ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XII, 2 (1971)

М. ДРЫЯ (Варшава)

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В заметке доказана устойчивость и сходимость в норме L_2 на слое разностной схемы с расщепляющимся оператором ([1]-[4], [6]) для общих параболических уравнений II порядка, вырождающихся во внутренней области [5].

1. В цилиндре $Q_T = \bar{\Omega}\times[0\leqslant t\leqslant T]$ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu = f(x, t), \tag{1.1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$u(t, x) = \psi(tx), \qquad (t, x)\in\delta Q_T, \tag{1.3}$$

при $\bar{\Omega} = \{x = (x_1, \ldots, x_p),\ 0\leqslant x_i\leqslant l_i,\ i = 1, \ldots, p\}$, δQ_T — боковая поверхность Q_T;

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{p} b_i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(t, x)u,$$

$$\gamma\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2\geqslant\sum_{i,j=1}^{p}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0, \tag{1.4}$$

при $\gamma > 0$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)\in R_p$.

На сетке $Q_{h\tau} = \bar{\Omega}_h\times\bar{\omega}_\tau$, причем

$\bar{\Omega}_h = \{x = (i_1h_1, \ldots, i_ph_p),\ i_s = 0, 1, \ldots, N_s,\ \ h = l_s/N_s,\ \ s = 1, \ldots, p\}$,

$\bar{\omega}_\tau = \{t = n\tau,\quad n = 0, \ldots, N,\quad \tau = T/N\}$,

$\Omega_h = \{x = (i_1h_1, \ldots, i_ph_p),\quad i_s = 1, \ldots, N_s-1,\quad s = 1, \ldots, p\}$,

$\Gamma_h = \bar{\Omega}_h-\Omega_h$,

аппроксимируем задачу (1.1) - (1.3) разностной схемой с расщепляющимся оператором, рассматривавшейся в работах [1] - [4], [6],

$$(1.5)\qquad Au_t^n + L_h u^n = f^n, \quad x\in\Omega_h, \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

$$(1.6)\qquad u^0(x) = \varphi(x), \quad x\in\Omega_h,$$

$$(1.7)\qquad u^n(x) = \psi^n(x), \quad x\in\Gamma_h, \quad n = 0, \ldots, N,$$

при

$$A = \prod_{i=1}^{p}(E+\tau\Lambda_i), \quad \Lambda_i \equiv -\theta\partial_i\bar{\partial}_i, \quad \theta > 0,$$

$$L_h u^n \equiv -\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p}[\partial_i(a_{ij}^n\bar{\partial}_j u^n) + \bar{\partial}_i(a_{ij}^n\partial_j u^n)] + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} b_i^n(\partial_i u^n + \bar{\partial}_i u^n) + c^n u^n,$$

$$\partial_i \equiv (T_i - E)/h_i, \quad \bar{\partial}_i = (T_i^{-1} - E)/h_i,$$

$$T_i u \equiv u(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_p), \quad u^n(x) \equiv u(n\tau, x),$$

$$u_t^n \equiv (u^{n+1} - u^n)/\tau.$$

Переписав схему (1.5) в виде

$$(1.5')\qquad u_t^n + \tau\Lambda u_t^n + L_h u^n + R u_t^n = f^n,$$

причем

$$\Lambda \equiv \sum_{i=1}^{p}\Lambda_i, \quad R \equiv \sum_{m=2}^{p}\tau^m \sum_{s_1<s_2<\ldots<s_m}\Lambda_{s_1}\Lambda_{s_2}\ldots\Lambda_{s_m},$$

нетрудно проверить, что (1.5) - (1.7) аппроксимирует задачу (1.1) - (1.3) с порядком $O(\tau + |h|^2)$, если решение и данные исходной задачи достаточно гладкие.

2. Пусть H_h — гильбертово пространство сеточных функций, определенных на Ω_h со скалярным произведением

$$(u, v) = h\sum_{x\in\Omega_h} u(x)v(x), \quad h = h_1\cdot\ldots\cdot h_p, \quad \|u\|^2 = (u, u),$$

$$\|u\|_B^2 = (Bu, u), \quad \text{при} \quad B \equiv -\sum_{i=1}^{p}\partial_i\bar{\partial}_i.$$

Функции оперделенные в Ω_h продолжим иа все узлы

$$R_p^h = \{x = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p), i_s = 0, \pm 1, \ldots, s = 1, \ldots, p\},$$

полагая их равными нулю и обозначим

$$(u, v)_0 = h\sum_{x\in R_p^h} u(x)v(x).$$

Кроме того будем использовать соотношения

$$(\bar{\partial}_s u, v)_0 = -(u, \partial_s v)_0, \qquad (u, v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|v\|^2.$$

Теорема 1. *Пусть функции*

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \ \frac{\partial b_i}{\partial x_i}, c, f, \qquad i, j = 1, \ldots, p,$$

$$\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}, \ \frac{\partial^{2l}\varphi}{\partial x_{s_1}^2 \partial x_{s_2}^2 \ldots \partial x_{s_l}^2}, \qquad s_1 < s_2 < \ldots < s_l, \qquad l = 1, 2, \ldots, p$$

ограничены и выполнено условие (1.4). *Тогда, при* $\theta \geqslant \theta_0(\gamma)$, *для решения* (1.5) - (1.7) *с* $\psi^n(x) \equiv 0$ *справедлива априорная оценка*

$$\|u^k\|^2 + \tau^2 \sum_{n=0}^{k-1} (\|u_t^n\|^2 + \|u_t^n\|_R^2) + \tau\|u^k\|_B^2 + \|u^k\|_R^2 \leqslant MQ(f, \varphi), \tag{2.1}$$

причем

$$Q(f, \varphi) \equiv \tau \sum_{n=0}^{k-1} \|f^n\|^2 + \|\varphi\|^2 + \tau\|\varphi\|_B^2 + \|\varphi\|_R^2.$$

Доказательство. Из (1.5′) легко получаем

$$2\tau \sum_{n=0}^{k-1} (u_t^n, u^{n+1}) + 2\tau^2 \sum_{n=0}^{k-1} (\varLambda u_t^n, u^{n+1}) + \tag{2.2}$$
$$+ 2\tau \sum_{n=0}^{k-1} (L_h u^n, u^{n+1}) + 2\tau \sum_{n=0}^{k-1} (Ru_t^n, u^{n+1}) = 2\tau \sum_{n=0}^{k-1} (f^n, u^{n+1}).$$

Используя тождество

$$2(Du_t^n, u^{n+1}) \equiv (Du^n, u^n)_t + \tau(Du_t^n, u_t^n),$$

справедливое для самосопряженного оператора D, не зависящего от t, преобразуем три первых слагаемых в левой части (2.2):

$$2(u_t^n, u^{n+1}) = (u^n, u^n)_t + \tau(u_t^n, u_t^n), \tag{2.3}$$

$$2(\varLambda u_t^n, u^{n+1}) = (\varLambda u^n, u^n)_t + \tau(\varLambda u_t^n, u_t^n), \tag{2.4}$$

$$2(Ru_t^n, u^{n+1}) = (Ru^n, u^n)_t + \tau(Ru_t^n, u_t^n), \tag{2.5}$$

так как $\varLambda$ и R являются самосопряженными и даже положительными операторами.

Ниже докажем, что

$$I \equiv 2(L_h u^n, u^{n+1}) \geqslant -\gamma\|u^0\|_B - \tag{2.6}$$
$$-\tau^2(\gamma + \varepsilon_1) \sum_{n=0}^{k-1} \|u_t^n\|_B^2 - M_3\tau \sum_{n=1}^{k} \|u^n\|_B^2 - (M_2 + \varepsilon_2) \sum_{n=0}^{k-1} \|u^n\|^2 - \varepsilon_2\|u^k\|^2.$$

Подставляя в (2.2) соотношения (2.3) - (2.6) вместе с неравенством

$$2(f^n, u^{n+1}) \leqslant \varepsilon_3 \|u^{n+1}\|^2 + M_4 \|f^n\|^2, \qquad \text{при} \qquad M_4 = \frac{1}{\varepsilon_3},$$

получаем

$$(2.7) \qquad (1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)\|u^k\|^2 + \tau^2 \sum_{n=0}^{k-1} \|u_t^n\|^2 + \tau(\theta - M_3\tau)\|u^k\|_B^2 +$$
$$+\tau^3(\theta-\gamma-\varepsilon_1)\sum_{n=0}^{k-1}\|u_t^n\|_B^2 + \|u^k\|_R^2 + \tau^2\sum_{n=0}^{k-1}\|u_t^n\|_R^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|u^0\|^2 + \tau(\gamma+\theta)\|u^0\|_B^2 + \|u^0\|_R^2 +$$
$$+\sum_{n=0}^{k-1}\left(M_3\tau^2\|u^n\|_B^2 + \tau(M_2+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\|u^n\|^2 + M_4\tau\|f^n\|^2\right).$$

Из (2.7), при $\varepsilon_2+\varepsilon_3 \leqslant \frac{1}{2}$, $\theta \geqslant 2M_3\tau$ и $(\theta-\gamma-\varepsilon_1)\geqslant 0$, следует априорная оценка (2.1).

Перейдем к доказательству неравенства (2.6). Записывая L_h в виде

$$L_h = L_h^2 + L_h^1 + L_h^0,$$

причем

$$L_h^2 u \equiv -\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p}\left[\partial_i(a_{ij}\bar{\partial}_j u) + \bar{\partial}_i(a_{ij}\partial_j u)\right],$$

$$L_h^1 u \equiv \sum_{i=1}^{p} b_i(\bar{\partial}_i u + \partial_i u), \qquad L_h^0 u \equiv cu,$$

и используя тождество $u^{n+1} = u^n + \tau u_t^n$, имеем

$$I = 2\{(L_h^2 u^n, u^n) + \tau(L_h^2 u^n, u_t^n) + (L_h^1 u^n, u^n) +$$
$$+\tau(L_h^1 u^n, u_t^n) + (L_h^0 u^n, u^{n+1}).$$

Применяя формулы суммирования по частям и неравенство ε, легко показать, что

$$(2.8) \qquad (L_h^1 u^n, u^n) + \tau(L_h^1 u^n, u_t^n) + (L_h^0 u^n, u^{n+1}) \leqslant$$
$$\leqslant M_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\|u^n\|^2 + \tau^2\varepsilon_1\|u_t^n\|_B^2 + \varepsilon_2\|u^{n+1}\|^2$$

и

$$(2.9) \qquad (L_h^2 u^n, u^n) \geqslant 0$$

учитывая условие (1.4).

Распишем и несколько преобразуем второе слагаемое I:

$$2(L_h^2 u^n, u_t^n) = \sum_{i,j=1}^{p} [(a_{ij}\bar{\partial}_j u^n, \bar{\partial}_i u_t^n)_0 + (a_{ij}\partial_j u^n, \partial_i u_t^n)_0] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \Big[\big((a_{ij}\bar{\partial}_j u^n, \bar{\partial}_i u^n)_0\big)_t + \big((a_{ij}\partial_j u^n, \partial_i u^n)_0\big)_t -$$

$$-\tau[(a_{ij}\bar{\partial}_j u_t^n, \bar{\partial}_i u_t^n)_0 + (a_{ij}\partial_j u_t^n, \partial_i u_t^n)_0] -$$

$$-\big((a_{ij})_t\partial_j u^{n+1}, \partial_i u^{n+1}\big)_0 - \big((a_{ij})_t\partial_j u^{n+1}, \partial_i u^{n+1}\big)_0\Big].$$

Суммируя это выражение по n и используя условие (1.4), получаем оценку, которая вместе (2.8) и (2.9) дает (2.6).

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и функции*

$$\psi, \frac{\partial^3 a_{\alpha\beta}}{\partial x_i \partial x_j^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \alpha, \beta, i, j = 1, \ldots, p,$$

$$\frac{\partial^{2l} u}{\partial x_{s_1}^2 \partial x_{s_2}^2 \ldots \partial x_{s_l}^2}, \qquad s_1 < s_2 < \ldots < s_l, \qquad l = 3, 4, \ldots, p,$$

ограничены т.е. схема (1.5) *имеет порядок* $O(\tau + |h|^2)$, *то решение* (1.5) - (1.7), *при* $\theta \geqslant \theta_0(\gamma)$, *сходится к решению* (1.1) - (1.3) *в норме* H_h *на слое тоже с порядком* $O(\tau + |h|^2)$.

Доказательство. Функция $z = v - u$, где v — решение задачи (1.5) - (1.7), а u — решение (1.1) - (1.3), удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} &Az_t^n + L_h z^n = \zeta, && x \in \Omega_h, && n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ &z^0(x) = 0, && x \in \Omega_h, && \\ &z^n(x) = 0, && x \in \Omega_h, && n = 0, \ldots, N, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\zeta = O(\tau + |h|^2)$ — погрешность аппроксимации схемы (1.5). Применяя к задаче (2.10) теорему 1, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Замечание. Приведенные исследования разностных схем с расщепляющимся оператором могут быть распространены на задачу Коши во всей области и задачу Коши, периодической по пространственным переменным. В этом случае можно доказать равномерную сходимость для $p = 2,3$ на основе разностной теоремы вложения Соболева. Для задачи рассмативаемой в этой заметке, равномерную сходимость можно доказать во внутренней области [4].

Цитированная литература

[1] В. Б. Андреев, *О разностных схемах с расщепляющимся оператором для общих р/мерных параболических уравнений второго порядка со смешанными прозиводными*, Ж.В.М. и М.Ф. 7 (1967), стр. 312-321.

[2] Е. Г. Дьяконов, *Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач*, Ж.В.М. и М.Ф. 2 (1962), стр. 549-568.

[3] Е. Г. Дьяконов, *Экономичные разностные методы, основанные на расщеплении разностного оператора для некоторых систем уравнений в частных производных. В сб. Вычислительная математика и программирование.* Вып. VI. Изд-во МГУ, Москва 1967, 76-119.

[4] М. Дрыя, *О сходимости в внутри области разностных схем с расщепляющимся оператором для параболических систем*, Ж.В.М. и М.Ф. 3 (1971), стр. 658-666.

[5] О. А. Олейник, *О гладкости решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений*, ДАН СССР 163 (1965), стр. 577-580.

[6] А. А. Самарский, *О регуляризации разностных схем*, Ж.В.М. и М.Ф. 7 (1967), стр. 60-93.

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН
ВАРШАВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Поступила в Редакцию 11. 6. 1970

M. DRYJA (Warszawa)

SCHEMATY RÓŻNICOWE Z ROZSZCZEPIALNYM OPERATOREM DLA WYRADZAJĄCEGO SIĘ RÓWNANIA PARABOLICZNEGO

STRESZCZENIE

W nocie bada się stabilność i zbieżność w L_2 na warstwie schematu różnicowego z rozszczepiającym się operatorem, aproksymującego równanie paraboliczne z nieujemną charakterystyczną formą wewnątrz obszaru.
