie que

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n,m>N} \Big[\sup_{(-\infty,\infty)} \{|x_n(t)-x_m(t)|\,\theta(|t|)\} \leqslant \varepsilon \Big], \tag{4}$$

d'où

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n,m>N} \bigwedge_{t} \left[|x_n(t)-x_m(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\theta(|t|)} \right]. \tag{5}$$

De la relation (5) et des propriétés de la fonction θ il résulte que (a suite $\{x_n\}$ est convergente presque uniformément dans l'intervalle $]-\infty, \infty)$. Soit donc $x_0(t) = \lim x_n(t)$. En faisant tendre l'indice m vers l'infini dans l'expression (5) on obtient

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} \bigwedge_{t\in(-\infty,\infty)} \left[|x_n(t)-x_0(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\theta(|t|)} \right], \tag{6}$$

d'où

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} \Big[\sup_{(-\infty,\infty)} \{|x_n(t)-x_0(t)|\cdot\theta(|t|)\} \leqslant \varepsilon \Big]. \tag{7}$$

La définition de la fonction x_0 et la condition (7) impliquent que x_0 appartient à l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$ et que la suite $\{x_n\}$ converge vers la fonction x_0 au sens de la norme (3). Nous avons ainsi démontré que l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$ est complet.

Remarque. L'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$ constitue une généralisation directe d'un espace introduit par A. Bielecki dans son travail [1].

2. Un critère de compacité dans l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$. Soit M un sous-ensemble de l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$. Nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si les fonctions $x\in M$ sont presque équicontinues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et équibornées au sens de la norme suivante:*

$$\|x\|_{\theta^*} = \sup_{(-\infty,\infty)} \{|x(t)|\cdot\theta^*(|t|)\}, \tag{8}$$

où θ^* est continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, $\theta^*(t) > 0$ et $\lim\limits_{t\to\infty}[\theta(t)/\theta^*(t)] = 0$, l'ensemble M est compact relativement dans l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$.

Démonstration. Soit $\{x_n\}$ une suite infinie d'éléments de l'ensemble M. Les hypothèses du théorème impliquent qu'il existe une constante $\mathscr{K} > 0$ telle que pour tout n et tout $t\in(-\infty, \infty)$ on a l'inégalité

$$|x_n(t)| \leqslant \mathscr{K}/\theta^*(|t|). \tag{9}$$

En vertu de (9) les fonctions x_n sont équibornées dans tout subintervalle compact de l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Ces fonctions étant, par hypothèse, équicontinues dans un tel subintervalle, on constate, en s'appuyant sur le théorème d'Arzelà et sur la méthode diagonale, qu'il existe une fonction ξ continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et une suite partielle $\{\xi_n\}$ de la suite

$\{x_n\}$ qui converge vers la fonction ξ presque uniformément dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. En vertu de l'inégalité (9) et de la définition de la fonction ξ on a: $|\xi(t)|\cdot\theta^*(|t|)\leqslant\mathscr{K}$. Nous allons montrer que la suite partielle $\{\xi_n\}$ converge vers la fonction ξ au sens de la norme de l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$. En effet, pour tout $T>0$ on a

$$\|\xi_n-\xi\|_\theta = \sup_{(-\infty,\infty)}\{|\xi_n(t)-\xi(t)|\cdot\theta(|t|)\}\leqslant \max_{\langle -T,T\rangle}\{|\xi_n(t)-\xi(t)|\cdot\theta(|t|)\}+ \\ +\sup_{|t|>T}\left\{|\xi_n(t)-\xi(t)|\cdot\theta^*(|t|)\cdot\frac{\theta(|t|)}{\theta^*(|t|)}\right\},$$

et, en continuant, on obtient

$$\|\xi_n-\xi\|_\theta\leqslant\max_{\langle -T,T\rangle}|\xi_n(t)-\xi(t)|\cdot\max_{\langle 0,T\rangle}\theta(u)+2\mathscr{K}\cdot\sup_{u>T}[\theta(u)/\theta^*(u)].$$

Puisque la suite $\{\xi_n\}$ converge presque uniformément vers la fonction ξ et que $\lim\limits_{n\to\infty}[\theta(u)/\theta^*(u)]=0$ on a, en vertu de l'estimation précédente, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\xi_n-\xi\|_\theta=0$, ce qui prouve que l'ensemble M est compact relativement dans l'espace $\mathscr{X}\{\theta\}$.

3. Théorème sur l'existence d'une solution du problème (1). Nous établirons l'existence d'une solution du problème (1) en nous appuyant sur les hypothèses suivantes:

1° La fonction f est définie et continue pour $-\infty<t, y<\infty$ et $|f(t,y)|\leqslant\beta(|t|)\cdot[1+|y|]$, où β est une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0,\infty)$, $\beta(u)>0$ et $\int\limits_0^\infty\beta(u)\,du=\nu<\infty$.

2° Il existe une constante $L>0$ telle que

$$|f(t,\bar{y})-f(t,\bar{\bar{y}})|\leqslant L\cdot\beta(|t|)\,|\bar{y}-\bar{\bar{y}}|.$$

3° La fonction H est définie pour $-\infty<t,s<\infty$, l'intégrale $\tilde{H}(t)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\Big(\int\limits_{|s|}^{\infty}\beta(u)\,du\Big)^{-1}dH(t,s)\Big|$ existe pour tout $t\in(-\infty,\infty)$ et

$$\lim_{\tau\to t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\Big(\int\limits_{|s|}^{\infty}\beta(u)\,du\Big)^{-1}d\big(H(\tau,s)-H(t,s)\big)\Big|=0.$$

4° $\sup\limits_{(-\infty,\infty)}\Big\{\Big(\int\limits_{|t|}^{\infty}\beta(u)\,du\Big)\cdot\Big|\int\limits_0^t\beta(|\tau|)\cdot\tilde{H}(\tau)\,d\tau\Big|\Big\}=\lambda<1.$

5° Il existe une constante $C>0$ telle que $\tilde{H}(t)\cdot\int\limits_{|t|}^{\infty}\beta(u)\,du\leqslant C$ pour $t\in(-\infty,\infty)$.

Soit $\sigma(u) \overset{\text{def}}{=} \int_u^\infty \beta(s)ds$ pour $u \geqslant 0$ et soit $\mathscr{X}\{\sigma\}$ l'espace, correspondant à la fonction σ, défini au § 1. Considérons ensuite l'opération suivante T:

$$(10)\qquad (T\varphi)(t) = \eta + \int_0^t f\Big(\tau, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,dH(\tau, s)\Big)d\tau, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Nous établirons maintenant quelques lemmas sur l'opération T et, en appliquant le principe du point fixe de Schauder, nous en déduirons l'existence d'une solution du problème (1).

LEMME 1. *Si $\varphi \in \mathscr{X}\{\sigma\}$, l'intégrale $\Phi(t) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,dH(t, s)$ existe pour tout $t \in (-\infty, \infty)$ et elle est fonction continue du paramètre t.*

Démonstration. Pour la fonction Φ on a la limitation suivante:

$$|\Phi(t)| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\sigma(|s|)\big(\sigma(|s|)\big)^{-1}dH(t, s)\Big|$$
$$\leqslant \sup_{(-\infty,\infty)}\{|\varphi(s)|\sigma(|s|)\}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \big|\sigma(|s|)^{-1}dH(t, s)\big| = (\|\varphi\|_\sigma)\cdot \tilde{H}(t).$$

Par conséquent $|\Phi(t)| \leqslant (\|\varphi\|_\sigma)\cdot\tilde{H}(t)$; en vertu de l'hypothèse 3° cela prouve que l'intégrale Φ converge pour tout t. D'autre part, la continuité de cette intégrale par rapport au paramètre t résulte de la limitation

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,d\big(H(t_1, s) - H(t_2, s)\big)\Big|$$
$$\leqslant (\|\varphi\|_\sigma)\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\big(\sigma(|s|)\big)^{-1}d\big(H(t_1, s) - H(t_2, s)\big)\Big|$$

et de la seconde partie de l'hypothèse 3°.

LEMME 2. *Soit $K = K(\eta, R)$ une boule fermée de centre au point η et de rayon R, contenue dans l'espace $\mathscr{X}(\sigma)$. Si $R \geqslant (1-\lambda)^{-1}\cdot(\nu^2 + \lambda\|\eta\|_\sigma)$, on a $T(K) \subset K$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in K$, c'est-à-dire $\|\varphi - \eta\|_\sigma \leqslant R$, d'oú $\|\varphi\|_\sigma \leqslant R + \|\eta\|_\sigma$. D'autre part, en vertu des hypothèses 1° et 4°,

$$\|T\varphi - \eta\|_\sigma \leqslant \sup_{(-\infty,\infty)}\Big\{\Big|\int_0^t \beta(|\tau|)\Big[1 + \Big|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,dH(\tau, s)\Big|\Big]d\tau\Big|\cdot\sigma(|t|)\Big\}$$
$$\leqslant \sup_{(-\infty,\infty)}\Big\{\Big|\int_0^t \beta(|\tau|)\,d\tau\Big|\cdot\sigma(|t|)\Big\} +$$
$$+ \sup_{(-\infty,\infty)}\Big\{\sigma(|t|)\cdot\Big|\int_0^t \beta(|\tau|)\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\cdot\sigma(|s|)(\sigma|s|)^{-1}dH(\tau, s)\Big|d\tau\Big|\Big\}$$
$$\leqslant \nu^2 + (\|\varphi\|_\sigma)\sup_{(-\infty,\infty)}\Big\{\sigma(|t|)\cdot\Big|\int_0^t \beta(|\tau|)\cdot\tilde{H}(\tau)\,d\tau\Big|\Big\} \leqslant \nu^2 + \lambda\cdot\|\varphi\|_\sigma.$$

Par conséquent on a, pour $\varphi \in K$ et $R \geqslant (1-\lambda)^{-1}(\nu^2+\lambda\|\eta\|_\sigma)$, la suite d'inégalités

$$\|T\varphi-\eta\|_\sigma \leqslant \nu^2+\lambda\|\varphi\|_\sigma \leqslant \lambda R+(\nu^2+\lambda\|\eta\|_\sigma) \leqslant R,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.

LEMME 3. *Pour tout $R > 0$ l'ensemble $T(K)$ est compact relativement dans l'espace $\mathscr{X}\{\sigma\}$.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du théorème 1 il suffit, pour établir le lemme 3, de prouver que les fonctions appartenant à l'ensemble $T(K)$ sont presque équicontinues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et équibornées au sens de la norme suivante:

$$\|\varphi\|_{\sigma^*} = \sup_{(-\infty,\infty)} \{|\varphi(s)|\cdot\sigma^*(|t|)\}, \tag{11}$$

où σ^* est une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, à valeurs positives, quelconque mais telle que pour les fonctions σ et σ^* soit remplie la condition

$$\lim_{u\to\infty}[\sigma(u)/\sigma^*(u)] = 0. \tag{12}$$

Supposons donc que $\varphi \in T(K)$. Pour t_1 et t_2 quelconques on a l'inégalité

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(t_1)-(T\varphi)(t_2)| &\leqslant \Big|\int_{t_1}^{t_2} \beta(|\tau|)\Big[1+\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,dH(\tau,s)\Big|\Big]d\tau\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{t_1}^{t_2}\beta(|\tau|)\,d\tau\Big| + (\|\varphi\|_\sigma)\cdot\Big|\int_{t_1}^{t_2}\beta(|\tau|)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\big|(\sigma(|s|))^{-1}\cdot dH(\tau,s)\big|\,d\tau\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{t_1}^{t_2}\beta(|\tau|)\,d\tau\Big| + R\Big|\int_{t_1}^{t_2}\beta(|\tau|)\tilde{H}(\tau)\,d\tau\Big|,\end{aligned}$$

ce qui prouve que les fonctions appartenant à l'ensemble $T(K)$ sont presque équicontinues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

Remarquons encore, pour achever la démonstration du lemme 3, que

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(t)| &\leqslant |\eta| + \Big|\int_0^t \beta(|\tau|)\Big[1+\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,dH(\tau,s)\Big|\Big]d\tau\Big| \leqslant |\eta|+\Big|\int_0^t\beta(|\tau|)\,d\tau\Big| + \\ &\quad + \Big|\int_0^t\beta(|\tau|)\big(\sigma(|\tau|)\big)^{-1}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(s)|\cdot\sigma(|s|)\big|(\sigma(|s|))^{-1}dH(\tau,s)\big|\cdot\sigma(|\tau|)\,d\tau\Big| \\ &\leqslant |\eta|+\nu+(\|\varphi\|_\sigma)\cdot\sup_{(-\infty,\infty)}\{\sigma(|t|)\cdot\tilde{H}(t)\}\cdot\Big|\int_0^t\beta(|\tau|)\cdot\big(\sigma(|\tau|)\big)^{-1}d\tau\Big|.\end{aligned}$$

On a donc finalement l'inégalité

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(t)| &\leqslant |\eta|+\nu+CR\Big|\ln\Big(\nu\Big/\int_{|t|}^{\infty}\beta(u)\,du\Big)\Big| \\ &\leqslant (|\eta|+\nu+CR)\ln\Big(e+\nu\Big/\int_{|t|}^{\infty}\beta(u)\,du\Big).\end{aligned} \tag{13}$$

Soit $\sigma^*(u) \overset{\text{def}}{=} \left[\ln\left(e+\nu/\int\limits_u^\infty \beta(s)ds\right)\right]^{-1}$, $u \geqslant 0$. Alors l'inégalité (13) entraîne la suivante:

$$|(T\varphi)(t)|\cdot\sigma^*(|t|) \leqslant (|\eta|+\nu+CR) \quad \text{pour } t\in(-\infty, \infty),$$

d'où

$$\|T\varphi\|_{\sigma^*} = \sup_{(-\infty,\infty)} \{|(T\varphi)(t)|\cdot\sigma^*(|t|)\} \leqslant (|\eta|+\nu+CR).$$

Les fonctions $T\varphi$ appartenant à l'ensemble $T(K)$ sont donc équibornées au sens de la norme (11) si $\sigma^*(u) = \left[\ln\left(e+\nu/\int\limits_u^\infty \beta(s)ds\right)\right]^{-1}$. Pour terminer la démonstration du lemme remarquons encore que si $\sigma(u) = \int\limits_u^\infty \beta(s)ds$ et si $\sigma^*(u)$ est donnée par la formule précédente, on a $\lim\limits_{u\to\infty} [\sigma(u)/\sigma^*(u)] = 0$. En effet, on a:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\sigma(u)}{\sigma^*(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln\left[e+\nu\left(\int\limits_u^\infty \beta(s)ds\right)^{-1}\right]}{\left(\int\limits_u^\infty \beta(s)ds\right)^{-1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\nu}{e+\nu\left(\int\limits_u^\infty \beta(s)ds\right)^{-1}} = 0.$$

LEMME 4. *La transformation T est continue dans l'espace $\mathfrak{X}\{\sigma\}$.*

Démonstration. Soit $\varphi_n \in \mathfrak{X}\{\sigma\}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et soit $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n-\varphi\|_\sigma = 0$. Il s'agit de prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} \|T\varphi_n - T\varphi\|_\sigma = 0$. En vertu des hypothèses 2° et 4° on a l'inégalité

$$\begin{aligned}|(T\varphi_n)(t)-(T\varphi)(t)| &\leqslant L\cdot\left|\int\limits_0^t \beta(|\tau|)\cdot\left|\int\limits_{-\infty}^\infty [\varphi_n(s)-\varphi(s)]dH(\tau, s)\right|d\tau\right| \\ &\leqslant L\cdot\|\varphi_n-\varphi\|_\sigma\cdot\left|\int\limits_0^t \beta(|\tau|)\cdot\tilde{H}(\tau)d\tau\right|,\end{aligned}$$

dont résulte la limitation

$$\|T\varphi_n - T\varphi\|_\sigma \leqslant L\cdot\|\varphi_n-\varphi\|_\sigma\cdot\sup_{(-\infty,\infty)}\left\{\sigma(|t|)\cdot\left|\int\limits_0^t \beta(|\tau|)\cdot\tilde{H}(\tau)d\tau\right|\right\} = \lambda L\|\varphi_n-\varphi\|_\sigma.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \|T\varphi_n - T\varphi\|_\sigma = 0$, ce qui prouve que l'opération T est continue dans l'espace $\mathfrak{X}\{\sigma\}$.

En s'appuyant sur les lemmes qui viennent d'être démontrés on peut enfin énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Sous les conditions* 1° - 5° *le problème* (1) *admet au moins une solution appartenant à l'espace $\mathfrak{X}\{\sigma\}$.*

En effet, si $R \geqslant (1-\lambda)^{-1}\cdot(\nu^2+\lambda\|\eta\|_\sigma)$, en vertu du théorème de Schauder il existe dans la boule $K(\eta, R)$ au moins un point fixe de l'opération T. Il est évident que toute fonction qui est un point fixe de l'opération T est une solution du problème (1).

Remarque. Les théorèmes 1 et 2 que nous venons d'établir sont une généralisation des résultats contenus dans le travail [3].

Références

[1] A. Bielecki, *Une remarque sur la méthode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci. 4 (1956), p. 261–264.

[2] А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Москва–Ленинград 1951.

[3] K. Zima, *Sur une équation différentielle du premier ordre à argument fonctionnel*, Ann. Polon. Math. 25 (1971), p. 205–214

Reçu par la Rédaction le 17. 9. 1971