INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

# DISSERTATIONES MATHEMATICAE

## (ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
BOGDAN BOJARSKI, ANDRZEJ MOSTOWSKI,
MARCELI STARK, STANISŁAW TURSKI

LXIII

R. GÖBEL

**Kartesisch und residuell abgeschlossene Gruppenklassen**

WARSZAWA 1969
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

S.7133

COPYRIGHT 1969
by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (POLAND), ul. Miodowa 10

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any form, by mimeograph or any other means, without permission in writing from the publishers.

1816

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

EO-390/69

# INHALTSVERZEICHNIS


I. Einleitung . . . . . 5
II. Definitionen und Bezeichnungen . . . . . 7
III. Ausartung abgeschlossener Gruppenklassen . . . . . 7
IV. Allgemeine $\mathfrak{e}^{\alpha}$-Reihen . . . . . 13
V. Kriterien für die Endlichkeit der Länge von $\mathfrak{e}^{\alpha}$-Reihen . . . . . 23
VI. Türme von Gruppenklassen . . . . . 27
VII. Gruppen mit aufsteigender $\mathfrak{f}$-Reihe . . . . . 32
VIII. Endlichkeitsbedingungen für $\mathfrak{f}$-Reihen in kartesisch abgeschlossenen Gruppenklassen . . . . . 37

Literaturverzeichnis . . . . . 47

## I. Einleitung

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit gruppentheoretischen Eigenschaften, und zwar können wir die von uns angegangenen Probleme systematisch folgendermaßen zusammenfassen. Einmal suchen wir nach Kriterien dafür, daß eine solche Klasse entweder die triviale $\mathfrak{t}$, die nur aus der 1 besteht, oder die universelle Klasse $\mathfrak{u}$ aller Gruppen ist. Zweitens wollen wir Kriterien dafür angeben, daß alle Gruppen einer Klasse eine Normalkette spezieller Art besitzen, deren Länge für die ganze Klasse beschränkt ist. Drittens wollen wir die Kriterien der zweiten Art benutzen, um solche der ersten Art zu gewinnen.

Wir geben einige typische Beispiele unserer Resultate.

*Die folgenden Eigenschaften der Gruppenklasse* $\mathfrak{k}$ *sind äquivalent*:

(1) $\mathfrak{k} = \mathfrak{t}$ *oder* $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}$.

(2)
- (a) *Untergruppen von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*
- (b) *Kartesische Produkte von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*
- (c) *Produkte von zwei* $\mathfrak{k}$*-Normalteilern sind wieder* $\mathfrak{k}$*-Normalteiler.*

(3)
- (a) *Jede Gruppe* $G$*, die eine Menge* $\mathfrak{M}$ *von Normalteilern mit* $\bigcap_{\mathfrak{M}} M = 1$ *und* $G/M \in \mathfrak{k}$ *für alle* $M \in \mathfrak{M}$ *besitzt, gehört zu* $\mathfrak{k}$*, d. h.* $\mathfrak{k}$ *ist residuell.*
- (b) *Epimorphe Bilder von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*
- (c) *Produkte von zwei* $\mathfrak{k}$*-Normalteilern sind wieder* $\mathfrak{k}$*-Normalteiler.*

(4)
- (a) *Faktoren von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*
- (b) *Freie Produkte von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind wieder* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*

(5)
- (a) *Untergruppen von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*
- (b) *Produkte von zwei* $\mathfrak{k}$*-Normalteilern sind wieder* $\mathfrak{k}$*-Normalteiler.*
- (c) *Freie Produkte von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind wieder* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*

(6)
- (a) *Epimorphe Bilder von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*
- (b) $\mathfrak{k}$ *ist residuell abgeschlossen.*
- (c) *Freie Produkte von* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind wieder* $\mathfrak{k}$*-Gruppen.*

*Die Eigenschaften* $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}$ *mögen den folgenden Bedingungen genügen*:

(A) *Jedes epimorphe Bild* $H \neq 1$ *einer* $\mathfrak{k}$*-Gruppe besitze einen* $\mathfrak{e}$*-Normalteiler* $\neq 1$*, in dem* $H$ *eine* $\mathfrak{a}$*-Gruppe von Automorphismen induziert,* (*d. h.* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Gruppen*).

(B) *Vererbe sich* $\mathfrak{a}$ *auf Faktoren und* $\mathfrak{e}$ *auf Untergruppen.*

(C) $\mathfrak{k}$ *sei kartesisch abgeschlossen.*

*Dann sind die folgenden vier Eigenschaften von* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}$ *äquivalent:*

(1) *Es gibt eine Kardinalzahl* $\aleph$ *derart, daß alle* $\mathfrak{a}$*-Gruppen eine Mächtigkeit* $< \aleph$ *haben.*

(2) *Es gibt eine Kardinalzahl* $\aleph$ *derart, daß alle* $\mathfrak{e}$*-Gruppen eine Mächtigkeit* $< \aleph$ *haben.*

(3) $\mathfrak{a}$ *ist die triviale Gruppenklasse* $\mathfrak{t}$.

(4) *Es gibt eine natürliche Zahl* $n$ *derart, daß alle* $\mathfrak{k}$*-Gruppen nilpotent der Klasse* $n$ *sind.*

Unter geeigneten Voraussetzungen über $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}$ können wir auch allgemeiner die Existenz einer positiven, ganzen Zahl $n$ derart zeigen, daß jede $\mathfrak{k}$-Gruppe Normalteiler $N(i)$ mit folgenden Eigenschaften besitzt:

$$1 = N(0) \subseteq \ldots \subseteq N(i) \subseteq N(i+1) \subseteq \ldots \subseteq N(n) = G.$$

$N(i+1)/N(i)$ ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, in der $G/N(i)$ eine $\mathfrak{a}$-Gruppe von Automorphismen induziert, (d.h. $G$ besitzt eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe der Länge $n$).

Um nun diese Kriterien der zweiten Art zur Gewinnung von Kriterien der ersten Art nutzbar zu machen, müssen wir erreichen, daß es $\mathfrak{k}$-Gruppen mit Normalteilerketten unbeschränkt großer Länge gibt. Hier beweisen wir zum Beispiel:

*Ist* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ *faktoren- und* $\mathfrak{a}$ *epimorphismenvererblich und* $\mathfrak{k}$ *eine Gruppenklasse mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Alle* $\mathfrak{k}$*-Gruppen sind Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Gruppen.*

(2) *Für eine die endliche Ordnung einer* $\mathfrak{e}$*-Gruppe teilende Primzahl* $p \neq 1$ *sind alle endlichen* $p$*-Gruppen in* $\mathfrak{k}$.

(3) $\mathfrak{k}$ *ist residuell.*

*so ist* $\mathfrak{a}$ *die universelle Gruppenklasse* $\mathfrak{u}$.

*Sind außerdem alle kartesischen Produkte von* $\mathfrak{e}$*-Gruppen wieder* $\mathfrak{e}$*-Gruppen, so ist auch* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

*Besteht schließlich* $\mathfrak{k}$ *aus der Klasse aller Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Gruppen, so folgt aus der Faktorenvererblichkeit von* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$, *der Epimorphismenvererblichkeit von* $\mathfrak{a}$ *und der kartesischen Abgeschlossenheit von* $\mathfrak{k}$, *daß* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}$ *ist.*

Ich danke Herrn Dr. T. Hawkes (Cambridge) für seine Anregung zum Kapitel III sowie besonders Herrn Professor Dr. R. Baer (z. Zt. Las Cruces, New Mexico, USA) und Herrn Dozent Dr. H. Heineken (Frankfurt, jetzt Erlangen) für Betreuung und Hilfe bei dieser Arbeit.

## II. Definitionen und Bezeichnungen

$|A|$ = Mächtigkeit der Menge $A$.

$\{\,..\,\}$ = von .. erzeugte Untergruppe.

$\langle .. \mid ++ \rangle$ = Menge aller Elemente .. mit den Eigenschaften $++$.

$a \in A$ = $a$ ist Element von $A$.

$x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$.

$X \circ Y$ = Erzeugnis aller Elemente $x \circ y$ mit $x \in X$ und $y \in Y$.

${}^{(0)}G = G$, ${}^{(n+1)}G = {}^{(n)}G \circ G$.

Eine Gruppe $G$ heißt nilpotent der Klasse $n$, wenn ${}^{(n)}G = 1$ ist.

Sind $X$ und $Y$ Teilmengen der Gruppe $G$, so ist der Zentralisator von $Y$ in $X$: $\mathfrak{c}_X Y = \mathfrak{c} Y = \{x \mid x \in X,\ xy = yx$ für alle $y \in Y\}$.

$\mathfrak{z}G$ = Zentrum von $G = \mathfrak{c}_G G$.

Faktor = epimorphes Bild einer Untergruppe.

$\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) = \underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}} G$ = kartesisches Produkt der Gruppenmenge $\mathfrak{M}$ (mit $G \in \mathfrak{M}$)
= Menge aller auf $\mathfrak{M}$ definierten, eindeutigen Funktionen $f$ mit $fG \in G$ für $G \in \mathfrak{M}$ und der Multiplikation $(f \cdot g)G = fG \cdot gG$ für alle $G \in \mathfrak{M}$.

Ist $f \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$, so ist der Träger von $f$ die Menge $\mathfrak{T}f$ = Menge aller $G \in \mathfrak{M}$ mit $fG \neq 1$.

$\mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$ = $\aleph$-beschränktes ($\aleph$-kartesisches) Produkt der Gruppenmenge $\mathfrak{M} = \{f \mid f \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ und $|\mathfrak{T}f| < \aleph\} \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ = beschränktes Produkt von $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}_{|\mathfrak{M}|}\mathfrak{M}$; (dies ist nur für unendliches $\mathfrak{M}$ definiert).

$\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ = direktes Produkt von $\mathfrak{M} = \prod_{G \in \mathfrak{M}}^{\circ} G = \mathfrak{K}_{\aleph_0}\mathfrak{M}$.

Eine Gruppenklasse ist eine nicht leere Klasse von Gruppen, die mit jeder Gruppe auch die zu ihr isomorphen Gruppen enthält.

Die von einer Gruppenklasse $\mathfrak{g}$ erzeugte Varietät $V\mathfrak{g}$ ist die Klasse aller Faktoren kartesischer Produkte beliebiger Teilmengen von $\mathfrak{g}$. Das ist die kleinste $\mathfrak{g}$ enthaltende kartesisch- und faktorenabgeschlossene Gruppenklasse.

Dann heißt $\mathfrak{v}$ natürlich Varietät, wenn $\mathfrak{v} = V\mathfrak{v}$ ist.

## III. Ausartung abgeschlossener Gruppenklassen

DEFINITION 3.1.

(a) Die Menge $\Theta$ von Untergruppen ist ein *Turm*, wenn für $X, Y \in \Theta$ entweder $X \subseteq Y$ oder $Y \subset X$ gilt.

(b) Ist der Turm $\Theta$ von Untergruppen von $G$ wohlgeordnet, enthält $\Theta$ mit jeder Teilmenge deren Vereinigungsmenge und die Gruppe $G$, ist $A$ Normalteiler von $B$ falls $A, B$ Faktor von $\Theta$ ist, d.h. daß $A, B \in \Theta$

und $A \subset B$ ist und kein $X \in \Theta$ mit $A \subset X \subset B$ existiert, so ist jedes $T \in \Theta$ eine *erreichbare Untergruppe* von $G$, und $\Theta$ ist eine $T$ mit $G$ verbindende *Normalteilerfolge*. Ist $1 \in \Theta$, so heißt $\Theta$ eine *Normalteilerfolge* von $G$.

LEMMA 3.2. *Sei $\mathfrak{x}$ eine Gruppenklasse derart, daß Vereinigungen von Türmen von $\mathfrak{x}$-Normalteilern wieder $\mathfrak{x}$-Normalteiler sind. Dann sind äquivalent:*

(1) *Produkte von zwei $\mathfrak{x}$-Normalteilern sind $\mathfrak{x}$-Normalteiler.*

(2) *Produkte von beliebig vielen $\mathfrak{x}$-Normalteilern sind $\mathfrak{x}$-Normalteiler.*

(3) *Erzeugnisse von $\mathfrak{x}$-Subnormalteilern sind $\mathfrak{x}$-Gruppen.*

*Sind noch Vereinigungen von Türmen von erreichbaren $\mathfrak{x}$-Untergruppen wieder $\mathfrak{x}$-Gruppen, d.h. daß $\mathfrak{x}$ turmvererblich im Sinne von R. Baer* ([10], *Seite* 49) *ist, so ist mit* (1), (2) *und* (3) *äquivalent:*

(4) *Erzeugnisse von erreichbaren $\mathfrak{x}$-Untergruppen sind $\mathfrak{x}$-Gruppen.*

Beweis: Die Äquivalenz von (2) und (3) ohne Zusatzvoraussetzung ist in P. Hall ([15], Seite 537) enthalten. Um noch kurz die bekannte Äquivalenz von (1) und (2) herzuleiten, seien Produkte von zwei $\mathfrak{x}$-Normalteilern wieder $\mathfrak{x}$-Normalteiler, und außerdem sei die Gruppe $G$ Produkt von $\mathfrak{x}$-Normalteilern. Ferner sei $\mathfrak{X}$ die Menge aller $\mathfrak{x}$-Normalteiler von $G$. Da nach Voraussetzung Vereinigungen von Türmen von $\mathfrak{x}$-Normalteilern wieder $\mathfrak{x}$-Normalteiler sind, existiert nach dem Maximumprinzip der Mengenlehre ein maximaler $\mathfrak{x}$-Normalteiler $M$ von $G$ in $\mathfrak{X}$. Wäre $M \neq G$, so existiert, da $G$ Produkt seiner $\mathfrak{x}$-Normalteiler ist, ein $\mathfrak{x}$-Normalteiler $S$ von $G$ in $\mathfrak{X}$ derart, daß $M \subset MS \subseteq G$ ist. Weil Produkte von zwei $\mathfrak{x}$-Normalteilern $\mathfrak{x}$-Normalteiler sind, ist $MS$ ein $\mathfrak{x}$-Normalteiler, also $MS \in \mathfrak{X}$, was aber der Maximalität von $M$ widerspricht. Also ist $M = G$ eine $\mathfrak{x}$-Gruppe, und (1) ist mit (2) äquivalent. Der Beweis für die Äquivalenz von (1) und (4) ist bei R. Baer ([10], Seite 52 und 53) zu finden. Von der dort vorausgesetzten Faktorenvererblichkeit wird in diesem Fall kein Gebrauch gemacht. Damit ist Lemma 3.2 bewiesen.

DEFINITION 3.3. Ist $\mathfrak{x}$ eine Gruppenklasse, so sei $P\mathfrak{x}$ die kleinste $\mathfrak{x}$ enthaltende Gruppenklasse, die mit zwei Normalteilern auch deren Produkt enthält.

FOLGERUNG 3.4. *Sei $\mathfrak{x}$ eine Gruppenklasse und $G$ eine Gruppe, die der Maximalbedingung für $P\mathfrak{x}$-Subnormalteiler genügt. Dann sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe $G$ äquivalent:*

(1) *$G$ ist eine $P\mathfrak{x}$-Gruppe.*

(2) *$G$ wird von endlich vielen $\mathfrak{x}$-Subnormalteilern erzeugt.*

(3) *$G$ wird von seinen $\mathfrak{x}$-Subnormalteilern erzeugt.*

Beweis: Ist $\mathcal{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, so definieren wir durch Induktion die folgenden Gruppenklassen:

(0) $P_0\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$.

(i) $P_i\mathfrak{x}$ = Klasse aller Gruppen, die Produkt endlich vieler $P_{i-1}\mathfrak{x}$-Normalteiler sind $[i \in \mathcal{N}]$.

($\omega$) $P_\omega\mathfrak{x} = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} P_i\mathfrak{x}$.

Zunächst sieht man aus dieser Konstruktion, daß $P_i\mathfrak{x} \leqslant P_{i+1}\mathfrak{x}$ und $P_\omega\mathfrak{x} = P\mathfrak{x}$ ist. Ist $G$ also irgendeine $P\mathfrak{x}$-Gruppe, so gibt es ein $n \in \mathcal{N}$ derart, daß $G$ eine $P_n\mathfrak{x}$-Gruppe ist, und es folgt für jedes $i \in \mathcal{N}$ durch vollständige Induktion, daß $G$ von endlich vielen $P_{i-1}\mathfrak{x}$-Subnormalteilern und insbesondere von endlich vielen $\mathfrak{x}$-Subnormalteilern erzeugt wird. Damit folgt aus (1) ohne Zusatzvoraussetzungen für $G$ immer (2) und daraus trivialerweise auch (3).

Sei nun $G$ eine Gruppe, die (3) genügt, also von ihren $\mathfrak{x}$-Subnormalteilern erzeugt wird. Ferner sei $\mathfrak{y}$ die kleinste $\mathfrak{x}$ enthaltende Gruppenklasse, die Vereinigungen von Türmen von $\mathfrak{y}$-Subnormalteilern und Produkte zweier $\mathfrak{y}$-Normalteiler enthält. Dann folgt aus Lemma 3.2 ((3) $\rightarrow$ (1)), daß $G$ eine $\mathfrak{y}$-Gruppe ist. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}G$ die Klasse aller Gruppen, die zu Subnormalteilern von $G$ isomorph sind, so ist die Klasse $P\mathfrak{x} \cap \mathfrak{S}G$ aller $P\mathfrak{x}$-Gruppen aus $\mathfrak{S}G$ turmabgeschlossen, da nach Voraussetzung über $G$ alle Türme in $P\mathfrak{x} \cap \mathfrak{S}G$ endlich sind. Deshalb ist auch $P\mathfrak{x} \cap \mathfrak{S}G = \mathfrak{y} \cap \mathfrak{S}G$, wobei $\mathfrak{y} \cap \mathfrak{S}G$ die Klasse aller $\mathfrak{y}$-Gruppen in $\mathfrak{S}G$ ist. Da $G$, wie oben bewiesen, eine $\mathfrak{y}$-Gruppe ist und trivialerweise zu $\mathfrak{S}G$ gehört, ist $G \in \mathfrak{y} \cap \mathfrak{S}G = P\mathfrak{x} \cap \mathfrak{S}G \leqslant P\mathfrak{x}$, also $G$ eine $P\mathfrak{x}$-Gruppe, womit (1) wieder aus (3) hergeleitet ist.

DEFINITION 3.5. $G$ ist *residuell* eine $\mathfrak{x}$-Gruppe, wenn 1 der Durchschnitt aller Normalteiler $N$ von $G$ mit $G/N \in \mathfrak{x}$ ist.

HILFSSATZ 3.6. *Enthält die Gruppenklasse $\mathfrak{y}$ eine unendliche zyklische Gruppe, so sind alle freien Gruppen residuell $P\mathfrak{y}$-Gruppen.*

Beweis: Sei $F$ eine freie Gruppe endlichen Ranges und $F/^{(i)}F = N_i$. Dann ist $N_i$ endlich erzeugt und von endlicher Klasse, also nach R. Baer ([4], Zusatz 4, Seite 276–277) noethersch. Insbesondere ist die Maximalbedingung für Subnormalteiler erfüllt. Da $N_i$ nilpotent und noethersch ist, sind alle Untergruppen subnormal. Weil $N_i$ von seinen unendlich zyklischen Untergruppen, also auch von endlich vielen unendlich zyklischen Subnormalteilern erzeugt wird, folgt aus der Voraussetzung und der Folgerung 3.4, daß $N_i$ eine $P\mathfrak{y}$-Gruppe ist.

Da nach einem bekannten Satz von Magnus — vgl. W. Specht ([20], Satz 21, Seite 211) — $\bigcap_{i \in \mathcal{N}} {}^{(i)}F = 1$ ist, sind alle freien Gruppen endlichen Ranges residuell $P\mathfrak{y}$-Gruppen. Nun sind alle freien Gruppen residuell frei von endlichem Range. Somit sind alle freien Gruppen residuell $P\mathfrak{y}$-Gruppen.

HILFSSATZ 3.7. *Jede endliche, auflösbare Gruppe $G$ ist in einer endlichen, auflösbaren Gruppe $H$ mit folgenden Eigenschaften enthalten:*

(a) *$H$ wird von seinen Elementen von Primzahlordnung erzeugt.*

(b) *Ist $p$ eine Primzahl, so ist*

$$p/o(H) \text{ dann und nur dann, wenn } p/o(G).$$

Anmerkung: Ist $\mathfrak{x}$ die aus den zyklischen Gruppen von Primzahlordnung $p \neq 1$ und 1 bestehende untergruppenabgeschlossene Gruppenklasse, so ist $P\mathfrak{x}$ nicht untergruppenabgeschlossen, wie Hilfssatz 3.7 zeigt. Hiernach sind nämlich zyklische Gruppen der Ordnung $p^2$ Untergruppen von $P\mathfrak{x}$-Gruppen, gehören jedoch nicht zu $\mathfrak{x}$ und zu $P\mathfrak{x}$. Das beleuchtet den wiederholten Untergruppenabschluß der Gruppenklassen im Satz 3.8.

Beweis: Sei $G$ eine endliche, auflösbare Gruppe. Dann besitzt $G$ eine endliche Folge von Untergruppen $N_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ mit den folgenden Eigenschaften (vgl. etwa M. Hall ([13], Theorem 9.2.3; Seite 139)):

(1) $N_0 = 1$, $N_n = G$.

(2) $N_i$ ist Normalteiler von $N_{i+1}$ für $0 \leqslant i < n$.

(3) $N_{i+1}/N_i$ ist eine zyklische Gruppe $Z(p_i)$ von Primzahlordnung $p_i$.

Ferner definieren wir durch vollständige Induktion:

(1) $K_0 = 1$.

(2) $K_{i+1} = K_i \wr Z(p_i)$ ist das Kranzprodukt von $K_i$ mit $Z(p_i)$.

Zur Definition des Kranzproduktes vgl. etwa M. Hall ([13], Seite 81). Zunächst sieht man durch vollständige Induktion, daß jedes $K_i$ auflösbar der Stufe $i$ und also auch $H = K_n$ auflösbar (der Stufe $n$) ist. Natürlich ist jedes $K_i$ und damit $K_n = H$ endlich. Ist $E$ eine Erweiterung von $N$ durch $T$, so ist $E$ nach Krasner und Kaloujnine [17] einer Untergruppe des Kranzproduktes $N \wr T$ isomorph. Damit folgt durch vollständige Induktion nach der Folgenlänge $i$, daß $N_i$ einer Untergruppe von $K_i$ und also $G$ einer Untergruppe von $K_n = H$ isomorph ist. Ist $K_{i+1} = K_i \wr Z(p_i)$, so werde $K_i$ nach Induktionsannahme von der Menge $\mathfrak{B}$ seiner Elemente von Primzahlordnung $p_k$ für $0 \leqslant k < i$ erzeugt. Als zyklische Untergruppe der Ordnung $p_i$ besitzt auch $Z(p_i)$ ein erzeugendes Element der Ordnung $p_i$, das dann zusammen mit $\mathfrak{B}$ ganz $K_{i+1}$ erzeugt. Also wird $K_n = H$ von den Elementen von Primzahlordnung $p_i$ für $0 \leqslant i < n$ erzeugt. Daraus folgt auch, daß die $o(H)$ teilenden Primzahlen $o(G)$ teilen. Die Umkehrung von (b) ist trivial, da $G$ Untergruppe von $H$ ist.

Im folgenden Satz benutzen wir zur Abkürzung die P. Hallsche Operatorenschreibweise. Dabei sei:

$U\mathfrak{x}$ = Klasse aller Untergruppen von $\mathfrak{x}$.

$E\mathfrak{x}$ = Klasse aller epimorphen Bilder von $\mathfrak{x}$.

$R\mathfrak{x}$ = Klasse aller residuell $\mathfrak{x}$-Gruppen.

$F\mathfrak{x}$ = Klasse aller freien Produkte von $\mathfrak{x}$-Gruppen.

Sind $X$ und $Y$ zwei solche Operatoren, so sei $XY\mathfrak{x} = X(Y\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{x} \leqslant X\mathfrak{x} = XX\mathfrak{x} = X^2\mathfrak{x}$.

SATZ 3.8. *Ist* $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{t}$, *so ist*

(0) $ERUPU\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

(1) $UPRUPU\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

(2) $ERERPER\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

(3) $EUF\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

(4) $UPUF\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

(5) $ERF\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

Beweis: Die Klasse aller Untergruppen von $\mathfrak{x}$, die Gruppenklasse $U\mathfrak{x}$, enthält eine von 1 verschiedene, zyklische Gruppe von Primzahlordnung $p$ oder eine unendliche, zyklische Gruppe. Im ersten Fall folgt aus Folgerung 3.4 zusammen mit Hilfssatz 3.7, daß alle endlichen $p$-Gruppen Untergruppen von $PU\mathfrak{x}$-Gruppen sind, da ja alle Untergruppen endlicher $p$-Gruppen Subnormalteiler sind. Also sind alle endlichen $p$-Gruppen $UPU\mathfrak{x}$-Gruppen. Da aber nach W. Specht ([20], Seite 212) freie Gruppen residuell endliche $p$-Gruppen sind, sind sie auch $RUPU\mathfrak{x}$-Gruppen. Im zweiten Fall sind alle freien Gruppen nach Hilfssatz 3.6 sogar $RPU\mathfrak{x}$-Gruppen, insbesondere also $RUPU\mathfrak{x}$-Gruppen. Wir haben gezeigt:

(6) Alle freien Gruppen sind $RUPU\mathfrak{x}$-Gruppen.

Dann ist aber nach dem bekannten Dyckschen Satz

(0) $ERUPU\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

Nach P. Hall und B. Hartley ([16], Lemma 13, Seite 25) ist jede Gruppe Untergruppe eines Produktes von zwei freien Normalteilern. Daher sind alle Gruppen $UPRUPU\mathfrak{x}$-Gruppen, und (1) ist somit bewiesen. Nach Kogalowski, vgl. H. Neumann ([19], Seite 17), gilt für jede Gruppenklasse $\mathfrak{k}$, daß

(7) $U\mathfrak{k} \leqslant ER\mathfrak{k}$

ist. Daher ist

(8) $UPU\mathfrak{x} \leqslant ERPER\mathfrak{x}$

und $RUPU\mathfrak{x}$ in $RERPER\mathfrak{x}$ enthalten. Wegen (6) sind dann alle freien Gruppen $RERPER\mathfrak{x}$-Gruppen. Da aber alle Gruppen epimorphe Bilder freier Gruppen sind, ist $\mathfrak{u} = ERERPER\mathfrak{x}$ und somit auch (2) bewiesen.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß alle freien Gruppen Untergruppen von freien Produkten von $\mathfrak{x}$-Gruppen sind, also folgendes gilt:

(9) Alle freien Gruppen sind $UF\mathfrak{x}$-Gruppen.

Da $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{t}$, gibt es eine $\mathfrak{x}$-Gruppe $X \neq 1$. Damit bilden wir $G = X*X$, das freie Produkt von $X$ mit $X$. Weil $X \neq 1$, enthält $G$ ein Element $g$ der Ordnung 0. Ist $F$ eine freie Gruppe vom Range $\mathfrak{r}$, so bilden wir das

freie Produkt $P = \Pi^* \mathfrak{M}$ von $\mathfrak{r}$ zu $G$ isomorphen Gruppen $Y \in \mathfrak{M}$. Wenn $\tau$ ein fester Isomorphismus von $G$ auf $Y \in \mathfrak{M}$ ist, so sei $g(Y) = g^\tau \in Y$. Dann ist die Menge $\mathfrak{E} = \langle g(Y) / Y \in \mathfrak{M} \rangle$ ein freies Erzeugendensystem vom Range $\mathfrak{r}$ einer zu $F$ isomorphen Untergruppe von $P$. Da $P$ ein freies Produkt von $2\mathfrak{r}$ Gruppen $X \in \mathfrak{x}$ ist, sind nach dem oben Bewiesenen alle Gruppen epimorphe Bilder von Untergruppen freier Produkte aus $\mathfrak{x}$-Gruppen, d.h. es ist $EUF\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$, womit (4) bewiesen ist.

Ebenso folgt wieder nach P. Hall und B. Hartley ([16], Lemma 13, Seite 25), daß $UPUF\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$ ist.

Da $ERF\mathfrak{x} = E(ERF\mathfrak{x})$ ist und $ERF\mathfrak{x}$ nach (7) die Gruppenklasse $UF\mathfrak{x}$ enthält, ist $EUF\mathfrak{x}$ eine Teilklasse von $ERF\mathfrak{x}$. Da aber $EUF\mathfrak{x}$ nach (3) schon die universelle Gruppenklasse ist, ist auch $ERF\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$, also (5) bewiesen.

FOLGERUNG 3.9. *Die folgenden Eigenschaften einer Gruppenklasse* $\mathfrak{x}$ *sind äquivalent*:

(1) *Es ist* $\mathfrak{x} = \mathfrak{t}$ *oder* $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$.

(2)
- (a) *Untergruppen von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*
- (b) *Kartesische Produkte von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*
- (c) *Produkte von zwei* $\mathfrak{x}$*-Normalteilern sind wieder* $\mathfrak{x}$*-Normalteiler.*

(3)
- (a) *Epimorphe Bilder von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*
- (b) $\mathfrak{x}$ *ist residuell abgeschlossen.*
- (c) *Produkte von zwei* $\mathfrak{x}$*-Normalteilern sind wieder* $\mathfrak{x}$*-Normalteiler.*

(4)
- (a) *Faktoren von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*
- (b) *Freie Produkte von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind wieder* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*

(5)
- (a) *Untergruppen von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*
- (b) *Produkte von zwei* $\mathfrak{x}$*-Normalteilern sind wieder* $\mathfrak{x}$*-Normalteiler.*
- (c) *Freie Produkte von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind wieder* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*

(6)
- (a) *Epimorphe Bilder von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*
- (b) $\mathfrak{x}$ *ist residuell abgeschlossen.*
- (c) *Freie Produkte von* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind wieder* $\mathfrak{x}$*-Gruppen.*

Beweis: Da für eine untergruppenabgeschlossene Gruppenklasse Residualität und kartesische Abgeschlossenheit äquivalent sind, ergibt sich Folgerung 3.9 unmittelbar aus Satz 3.8.

Anmerkung: Setzt man für die Gruppenklasse $\mathfrak{x}$ in (2) der Folgerung 3.9 noch Epimorphismenvererblichkeit voraus, so ist $\mathfrak{x}$ eine Varietät, und (2) verschärft also eine Aussage von R. Baer ([7], Satz 5.1, Seite 205).

Im folgenden Kapitel werden wir Gruppenklassen $\mathfrak{x}$ angeben, die untergruppen-, residuell- und sogar erweiterungsabgeschlossen, aber trotzdem $\neq \mathfrak{u}$ und $\neq \mathfrak{t}$ sind. Daher kann in der Folgerung 3.9 auf (2c) nicht verzichtet werden, noch reicht es aus, die starke Erweiterungsabgeschlossenheit dafür zu fordern.

Die Klasse aller unendlichen Gruppen beweist die Unentbehrlichkeit der Untergruppenvererblichkeit in (2), und die Klasse aller endlichen Gruppen zeigt, daß man nicht auf die Residualität der Gruppenklasse in (2) verzichten kann. Also sind alle Bedingungen von (2) unentbehrlich. Ähnlich einfache Beispiele zeigen auch, daß alle anderen Bedingungen unentbehrlich sind.

## IV. Allgemeine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihen

DEFINITION 4.1. Die Menge $\mathfrak{N}$ von Normalteilern von $G$ ist eine *Normalreihe* von $G$, wenn

(a) 1 und $G$ in $\mathfrak{N}$ liegen,

(b) $X \subseteq Y$ oder $Y \subset X$ für jedes Paar $X, Y$ aus $\mathfrak{N}$ gilt,

(c) $\mathfrak{N}$ Durchschnitte und Vereinigungen ihrer Teilmengen enthält.

Wegen (b) ist $\mathfrak{N}$ eine durch die Enthaltenseinbeziehung geordnete Menge. Ist $\Lambda$ der Ordnungstyp von $\mathfrak{N}$, so wollen wir $\mathfrak{N}$ auch $\Lambda$-Normalreihe nennen.

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei Normalreihen von $G$, so ist $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$, wenn $\mathfrak{N}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ ist. Maximale Normalreihen von $G$ nennen wir Hauptreihen von $G$.

Das Paar $A$, $B$ von Normalteilern aus $\mathfrak{N}$ definiert einen *Faktor von* $\mathfrak{N}$, wenn

(d) $A \subset B$ und $\Lambda$ der einzige $A \subseteq X \subset B$ erfüllende Normalteiler $X$ aus $\mathfrak{N}$ ist, und der von diesem Paar definierte Faktor ist $B/A$.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ gruppentheoretische Eigenschaften, ist $N$ ein Normalteiler von $G$, so ist $N$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G$, wenn $N$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und die von $G$ in $N$ induzierte Automorphismengruppe $[\cong G/\mathfrak{c}N]$ eine $\mathfrak{a}$-Gruppe ist.

Eine Normalreihe $\mathfrak{N}$ ist eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalreihe von $G$, wenn $\mathfrak{N}$ noch der folgenden Bedingung genügt:

(e) Definiert $A$, $B$ einen Faktor von $\mathfrak{N}$, so ist $B/A$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/A$.

Maximale $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalreihen von $G$ sind $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Hauptreihen von $G$.

Ist $\Lambda$ absteigend wohlgeordnet, so ist $\mathfrak{N}$ eine absteigende $\beta^*$-Reihe, wenn $\Lambda$ ordnungsantiisomorph der Menge aller Ordinalzahlen $\leqslant \beta$ ist.

Ist $\Lambda$ aufsteigend wohlgeordnet, so ist $\mathfrak{N}$ eine aufsteigende $\beta$-Reihe, wenn $\Lambda$ ordnungsisomorph der Menge aller Ordinalzahlen $\leqslant \beta$ ist.

Wir werden nicht verbieten, daß mehrere Elemente aus $\mathfrak{N}$ gleich sind! Von der folgenden Bemerkung werden wir häufiger Gebrauch machen:

$\mathfrak{N}$ ist genau dann eine absteigende Reihe, wenn jede nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{N}$ ein maximales Element besitzt.

$\mathfrak{N}$ ist genau dann eine aufsteigende Reihe, wenn jede nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{N}$ ein minimales Element besitzt.

DEFINITION 4.2.

$G$ ist eine Hypo-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe, wenn jeder von 1 verschiedene Normalteiler $N$ von $G$ eine echte in $G$ normale Untergruppe $W$ derart besitzt, daß $N/W$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/W$ ist.

$G$ ist eine Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von $G$ einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler besitzt.

Der Begriff der Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe wurde von R. Baer eingeführt. Hierzu vgl. R. Baer ([5], Seite 358–359) und R. Baer ([7], Seite 17).

SATZ 4.3. *Sei* $\mathfrak{a}$ *eine gruppentheoretische Eigenschaft, die sich auf epimorphe Bilder und* $\mathfrak{e}$ *eine Eigenschaft, die sich auf Normalteiler vererbt. Dann sind für eine Gruppe* $G$ *äquivalent:*

(1) $G$ *besitzt eine absteigende* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Reihe.*

(2) $G$ *ist eine Hypo-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Gruppe.*

SATZ 4.4. *Sei* $\mathfrak{a}$ *eine gruppentheoretische Eigenschaft, die sich auf epimorphe Bilder und* $\mathfrak{e}$ *eine Eigenschaft, die sich auch auf epimorphe Bilder vererbt. Dann sind für eine Gruppe* $G$ *äquivalent:*

(1) $G$ *besitzt eine aufsteigende* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Reihe.*

(2) $G$ *ist eine Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Gruppe.*

Der Beweis dieser beiden Sätze verläuft nach einem bekannten Rezept, vgl. dazu W. Specht ([20], Satz 7, Seite 319).

Anmerkung zu den Sätzen 4.3 und 4.4: Auf die Epimorphismenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$ im Satz 4.4 kann nicht verzichtet werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

Ist $\mathfrak{e}$ die Eigenschaft „unendlich zu sein" und $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$, so besitzt eine unendliche Gruppe $G$ die $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe 1, $G$. Jedoch haben endliche, epimorphe Bilder von $G$ keinen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler, da dieser ja unendlich sein müßte. Also sind (1) und (2) dann nicht äquivalent. Ebensowenig kann im Satz 4.4 auf die Epimorphismenvererblichkeit von $\mathfrak{a}$ verzichtet werden, wie die Eigenschaft $\mathfrak{a}$ = Freiheit, $\mathfrak{e} = \mathfrak{u}$ zeigt:

Freie Gruppen $F$ besitzen nämlich die $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe 1, $F$, während es einfache, von 1 verschiedene, epimorphe Bilder freier Gruppen gibt, die dann keinen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler besitzen.

Ohne die Voraussetzung, daß sich $\mathfrak{e}$ auf Normalteiler vererbt, ist auch der Satz 4.3 falsch. Wir setzen $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{e}$ = Klasse aller unendlichen Gruppen. Dann besitzen unendliche Gruppen $G$ natürlich die $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe 1, $G$. Es gibt aber endliche, von 1 verschiedene Normalteiler unendlicher Gruppen, deren Faktoren dann nur endliche Automorphismengruppen besitzen können. Also ist (2) nicht erfüllt. Ebenso kann auch auf die Epimorphismenvererblichkeit von $\mathfrak{a}$ im Satz 4.3 nicht verzichtet werden. Das zeigen die Eigenschaften $\mathfrak{a}$ = unendlich zu sein und $\mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

Selbstverständlich folgt in den Sätzen 4.3 und 4.4 immer — auch ohne Zusatzbedingungen für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ — aus (2) sogleich (1). Die Zusatzbedingungen sind also nur für die Umkehrung unentbehrlich.

Beweis zu Satz 4.3: Sei $\mathfrak{N}$ eine absteigende $\mathfrak{e}^a$-Reihe von $G$ und $1 \neq N$ ein Normalteiler von $G$.

Ist $\mathfrak{T} = \langle T / T \in \mathfrak{N}$ und $T \cap N \subset N \rangle$, so ist 1 aus $\mathfrak{T}$, und $\mathfrak{T}$ besitzt als nicht leere Teilmenge einer absteigend wohlgeordneten Menge $\mathfrak{N}$ ein maximales Element $A$. Gäbe es zu $A$ in $\mathfrak{N}$ keinen direkten Nachfolger, so wäre $A = \bigcap S$ mit $S \in \mathfrak{N}$ und $S \supset A$. Wegen der Maximalität von $A$ ist $S$ nicht aus $\mathfrak{T}$, wenn $S \supset A$ ist. Folglich wäre $S \supseteq N$ für alle $S \in \mathfrak{N}$ mit $S \supset A$, daher auch $A = \bigcap S \supseteq N$ und $A \cap N = N$. Da $A \in \mathfrak{T}$, ist aber $A \cap N \neq N$. Wegen dieses Widerspruches gibt es einen Faktor $A, B$ von $\mathfrak{N}$ derart, daß $A \cap N \subset N \subseteq B$ ist. Also ist $N/(A \cap N)$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von $G/(A \cap N)$. Da $N/(A \cap N) \cong N \cdot A/A$, ist $N \cdot A/A$ Normalteiler des $\mathfrak{e}^a$-Normalteilers $B/A$ von $G/A$. Die von $G/A$ in $N \cdot A/A \subseteq B/A$ induzierte Automorphismengruppe ist ein epimorphes Bild der von $G/A$ in $B/A$ induzierten Automorphismengruppe. Daher ist $N/(A \cap N)$ ein von 1 verschiedener $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/(A \cap N)$, und $G$ ist eine Hypo-$\mathfrak{e}^a$-Gruppe.

Ist umgekehrt (2) vorausgesetzt, so beweisen wir die Existenz einer absteigenden $\mathfrak{e}^a$-Reihe von $G$. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Normalteiler $M$ von $G$ derart, daß $G/M$ eine absteigende $\mathfrak{e}^a$-Reihe besitzt.

Beweis zu Satz 4.4: Sei $\mathfrak{N}$ eine aufsteigende $\mathfrak{e}^a$-Reihe von $G$ und $G/N$ ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild von $G$.

Ist $\mathfrak{T} = \langle T / T \in \mathfrak{N}$ und $T \cdot N \supset N \rangle$, so ist $G$ aus $\mathfrak{T}$, und $\mathfrak{T}$ besitzt als nicht leere Teilmenge einer (aufsteigend) wohlgeordneten Menge $\mathfrak{N}$ ein minimales Element $A$. Gäbe es zu $A$ in $\mathfrak{N}$ keinen direkten Vorgänger, so wäre $A = \bigcup S$ mit $S \in \mathfrak{N}$ und $S \subset A$. Wegen der Minimalität von $A$ ist $S$ nicht aus $\mathfrak{T}$, wenn $S \subset A$ ist. Folglich wäre $S \subseteq N$ für alle $S \in \mathfrak{N}$ mit $S \subset A$, daher auch $A = \bigcup S \supseteq N$ und $A \cdot N = N$. Da aber $A \in \mathfrak{T}$, ist $A \cdot N \neq N$. Wegen dieses Widerspruches gibt es einen Faktor $B, A$ von $\mathfrak{N}$ derart, daß $B \subseteq N \subset A \cdot N$ ist. Also ist $A \cdot N/N$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von $G/N$. Da $B \subseteq N$, ist $A \cdot N/N$ ein epimorphes Bild des $\mathfrak{e}^a$-Normalteilers $B/A$ von $G/A$. Die von $G/N$ in $A \cdot N/N$ induzierte Automorphismengruppe ist ein epimorphes Bild der von $G/B$ in $A/B$ induzierten Automorphismengruppe. Daher ist $A \cdot N/N$ ein von 1 verschiedener $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/N$, und $G$ ist eine Hyper-$\mathfrak{e}^a$-Gruppe.

Ist umgekehrt (2) vorausgesetzt, so beweisen wir die Existenz einer aufsteigenden $\mathfrak{e}^a$-Reihe von $G$. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Normalteiler $M$ von $G$ derart, daß es eine aufsteigende $\mathfrak{e}$-Reihe $\mathfrak{N}$ von $M$ mit folgender Eigenschaft gibt:

(a) Alle Elemente von $\mathfrak{N}$ sind Normalteiler von $G$.

(b) Faktoren $A/B$ von $\mathfrak{N}$ sind $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/B$.

Es ist $G$ aus $\mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M}$ nicht leer, und da die Normalteiler einen abgeschlossenen Verband bilden, sind auch Durchschnitte von (absteigenden) Türmen von Normalteilern aus $\mathfrak{M}$ wieder Normalteiler in $\mathfrak{M}$. Also gibt es nach dem Maximumprinzip der Mengenlehre ein minimales $M$ aus $\mathfrak{M}$. Wäre $M \neq 1$, so folgt aus (2) die Existenz eines Normalteilers $W$ von $G$ derart, daß $W \subset M$ und $M/W$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/W$ ist. Folglich besitzt auch $G/W$ eine absteigende $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe.

Also gehört $W$ zu $\mathfrak{M}$, was der Minimalität von $M$ widerspricht. Daher ist $1 = M \in \mathfrak{M}$, und es folgt aus der Definition von $\mathfrak{M}$, daß $G$ eine absteigende $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe besitzt, womit aus (2) die Bedingung (1) wieder hergeleitet ist. Q.E.D.

Es ist 1 aus $\mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M}$ nicht leer, und da die Normalteiler einen abgeschlossenen Verband bilden, sind auch Vereinigungen von (aufsteigenden) Türmen von Normalteilern aus $\mathfrak{M}$ wieder Normalteiler in $\mathfrak{M}$. Also gibt es nach dem Maximumprinzip der Mengenlehre ein maximales $M$ aus $\mathfrak{M}$. Wäre $M \neq G$, so folgt aus (2) die Existenz eines Normalteilers $W$ von $G$ derart, daß $M \subsetneq W$ und $W/M$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/M$ ist. Folglich besitzt auch $W$ eine aufsteigende $\mathfrak{e}$-Reihe von Normalteilern von $G$ in deren Faktoren $G$ $\mathfrak{a}$-Automorphismengruppen induziert.

Also gehört $W$ zu $\mathfrak{M}$, was der Maximalität von $M$ widerspricht. Daher ist $G = M \in \mathfrak{M}$, und es folgt aus der Definition von $\mathfrak{M}$, das $G$ eine aufsteigende $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe besitzt, womit aus (2) die Bedingung (1) wieder hergeleitet ist. Q.E.D.

LEMMA 4.5. *Vererbe sich $\mathfrak{a}$ auf Faktoren und $\mathfrak{e}$ auf Untergruppen. Ist $\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$ und $U$ eine Untergruppe von $G$, so ist $\mathfrak{N} \cap U = \langle N \cap U / N \in \mathfrak{N} \rangle$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $U$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$ und $U$ eine Untergruppe von $G$. Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{N} \cap U = \langle N \cap U / N \in \mathfrak{N} \rangle$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $U$ ist. Ist $U \cap M \supset U \cap N$ ein (echter) Faktor von $\mathfrak{N} \cap U$, so sei $R = \bigcap T$ mit $U \cap T = U \cap M$ und $T \in \mathfrak{N}$ sowie $S = \bigcup T$ mit $U \cap T = U \cap N$ und $T \in \mathfrak{N}$. Dann ist $(U \cap M)/(U \cap N)$ nach dem dritten Isomorphiesatz, vgl. W. Specht ([20], Satz 6, Seite 71), einer Untergruppe von $R/S$ isomorph. Da aber $R$, $S$ ein Faktor von $\mathfrak{N}$, also $R/S$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/S$ ist, ist $(U \cap M)/(U \cap N)$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $U/(U \cap N)$ und daher $\mathfrak{N} \cap U$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $U$.

LEMMA 4.6. *Vererbe sich $\mathfrak{a}$ auf Faktoren und $\mathfrak{e}$ auf Untergruppen. Dann ist die Klasse aller Gruppen mit (absteigender) $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe residuell.*

Anmerkung: Lemma 4.6 bleibt ohne das Wort „absteigend" richtig.

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Gruppen mit (absteigender) $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe. Sei $\mathfrak{M}$ durch $\leqslant$ wohlgeordnet. Ist $G = \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$, so wollen wir zeigen, daß

$G$ wieder eine (absteigende) $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe besitzt. Sei $X \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{X}$ eine (absteigende) $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $X$ sowie $N \in \mathfrak{X}$. Dann bilden wir die Menge $\mathfrak{M}(X)$ aller $Y \in \mathfrak{M}$ mit $Y > X$ und damit $K(X, N) = N \otimes \mathfrak{K}(\mathfrak{M}(X))$. Diese $K(X, N)$ lassen sich kanonisch in $G = \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ einbetten und bilden eine (absteigende) $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$. Also ist die Klasse aller Gruppen mit (absteigender) $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe kartesisch abgeschlossen. Da sie nach Lemma 4.5 auch untergruppenabgeschlossen ist, ist sie somit auch residuell.

Aus Lemma 4.5, Satz 4.3 und Satz 4.4 folgt dann über die Untergruppenvererblichkeit von Hypo-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$ und Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$:

FOLGERUNG 4.7. *Hypo-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$ vererbt sich auf Untergruppen, wenn sich $\mathfrak{a}$ auf Faktoren und $\mathfrak{e}$ auf Untergruppen vererbt.*

FOLGERUNG 4.8. *Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$ vererbt sich auf Untergruppen, wenn sich $\mathfrak{a}$ auf Faktoren und $\mathfrak{e}$ auf Untergruppen vererbt.*

Epimorphe Bilder von Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen sind per definitonem wieder Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen, so daß sich Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$ dann auch auf Faktoren vererbt. Anders ist es für die Klasse der Hypo-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen (Beispiele vgl. Anmerkung zur Folgerung 4.9). Daher fordern wir im nächsten Satz (Bedingung 5) noch Hypo-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$ für alle epimorphen Bilder. Parallel beweisen wir auch einen Satz für Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen mit. Die naheliegende sich aus (2) der Folgerungen 4.9 und 4.10 ergebende umfassende Bedingung wird im Satz 4.13 genauer untersucht werden und ist dort als Bedingung (3) zu finden.

FOLGERUNG 4.9. *Sei $\mathfrak{a}$ eine epimorphismenvererbliche Eigenschaft, und vererbe sich $\mathfrak{e}$ auf epimorphe Bilder von Normalteilern. Dann sind für eine Gruppe $G$ äquivalent:*

(1) *Jede absteigende Reihe von $G$ läßt sich zu einer absteigenden $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$ verfeinern.*

(2) *Sind $N \subset M$ Normalteiler von $G$, so existiert ein Normalteiler $W$ von $G$ mit $M \supset W \supseteq N$ derart, daß $M/W$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/W$ ist.*

(3) *Jede absteigende Reihe jedes epimorphen Bildes von $G$ läßt sich zu einer absteigenden $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe verfeinern.*

(4) *Jedes epimorphe Bild von $G$ besitzt eine absteigende $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe.*

FOLGERUNG 4.10. *Sei $\mathfrak{a}$ eine epimorphismenvererbliche Eigenschaft, und vererbe sich $\mathfrak{e}$ auf epimorphe Bilder von Normalteilern. Dann sind für eine Gruppe $G$ äquivalent:*

(1) *Jede aufsteigende Reihe von $G$ läßt sich zu einer aufsteigenden $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$ verfeinern.*

(2) *Sind $N \subset M$ Normalteiler von $G$, so existiert ein Normalteiler $W$ von $G$ mit $[M] \supseteq W \supset N$ derart, daß $W/N$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/N$ ist.*

(3) *Jede aufsteigende Reihe jedes epimorphen Bildes von $G$ läßt sich zu einer aufsteigenden $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe verfeinern.*

(4) *Jedes epimorphe Bild von $G$ besitzt eine aufsteigende $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe.*



BU W

(5) *Jedes epimorphe Bild von $G$ ist eine Hypo-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe.*

Beweis: Sind $N \subset M$ Normalteiler von $G$, so ist $1, N, M, G$ eine absteigende Reihe von $G$, die sich nach (1) zu einer absteigenden $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe $\mathfrak{N}$ von $G$ verfeinern läßt. Da $\mathfrak{N}$ absteigend wohlgeordnet ist, besitzt jedes Element $R \neq 1$ von $\mathfrak{N}$ einen direkten Vorgänger. Da $M \neq 1$, existiert in dieser Reihe $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler $W$ von $G$ mit $M \supset W \supseteq N$ derart, daß $M/W$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/W$ ist. Daher folgt (2) aus (1).

Sei $H$ ein epimorphes Bild von $G$ und $\mathfrak{N}$ eine absteigende Reihe von $H$. Dann sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Normalteiler $N$ von $\mathfrak{N}$ derart, daß sich $\mathfrak{T}(N) = \langle T/N;\ T \in \mathfrak{N}$ und $T \supseteq N\rangle$ zu einer absteigenden $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $H/N$ verfeinern läßt.

Es ist $H$ aus $\mathfrak{M}$, also ist $\mathfrak{M}$ nicht leer. Ist $\Theta$ ein absteigender Turm aus $\mathfrak{M}$, so gehört auch $\bigcap_{\Theta} T$ zu $\mathfrak{M}$. Daher besitzt $\mathfrak{M}$ nach dem Maximumprinzip der Mengenlehre ein minimales Element $L$. Wäre $L \neq 1$ und ist $H = G/N$, $L = M/N$, so existiert zu $N \subset M$ nach (2) ein Normalteiler $W$ von $G$ mit $M \supset W \supseteq N$ derart, daß $M/W \cong L/(W/N)$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/W$ ist. Also gehört $W/N$ zu $\mathfrak{M}$, was aber der Minimalität von $L$ widerspricht. Daher ist $L = 1$ und (3) aus (2) hergeleitet.

(5) *Jedes epimorphe Bild von $G$ ist eine Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe.*

(6) *$G$ besitzt eine aufsteigende $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe.*

(7) *$G$ ist eine Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe.*

Beweis: Sind $N \subset M$ Normalteiler von $G$, so ist $1, N, M, G$ eine aufsteigende Reihe von $G$, die sich nach (1) zu einer aufsteigenden $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe $\mathfrak{N}$ von $G$ verfeinern läßt. Da $\mathfrak{N}$ aufsteigend wohlgeordnet ist, besitzt jedes Element $R \neq G$ von $\mathfrak{N}$ einen direkten Nachfolger. Da $N \neq G$, existiert in dieser Reihe $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler $W$ von $G$ mit $M \supseteq W \supset N$ derart, daß $W/N$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/N$ ist. Daher folgt (2) aus (1).

Sei $H$ ein epimorphes Bild von $G$ und $\mathfrak{N}$ eine aufsteigende Reihe von $H$. Dann sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Normalteiler $N$ von $\mathfrak{N}$ derart, daß sich $\mathfrak{T}(N) = \langle T;\ T \in \mathfrak{N}$ und $T \subseteq N\rangle$ zu einer aufsteigenden $\mathfrak{e}$-Reihe von $N$ verfeinern läßt, deren Elemente Normalteiler von $H$ sind und in deren Faktoren $H$ $\mathfrak{a}$-Automorphismengruppen induziert.

Es ist 1 aus $\mathfrak{M}$, also ist $\mathfrak{M}$ nicht leer. Ist $\Theta$ ein aufsteigender Turm aus $\mathfrak{M}$, so gehört auch $\bigcup_{\Theta} T$ zu $\mathfrak{M}$. Daher besitzt $\mathfrak{M}$ nach dem Maximumprinzip der Mengenlehre ein maximales Element $L$. Wäre $L \neq H$ und ist $H = G/N$, $L = M/N$, so existiert zu $M \subset G$ nach (2) ein Normalteiler $W$ von $G$ mit $G \supseteq W \supset M$ derart, daß $W/M$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/M$ ist. Also gehört $W/N$ zu $\mathfrak{M}$, was aber der Maximalität von $L$ widerspricht. Daher ist $L = H$ und (3) aus (2) hergeleitet.

(1) ist eine Abschwächung von (3). Also sind (1), (2) und (3) äquivalent.

(4) ist ebenfalls eine Abschwächung von (3), da ja $H$ z.B. die Normalreihe von 1, $H$ besitzt.

Aus (4) folgt mit Anwendung von Satz 4.3 auch (5).

Seien $N \subset M$ Normalteiler von $G$. Dann ist $G/N$ wegen (5) eine Hypo-$\mathfrak{e}^a$-Gruppe, und nach Definition 4.2 besitzt $1 \neq M/N$ eine echte in $G/N$ normale Untergruppe $W/N$ mit $M \supset W \supseteq N$ derart, daß $M/W$ $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/W$ ist. Daher ist (3) schon bewiesen. Also sind alle 5 Bedingungen äquivalent.

Anmerkung: Weitere Bedingungen

(6) $G$ besitzt neie absteigende $\mathfrak{e}^a$-Reihe.

(7) $G$ ist eine Hypo-$\mathfrak{e}^a$-Gruppe.

wie in Folgerung 4.10 können in Folgerung 4.9 nicht richtig sein, da z.B. freie Gruppen hypozentral, also Hypo-$\mathfrak{u}^t$-Gruppen sind, während viele ihrer epimorphen Bilder diese Eigenschaft nicht haben.

(1) ist eine Abschwächung von (3). Also sind (1), (2) und (3) äquivalent.

(4) ist ebenfalls eine Abschwächung von (3), da ja $H$ z.B. die Normalreihe 1, $H$ besitzt.

Aus (4) folgt mit Anwendung von Satz 4.4 auch (5).

Mit Satz 4.4 folgen aus (5) durch weitere Abschwächung (6) und (7).

Um (3) aus (6) und (7) herzuleiten, müssen wir für einen Normalteiler $B = M/N \neq 1$ von $H = G/N$ zeigen, daß es einen $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler $C = R/N$ von $H$ mit $1 \neq C \subseteq B$ gibt. Dazu sei $\mathfrak{N}$ eine nach (6) oder (7) existierende aufsteigende $\mathfrak{e}^a$-Reihe von $H$. Dann betrachten wir $\mathfrak{T} = \langle N/N \in \mathfrak{N}, N \cap B \neq 1 \rangle$. Weil $H \in \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ Teilmenge der wohlgeordneten Menge $\mathfrak{N}$ ist, gibt es ein minimales Element $M$ in $\mathfrak{T}$. Gäbe es zu $M$ keinen direkten Vorgänger $K$ in $\mathfrak{N}$, so wäre $M = \bigcup T$ mit $T \in \mathfrak{N}$ und $T \cap B = 1$. Daher folgt auch $M \cap B = (\bigcup T) \cap B = \bigcup (T \cap B) = 1$, also ist $M \notin \mathfrak{T}$, was ein Widerspruch ist. Damit existiert der direkte Vorgänger $K$ von $M$ in $\mathfrak{N}$. Weil $K \notin \mathfrak{T}$, ist $K \cap B = 1$. Folglich ist $1 \neq (M \cap B)/(K \cap B) = (M \cap B)$ epimorphes Bild eines Normalteilers von $M/K$, also ist $1 \neq (M \cap B) \subseteq B$ ein $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $H$, womit (3) bewiesen ist.

Daher sind alle 7 Bedingungen äquivalent.

LEMMA 4.11. *Jede Normalreihe von $G$ ist in einer Hauptreihe von $G$ enthalten.*

Anmerkung: Ein ähnlicher Satz, jedoch für Normalfolgen (zur Definition vgl. Anhang von Kap. 4), ist bei M. M. Gutermann ([12], Theorem 2, Seite 319) zu finden.

A. G. Kurosh ([18], Seite 171–178) betrachtet Invarianzsysteme, das sind Mengen $\mathfrak{N}$, die der Definition 4.1 ohne (b) genügen, und beweist dafür den entsprechenden Satz.

Beweis: Sei $\Theta$ ein Turm von Normalreihen einer Gruppe $G$, d.h. es gelte $\Theta \neq \emptyset$ und für $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \Theta$ entweder $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$. Wir wollen zeigen, daß es eine Normalreihe $\mathfrak{B}$ von $G$ derart gibt, daß $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{B}$ für alle $\mathfrak{N} \in \Theta$ ist. Wir bilden die Menge aller Normalteiler aller Normalreihen aus $\Theta$ und fügen noch die Vereinigungen und Durchschnitte aller ihrer nicht leeren Teilmengen hinzu. Diese Menge $\mathfrak{B}$ erfüllt die Relation $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{B}$ für alle $\mathfrak{N} \in \Theta$. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{B}$ eine Normalreihe von $G$ ist, müssen (a), (b) und (c) der Definition 4.1 nachgewiesen werden. Natürlich ist (a) erfüllt, da 1, $G$ zu jeder Normalreihe gehören und $\Theta \neq \emptyset$ ist. Da jeder Durchschnitt bzw. jede Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ als Durchschnitt und Vereinigung von Normalteilern aus $\Theta$ geschrieben werden kann, enthält $\mathfrak{B}$ Durchschnitte und Vereinigungen seiner nicht leeren Teilmengen. Also ist auch (c) bewiesen.

Sei nun zunächst $U = \bigcup_{\Theta} A(\mathfrak{M})$ und $V = \bigcup_{\Theta} B(\mathfrak{M})$, wobei $A(\mathfrak{M})$ und $B(\mathfrak{M})$ aus $\mathfrak{M} \in \Theta$ sind und o.B.d.A. $A(\mathfrak{M}) \subseteq A(\mathfrak{N})$ sowie $B(\mathfrak{M}) \subseteq B(\mathfrak{N})$ für $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$ gelte. Dann gibt es zu jedem $A(\mathfrak{M})$ ein $\mathfrak{N} \in \Theta$ derart, daß $A(\mathfrak{M}) \subseteq B(\mathfrak{X})$ für alle $\mathfrak{X} \in \Theta$ mit $\mathfrak{X} \geqslant \mathfrak{N}$ ist, oder es gibt ein $\mathfrak{M} \in \Theta$, daß $B(\mathfrak{X}) \subseteq A(\mathfrak{M})$ für alle $\mathfrak{X} \in \Theta$ ist. Im ersten Fall ist $U \subseteq V$, im letzten $V \subseteq U$.

Ferner seien $S = \bigcap_{\Theta} C(\mathfrak{M})$ und $T = \bigcap_{\Theta} D(\mathfrak{M})$ mit $C(\mathfrak{M}), D(\mathfrak{M}) \in \mathfrak{M} \in \Theta$ sowie o.B.d.A. $C(\mathfrak{M}) \subseteq C(\mathfrak{N})$ und $D(\mathfrak{N}) \subseteq D(\mathfrak{M})$, wenn $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$ ist. Es gibt zu jedem $C(\mathfrak{M})$ ein $\mathfrak{N} \in \Theta$ derart, daß $C(\mathfrak{M}) \supseteq D(\mathfrak{X})$ für alle $\mathfrak{X} \in \Theta$ mit $\mathfrak{X} \geqslant \mathfrak{N}$ ist, oder es gibt ein $\mathfrak{M} \in \Theta$, daß $C(\mathfrak{M}) \subseteq D(\mathfrak{X})$ für alle $\mathfrak{X} \in \Theta$ mit $\mathfrak{X} \geqslant \mathfrak{M}$ ist. Also ist entweder $S \supseteq T$ oder $T \supseteq S$. Vergleichen wir noch $U$ und $S$, so gibt es ein $\mathfrak{M} \in \Theta$ derart, daß $C(\mathfrak{X}) \subseteq A(\mathfrak{Y})$ für alle $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \Theta$ mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \geqslant \mathfrak{M}$ ist, oder für alle $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ist $A(\mathfrak{Y}) \subseteq C(\mathfrak{X})$, d.h. es ist $U \subseteq S$ oder $S \subseteq U$.

Damit sind alle Elementetypen von $\mathfrak{B}$ betrachtet, und die Linearität (b) ist auch gezeigt. Also ist $\mathfrak{B}$ eine Normalreihe von $G$.

Sei nun $\mathfrak{N}$ eine Normalreihe von $G$ und $\mathfrak{L}$ die Menge aller Normalreihen $\mathfrak{X}$ von $G$ mit $\mathfrak{X} \geqslant \mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{L} \neq \emptyset$, da $\mathfrak{N} \in \mathfrak{L}$. Ist $\Theta$ ein nicht leerer Turm von Normalreihen aus $\mathfrak{L}$, so gibt es nach dem gerade Bewiesenen eine maximale Normalreihe $\mathfrak{B}$ von $\Theta$. Da $\mathfrak{B} \geqslant \mathfrak{N}$, gehört $\mathfrak{B}$ auch zu $\mathfrak{L}$. Nach dem Maximumprinzip der Mengenlehre gibt es dann ein maximales $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{L}$. Dieses $\mathfrak{M}$ ist dann eine $\mathfrak{N}$ enthaltende Hauptreihe von $G$. Q.E.D.

FOLGERUNG 4.12. *Vererbe sich* $\mathfrak{e}$ *auf epimorphe Bilder von Normalteilern, und sei* $\mathfrak{a}$ *eine epimorphismenvererbliche Eigenschaft. Dann ist jede Verfeinerung einer* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Normalreihe von* $G$ *ebenfalls eine* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Normalreihe und daher jede* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Normalreihe in einer* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Hauptreihe von* $G$ *enthalten.*

Beweis: Ist $\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$ und $\mathfrak{B}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{N}$ und definiert $A$, $B$ einen Faktor von $\mathfrak{B}$, so bilden $C = \bigcup N$ mit $N \in \mathfrak{N}$ und $N \subseteq A$ sowie $D = \bigcap T$ mit $T \in \mathfrak{N}$ und $T \supseteq B$ einen Faktor von $\mathfrak{N}$. Also ist $B/A$ epimorphes Bild eines Normalteilers von $D/C$. Da $D/C$ nach Voraussetzung eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, ist auch $B/A$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Die von $G/A$ in $B/A$ induzierte Automorphismengruppe ist ein epimorphes Bild der von $G/C$ in $D/C$ induzierten Automorphismengruppe, also eine $\mathfrak{a}$-Gruppe. Folglich sind die Faktoren von $\mathfrak{B}$ sogar $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Faktoren, und daher ist $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe. Weitere Anwendung von Lemma 4.11 zeigt, daß jede $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe in einer $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Hauptreihe enthalten ist.

SATZ 4.13. *Sei $\mathfrak{a}$ eine epimorphismenvererbliche, gruppentheoretische Eigenschaft, und vererbe sich $\mathfrak{e}$ auf epimorphe Bilder von Normalteilern. Dann sind für eine Gruppe $G$ äquivalent:*

(1) *Jede Hauptreihe von $G$ ist eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Hauptreihe von $G$.*

(2) *Jede Reihe von $G$ läßt sich zu einer $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$ verfeinern.*

(3) *Sind $N \subset M$ Normalteiler von $G$, so existieren Normalteiler $U$ und $V$ von $G$ mit $M \supseteq U \supset V \supseteq N$ derart, daß $U/V$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/V$ ist.*

(4) *Minimale Normalteiler epimorpher Bilder (= Hauptfaktoren) von $G$ sind $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler.*

(5) *Jede Hauptreihe jedes epimorphen Bildes von $G$ ist eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Hauptreihe.*

(6) *Jede Reihe eines epimorphen Bildes $H$ von $G$ läßt sich zu einer $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $H$ verfeinern.*

(7) *Jedes epimorphe Bild von $G$ besitzt eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Hauptreihe.*

(8) *Jedes epimorphe Bild von $G$ besitzt eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe.*

Beweis: Nach Lemma 4.11 läßt sich jede Reihe von $G$ zu einer Hauptreihe verfeinern, die dann nach (1) eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Hauptreihe, also eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe ist. Daher folgt (2) aus Bedingung (1). Sind $N \subset M$ Normalteiler von $G$, so bilden $1, N, M, G$ eine Reihe von $G$; diese läßt sich nach (2) zu einer $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe von $G$ verfeinern. Daher existieren Normalteiler $U$ und $V$ von $G$ mit $M \supseteq U \supset V \supseteq N$, und $U/V$ ist ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/V$. Es ist damit (3) aus (2) hergeleitet. Sei nun $\mathfrak{H}$ eine Hauptreihe von $G$ und definiere $A, B$ einen Faktor von $\mathfrak{H}$. Da $A \supset B$, folgt aus (3) die Existenz von Normalteilern $U$ und $V$ von $G$ mit $A \supseteq U \supset V \supseteq B$, und $U/V$ ist ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/V$. Weil $\mathfrak{H}$ eine Hauptreihe ist, folgt $A = U$ und $B = V$. Also ist $A/B$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler von $G/B$. Daher ist $\mathfrak{H}$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Hauptreihe von $G$ und (1) wieder aus (3) bewiesen. Damit sind (1), (2) und (3) äquivalent.

Sind $N \subset M$ Normalteiler von $G$, daß $M/N$ minimaler Normalteiler von $G/N$ ist, so folgt aus (3) die Existenz von Normalteilern $U$ und $V$

von $G$ mit $M \supseteq U \supset V \supseteq N$, und $U/V$ ist ein $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/V$. Wegen der Minimalität von $M/N$ in $G/N$ ist $U = M$ und $V = N$, also $M/N$ ein $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/N$. Daher folgt (4) aus (3). Ist $\mathfrak{H}$ eine Hauptreihe des epimorphen Bildes $H$ von $G$ und definiert $A$, $B$ einen Faktor von $\mathfrak{H}$, so ist nach Definition der Hauptreihe $A/B$ ein minimaler Normalteiler von $H/B$. Nach (4) ist damit $A/B$ ein $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $H/B$. Folglich ist $\mathfrak{H}$ eine $\mathfrak{e}^a$-Hauptreihe und (5) aus (4) bewiesen. Ist nun $\mathfrak{N}$ eine Reihe des epimorphen Bildes von $H$ von $G$, so läßt sich $\mathfrak{N}$ zu einer Hauptreihe von $H$ verfeinern, die dann nach (5) eine $\mathfrak{e}^a$-Reihe von $H$ ist. Also folgt (6) aus (5). Die Bedingung (7) ist eine Abschwächung von (6), da $H$ zum Beispiel die Normalreihe 1, $H$ besitzt, die sich nach Lemma 4.11 zu einer Hauptreihe verfeinern läßt, welche dann wegen (6) eine $\mathfrak{e}^a$-Hauptreihe sein muß. (8) ist eine weitere Abschwächung von (7).

Um (3) wieder aus (8) zu beweisen, seien $N \subset M$ Normalteiler von $G$. Dann besitzt $G/N$ als epimorphes Bild von $G$ nach (8) eine $\mathfrak{e}^a$-Reihe $\mathfrak{N}$. Da $N \subset M$ existiert ein $x \in M$ derart, daß $x \notin N$, und wir bilden $D/N = \bigcap T/N$ mit $xN \in T/N \in \mathfrak{N}$ und $S/N = \bigcup T/N$ mit $xN \notin T/N \in \mathfrak{N}$. Dann ist $D/N \supset S/N$ ein Faktor von $\mathfrak{N}$, also $D/N/S/N$ ($\cong D/S$) ein $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/N/S/N$ ($\cong G/S$). Wir bilden $U = D \cap M$ und $V = S \cap M$. Weil $D \supseteq S$ und $x \in D \cap M$ aber $x \notin S \cap M$, ist $U \supset V$. Ferner ist nach Konstruktion $M \supseteq U \supset V \supseteq N$. Dann ist $U/V = (D \cap M)/(S \cap M)$ epimorphes Bild des $\mathfrak{e}^a$-Normalteilers $D/S$, also selbst ein $\mathfrak{e}^a$-Normalteiler von $G/V$. Damit ist aber (3) aus (8) hergeleitet, und alle acht Bedingungen sind äquivalent.

Anmerkung: Die Eigenschaft von Gruppen $\mathfrak{e}^a$-Reihen zu besitzen, vererbt sich im allgemeinen nicht auf epimorphe Bilder, wie schon der Anmerkung zur Folgerung 4.9 zu entnehmen ist; vgl. dazu auch Folgerung 5.8.

Anhang: Gilt in der Definition 4.1 der $\mathfrak{e}$-Reihe $\mathfrak{N}$ von $G$ nicht, daß jedes $B \in \mathfrak{N}$ Normalteiler von $G$ ist, sondern

(0) Definiert $A$, $B$ einen Faktor von $\mathfrak{N}$, so ist $B$ Normalteiler von $A$,

so nennen wir $\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{e}$-*Folge* von $G$.

Ist $\mathfrak{e}$ eine untergruppenvererbliche Eigenschaft, so ist die Klasse aller Gruppen mit $\mathfrak{e}$-Folge kartesisch, untergruppen- und (sehr stark) erweiterungsabgeschlossen, jedoch ist im allgemeinen $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ und $\neq \mathfrak{u}$, wie $\mathfrak{e} = p$-Gruppe zu sein und die Klasse aller Gruppen mit $p$-Folgen zeigt. Dann besitzt natürlich jede endliche $p$-Gruppe eine $p$-Folge und jede $q$-Gruppe für $q \neq p$ keine $p$-Folge. Damit erhalten wir Beispiele, die zeigen, wie schwach die Voraussetzungen in (2) von Folgerung 3.11 sind.

Es gibt sogar von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{t}$ verschiedene Gruppenklassen, die kartesisch, untergruppen-, erweiterungs- und in der Bildung freier Produkte abgeschlossen sind, wie P. Hall und B. Hartley ([16], Seite 37–39) gezeigt haben.

## V. Kriterien für die Endlichkeit der Länge von $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihen

DEFINITION 5.1. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ gruppentheoretische Eigenschaften. Dann ist $G$ eine $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-*Gruppe*, wenn $G$ nicht einfach oder eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe ist.

Beispiele von Klassen von $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppen sind Klassen von Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen oder Klassen von Gruppen mit $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe.

LEMMA 5.2. *Jede Gruppe ist Untergruppe einer einfachen, nicht abelschen Gruppe.*

Beweis 1: P. Hall ([15], Theorem A, Seite 531) konstruiert aus einer beliebigen Gruppe $G \neq 1$ eine einfache (nicht streng einfache) Gruppe $W$, die nach bekannten Kranzprodukteigenschaften, vgl. P. Hall [14], $G$ wiederum als Untergruppe enthält. Außerdem ist $W$ natürlich nicht abelsch. Also ist Lemma 5.2 bewiesen.

Beweis 2: Sei $G$ eine endliche Gruppe der Ordnung $n$ und o.B.d.A. $n > 2$. Dann betrachten wir die Permutationen $\bar{x}$ aller $n^2$ geordneten Elementepaare $(g, h)$ mit $x, g, h \in G$ so, daß $(g, h)\bar{x} = (gx, hx)$ ist. Diese Permutationen $\bar{x}$ bilden eine Untergruppe $\bar{G}$ der symmetrischen Gruppe $S_{n^2}$, die zu $G$ isomorph ist. Da $\bar{G}$ nur aus geraden Permutationen besteht, ist $\bar{G}$ schon in der alternierenden Gruppe $A_{n^2}$ enthalten. Also ist $G$ dann in einer endlichen, einfachen, nicht abelschen Gruppe (isomorph) enthalten.

Ist $G$ eine unendliche Gruppe, so bilden wir die symmetrische Gruppe $S$ auf der Menge $G$. Ist $N$ die Menge aller Permutationen von $G$, die weniger als $|G|$ Elemente bewegen, so ist $N$ ein Normalteiler von $S$ und $S/N$ nach R. Baer ([2], Seite 16) eine einfache Gruppe, die natürlich auch nicht abelsch ist. Durch die rechtsreguläre Darstellung von $G$ in $S$, wobei also Elemente $\neq 1$ von $G$ immer $|G|$ Elemente in der Permutationsdarstellung bewegen, ist $G$ isomorph einer Untergruppe von $S/N$. Q.E.D.

SATZ 5.3. *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ untergruppenvererbliche, gruppentheoretische Eigenschaften. Sei $\mathfrak{x}$ eine residuelle Klasse von $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppen derart, daß epimorphe Bilder freier $\mathfrak{x}$-Gruppen $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppen sind. Enthält $\mathfrak{x}$ alle endlichen Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Gruppen und alle unendlichen zyklischen Gruppen, falls es keine endlichen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}$-Gruppen, jedoch unendliche zyklische $\mathfrak{e}$-Gruppen gibt, so ist $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ oder $\mathfrak{x}$ enthält alle freien Gruppen, und es ist $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$; dann gibt es wegen der Untergruppenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$ eine von 1 verschiedene, zyklische $\mathfrak{e}$-Gruppe $Z$. Ist $Z$ nun endlich, so besitzt $Z$ eine von 1 verschiedene, zyklische Untergruppe $P$ von Primzahlordnung. Dann ist $P$ wieder eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Nehmen wir an, daß es keine endliche, zyklische $\mathfrak{e}$-Gruppe $\neq 1$ gibt, so gibt es keine endlichen, von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}$-Gruppen, jedoch unendliche zyklische

$\mathfrak{e}$-Gruppen $Z$. Nach Voraussetzung ist $Z$ dann eine $\mathfrak{x}$-Gruppe. Da $Z$ eine freie $\mathfrak{x}$-Gruppe ist, besitzt $Z$ als epimorphes Bild eine zyklische Gruppe $W \neq 1$ von Primzahlordnung, die nach Voraussetzung eine $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppe ist. Eine einfache, abelsche $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppe ist aber nach Definition 5.1 eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Folglich ist $W$ eine endliche, von 1 verschiedene $\mathfrak{e}$-Gruppe, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Damit existiert immer eine von 1 verschiedene, zyklische $\mathfrak{e}$-Gruppe $P$ von Primzahlordnung. Weil eine endliche $p$-Gruppe $G$ nilpotent endlicher Klasse ist und daher jedes von 1 verschiedene, epimorphe Bild $H$ von $G$ ein von 1 verschiedenes Zentrum $\mathfrak{z}H$ hat, besitzt $H$ auch einen Normalteiler, der isomorph zu $P$ ist und im Zentrum liegt. Also ist die von $H$ in $P$ induzierte Automorphismengruppe trivial und $G$ eine Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Gruppe. Daher sind alle endlichen $p$-Gruppen $\mathfrak{x}$-Gruppen. Ist $F$ eine freie Gruppe endlichen Ranges, so setzen wir $F_0 = F$ und $F_{n+1} = \bigcap N$, wobei $N$ alle Normalteiler von $F_n$ mit $[F_n : N] = p$ durchläuft. Dann ist $F/F_n$ nach W. Magnus (vgl. W. Specht [20], Seite 212) eine endliche $p$-Gruppe und nach einem Satz von F. Levi (vgl. W. Specht [20], Satz 20, Seite 211) damit $\bigcap F_n = 1$. Da alle endlichen $p$-Gruppen $\mathfrak{x}$-Gruppen sind, sind also alle freien Gruppen endlichen Ranges residuell $\mathfrak{x}$-Gruppen und daher nach Voraussetzung auch $\mathfrak{x}$-Gruppen. Eine beliebige freie Gruppe ist aber residuell frei von endlichem Range. Folglich sind alle freien Gruppen $\mathfrak{x}$-Gruppen. Nach Voraussetzung sind alle freien $\mathfrak{x}$-Gruppen und deren epimorphe Bilder $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppen. Für die einfachen Gruppen folgt aber nach Definition 5.1, daß sie $\mathfrak{e}$-Gruppen sind. Ferner sind die nicht abelschen, einfachen Gruppen $\mathfrak{a}$-Gruppen. Also sind alle nicht abelschen, einfachen Gruppen sowohl $\mathfrak{e}$- als auch $\mathfrak{a}$-Gruppen. Wegen Lemma 5.2 sind alle Gruppen Untergruppen nicht abelscher, einfacher Gruppen, und daher folgt aus der Untergruppenvererblichkeit von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$, daß alle Gruppen $\mathfrak{a}$-Gruppen und $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$ ist. Q.E.D.

Anmerkung: Sämtliche Voraussetzungen im Satz 5.3 sind unentbehrlich: Die Eigenschaft $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{x} =$ Endlichkeit zeigt die Unentbehrlichkeit der Residualität für die Gruppenklasse $\mathfrak{x}$.

Wählen wir für $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$ und für $\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$ die im Anhang an Kapitel 4 angegebene Klasse aller Gruppen mit $p$-Folgen, so ist $\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$ nicht epimorphismenabgeschlossen, jedoch sind alle übrigen Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt, und es ist $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{e} \neq \mathfrak{u}$. Das zeigt die Unentbehrlichkeit der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{x}$ in gewissen epimorphen Bildern. Die Unentbehrlichkeit aller übrigen Voraussetzungen ist trivial.

FOLGERUNG 5.4. *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ untergruppenvererbliche, gruppentheoretische Eigenschaften. Sei $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{e} \neq \mathfrak{u} \neq \mathfrak{a}$. Ist $\Lambda$ eine linear geordnete Menge und ist die Klasse $\mathfrak{x}$ aller Gruppen mit $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-$\Lambda$-Reihe residuell abgeschlossen und sind epimorphe Bilder freier $\mathfrak{x}$-Gruppen wieder $\mathfrak{x}$-Gruppen, so ist $\Lambda$ endlich.*

Anmerkung: Ist $\mathfrak{e} = \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$ und $\Lambda = n$, so ist $\mathfrak{x}_n$ die Klasse aller Gruppen mit $\mathfrak{u}^{\mathfrak{t}}$-$n$-Reihe gerade die Klasse aller Gruppen der Nilpotenzklasse $n$. Diese Gruppenklassen sind Varietäten. Das Beispiel zeigt also, daß auch alle endlichen Fälle für $\Lambda$ eintreten können.

Beweis: Die Gruppenklasse $\mathfrak{x}$ ist eine Klasse von $\mathfrak{n}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppen. Ist $\Lambda$ unendlich, so sind auch alle endlichen Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Gruppen in $\mathfrak{x}$, da sie wegen Satz 4.3 eine endliche $\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Reihe besitzen und alle endlichen Ordnungstypen wegen der Unendlichkeit von $\Lambda$ auch $\leqslant \Lambda$ sind. Ferner sind alle $\mathfrak{e}$-Gruppen, insbesondere unendlich zyklische $\mathfrak{e}$-Gruppen $\mathfrak{x}$-Gruppen. Nun sind alle Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt, und es folgt $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ oder $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$, was aber der Voraussetzung der Folgerung widerspricht. Also ist $\Lambda$ endlich und die Behauptung bewiesen.

FOLGERUNG 5.5. *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *untergruppenvererbliche, gruppentheoretische Eigenschaften. Ist die Klasse aller Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Gruppen residuell und sind alle nilpotenten* $\mathfrak{e}$*-Gruppen auch Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Gruppen, so ist* $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ *oder* $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$.

Beweis: Die Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen erfüllt die Voraussetzungen für die Gruppenklasse $\mathfrak{x}$ im Satz 5.3. Also folgt aus Satz 5.3 die Behauptung.

FOLGERUNG 5.6. *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *untergruppenvererbliche, gruppentheoretische Eigenschaften. Ist die Klasse* $\mathfrak{x}$ *aller Gruppen mit aufsteigender* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Reihe residuell und sind epimorphe Bilder freier* $\mathfrak{x}$*-Gruppen* $\mathfrak{x}$*-Gruppen, so ist* $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ *oder* $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$.

Beweis: Die Klasse $\mathfrak{x}$ erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 5.3, wonach dann die Behauptung folgt.

FOLGERUNG 5.7. *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *faktorenvererbliche Eigenschaften. Ist* $\beta$ *eine Ordinalzahl und die Klasse* $\mathfrak{x}$ *aller Gruppen mit* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-*$\beta$*-Reihe kartesisch abgeschlossen, so ist* $\beta$ *eine natürliche Zahl.*

Beweis: Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ sich auf Faktoren vererben, ist auch $\mathfrak{x}$ nach Lemma 4.5 faktorenabgeschlossen. Also ist $\mathfrak{x}$ eine Varietät. Varietäten sind residuell- und epimorphismenabgeschlossen. Ist $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ oder $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$, so ist $\beta = 1$. Also können wir $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ und $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{u}$ oder $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{u}$ voraussetzen. Ist $\beta$ unendlich, so erfüllt $\mathfrak{x}$ alle Voraussetzungen von Satz 5.3, und es folgt $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ oder $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$, was ein Widerspruch ist. Daher ist $\beta$ eine natürliche Zahl.

FOLGERUNG 5.8. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ *untergruppenvererbliche Eigenschaften, vererbt sich* $\mathfrak{a}$ *auf epimorphe Bilder und ist die Klasse aller Gruppen mit (absteigender)* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$*-Reihe epimorphismenabgeschlossen, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

Anmerkung: In Folgerung 5.8 kann das Wort „absteigend" weggelassen werden.

Beweis: Wegen Lemma 4.6 ist die Klasse $\mathfrak{x}$ aller Gruppen mit (absteigender) $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Reihe residuell. Daher sind alle Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt, und es folgt $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$.

ZUSATZ 5.9. *Sei $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ eine faktorenvererbliche und $\mathfrak{a}$ eine epimorphismenabgeschlossene Gruppenklasse. Ist $\mathfrak{x}$ eine residuelle Klasse von Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen, die alle endlichen Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Gruppen enthält, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$.*

*Ist überdies $\mathfrak{e}$ eine Varietät, so ist sogar $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.*

Beweis: Da sich $\mathfrak{a}$ auf epimorphe Bilder vererbt und es mindestens eine $\mathfrak{a}$-Gruppe gibt, ist auch 1 eine $\mathfrak{a}$-Gruppe. Weil sich $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{e}$ auf Faktoren vererbt, gibt es eine zyklische $\mathfrak{e}$-Gruppe $P$ der Primzahlordnung $P \neq 1$. Ist $H$ ein von 1 verschiedenes, epimorphes Bild einer endlichen $p$-Gruppe, so besitzt $H$ einen zu $P$ isomorphen, zentralen Normalteiler. Also sind alle endlichen $p$-Gruppen Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Gruppen und daher $\mathfrak{x}$-Gruppen. Nach dem schon einmal angewandten Satz von W. Magnus (vgl. W. Specht [20], Satz 21, Seite 211) sind freie Gruppen residuell endliche $p$-Gruppen, also residuell $\mathfrak{x}$-Gruppen. Daher sind alle freien Gruppen $\mathfrak{x}$-Gruppen. Ist die freie Gruppe $F$ nicht abelsch, so besitzt $F$ auch keinen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler. Da $F$ insbesondere eine Hyper-$\mathfrak{u}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe ist, gibt es einen Normalteiler $N \neq 1$, in dem $F$ eine $\mathfrak{a}$-Automorphismengruppe induziert. Also ist $F/\mathfrak{c}_F N$ eine $\mathfrak{a}$-Gruppe. Da $F$ nicht abelsch ist, ist $N \cap \mathfrak{c}_F N = \mathfrak{z}N = 1$, weil $\mathfrak{z}N$ sonst ein von 1 verschiedener, abelscher Normalteiler von $F$ wäre. Also ist $N \circ \mathfrak{c}_F N = 1$ und $N \cdot \mathfrak{c}_F N = N \otimes \mathfrak{c}_F N$. Da $N \neq 1$ ist und $N \cdot \mathfrak{c}_F N$ nach dem Schreierschen Satz frei ist und freie Gruppen nicht als (echtes) direktes Produkt darstellbar sind, vgl. hierzu R. Baer und F. Levi ([3], Folgerung 4, Seite 397), ist $\mathfrak{c}_F N = 1$ und daher $F = F/\mathfrak{c}_F N$ eine $\mathfrak{a}$-Gruppe. Folglich sind alle freien Gruppen $\mathfrak{a}$-Gruppen. Da epimorphe Bilder von $\mathfrak{a}$-Gruppen $\mathfrak{a}$-Gruppen sind, ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$.

Nun sind alle freien Gruppen Hyper-$\mathfrak{e}$-Gruppen, und es gibt daher freie, nicht abelsche $\mathfrak{e}$-Gruppen. Da sich $\mathfrak{e}$ auf Faktoren vererbt, gibt es auch freie $\mathfrak{e}$-Gruppen vom Range 2. Weil $\mathfrak{e}$ nach Voraussetzung eine Varietät ist, sind alle freien Gruppen $\mathfrak{e}$-Gruppen, da freie Gruppen residuell frei vom Range 2 sind. Also ist auch $\mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

FOLGERUNG 5.10. *Ist $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{e}$ eine Varität und $\mathfrak{a}$ eine epimorphismenvererbliche Eigenschaft und die Klasse aller Gruppen mit $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-$\beta$-Reihe residuell, so ist $\beta$ eine natürliche Zahl.*

Beweis: Da die Voraussetzungen von Zusatz 5.9 erfüllt sind, folgt aus diesem, falls $\beta$ unendlich ist, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$ ist. Dann ist aber $\beta = 1$, also erst recht endlich.

FOLGERUNG 5.11. *Ist $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{e}$ eine Varietät und $\mathfrak{a}$ eine epimorphismenabgeschlossene Klasse und die Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen residuell, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}$ = Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen.*

Beweis: Das Korollar folgt aus dem Zusatz 5.9.

Anmerkung: Dies ist eine Verschärfung einer Aussage in R. Baer ([7], Satz 5.1, Seite 205).

## VI. Türme von Gruppenklassen

Eine aufsteigend wohlgeordnete Klasse ist eine geordnete Klasse, deren nicht leere Teilklassen minimale Elemente besitzen. Ein Gruppenklassenturm ist eine durch Inklusion aufsteigend wohlgeordnete Klasse von Gruppenklassen. Ein Gruppenklassenturm $\Theta$ ist abgeschlossen, wenn $\Theta$ alle Vereinigungen seiner Teilklassen enthält.

Beispielsweise sind Nilpotenz, Auflösbarkeit bzw. von endlichem Exponenten zu sein Gruppenklassen, die als Vereinigung der Varietätentürme vom Typ $< \omega$ der Gruppenklassen

von $n$-ter Nilpotenzklasse

von $n$-ter Auflösbarkeitsstufe bzw.

von Exponenten $n!$ zu sein

entstehen.

SATZ 6.1. *Sei $\Phi$ eine Klasse von residuellen Gruppenklassen, die ihre direkten Faktoren enthalten und $\mathfrak{v}$ ihre Vereinigung. Dann sind äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{v}$ ist residuell.*

(2) *Direkte Produkte von $\mathfrak{v}$-Gruppen sind $\mathfrak{v}$-Gruppen.*

Anmerkung: Es kann vorkommen, daß $\mathfrak{v}$ nicht residuell ist, obwohl $\mathfrak{v}$ Vereinigung eines Turmes residueller Gruppenklassen ist, wie alle obigen Beispiele zeigen.

Beweis: Ist $\mathfrak{v}$ residuell, so sind direkte Produkte von $\mathfrak{v}$-Gruppen wieder $\mathfrak{v}$-Gruppen. Sei daher umgekehrt $G$ eine Gruppe, die residuell-$\mathfrak{v}$ ist; dann gibt es eine Menge $\mathfrak{M}$ von Normalteilern von $G$ derart, daß $G/M$ eine $\mathfrak{v}$-Gruppe für alle $M \in \mathfrak{M}$ und $\bigcap_{\mathfrak{M}} M = 1$ ist. Ist $\mathfrak{E}$ die Menge aller $G/M$ mit $M \in \mathfrak{M}$, so bilden wir das direkte Produkt $D = \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. Nach Voraussetzung (2) ist $D$ eine $\mathfrak{v}$-Gruppe und gehört also zu einem $\mathfrak{k} \in \Phi$. Da direkte Faktoren von $\mathfrak{k}$-Gruppen wieder $\mathfrak{k}$-Gruppen sind, folgt, daß auch $G/M$ für jedes $M \in \mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{k}$-Gruppe ist. Also ist $G$ sogar residuell eine $\mathfrak{k}$-Gruppe und daher selbst eine $\mathfrak{k}$-Gruppe. Somit ist $G$ erst recht eine $\mathfrak{v}$-Gruppe, und die Residualität von $\mathfrak{v}$ ist bewiesen.

SATZ 6.2. *Sei $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzahl oder das Symbol $\infty$, d.h. größer als jede Kardinalzahl, $\beta$ eine Ordinalzahl und $\Theta$ ein Turm von Gruppenklassen vom Typ $\beta$, die die direkten Faktoren ihrer Gruppen und die $\mathfrak{m}$-kartesischen Produkte ihrer Teilmengen enthalten. Ist $\mathfrak{v}$ die Vereinigung dieser*

*Klassen aus $\Theta$, so sind äquivalent:*

(1) *$\beta$ ist keine Limeszahl.*

(2) *$\mathfrak{m}$-kartesische Produkte von $\mathfrak{v}$-Gruppen sind $\mathfrak{v}$-Gruppen.*

Beweis: Ist $\beta$ keine Limeszahl, so existiert ein $\mathfrak{k}$ aus $\Theta$ derart, daß $\mathfrak{v} = \mathfrak{k}$ und daher $\mathfrak{v}$ bzgl. $\mathfrak{m}$-kartesischer Produktbildung abgeschlossen ist. Ist umgekehrt $\beta$ eine Limeszahl, so wollen wir zeigen, daß $\mathfrak{v}$ nicht alle $\mathfrak{m}$-kartesischen Produkte enthält. Hierzu benötigen wir nicht mehr die Voraussetzung, daß die Gruppenklassen $\mathfrak{k} \in \Theta$ ihre $\mathfrak{m}$-kartesischen Produkte enthalten. Nach Definition von $\mathfrak{v}$ gilt:

(a) *$G$ ist eine $\mathfrak{v}$-Gruppe genau dann, wenn es ein $\mathfrak{k} \in \Theta$ derart gibt, daß $G$ eine $\mathfrak{k}$-Gruppe ist.*

Nun gibt es für jede Klasse $\mathfrak{k} \in \Theta$ eine $\mathfrak{v}$-Gruppe $G(\mathfrak{k})$, die keine $\mathfrak{k}$-Gruppe ist. Mit dieser Gruppenmenge $\mathfrak{M} = \langle G(\mathfrak{k}) / \mathfrak{k} \in \Theta \rangle$ bilden wir das $\mathfrak{m}$-kartesische Produkt $G = \mathfrak{K}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{M}$. Wäre $G \in \mathfrak{v}$, so gäbe es wegen (a) ein $\mathfrak{x} \in \Theta$ derart, daß $G$ eine $\mathfrak{x}$-Gruppe ist. Als $\mathfrak{m}$-kartesischer Faktor von $G$ ist $G(\mathfrak{k})$ auch einem direkten Faktor von $G$ isomorph, läge also in $\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{k} \in \Theta$, was der Konstruktion der $G(\mathfrak{k})$ widerspricht. Also ist $G$ keine $\mathfrak{v}$-Gruppe und $\mathfrak{v}$ daher nicht bzgl. $\mathfrak{m}$-kartesischer Produkte abgeschlossen. Q.E.D.

FOLGERUNG 6.3. *Ist $\Theta$ ein Varietätenturm und $\mathfrak{v}$ seine Vereinigung, so sind äquivalent:*

(1) *Der Typ $\lambda$ von $\Theta$ ist eine Limeszahl.*

(2) *$\mathfrak{v}$ ist keine Varietät.*

Beweis: Da es eine eineindeutige Abbildung der vollinvarianten Untergruppen einer freien Gruppe $F$ abzählbaren Ranges auf sämtliche Varietäten gibt — vgl. H. Neumann ([19], Theorem 14.31, Seite 12) — und $|P(F)| = |\text{Menge aller Untermengen von } F| = 2^{\aleph_0}$ ist, ist $\Theta$ sogar eine Menge und daher der Typ $\lambda$ eine Ordinalzahl. Ist der Typ $\lambda$ von $\Theta$ keine Limeszahl, so existiert ein $\mathfrak{k} \in \Theta$ derart, daß $\mathfrak{v} = \mathfrak{k}$ eine Varietät ist. Wenn umgekehrt $\lambda$ eine Limeszahl ist, folgt aus dem Satz 6.2, daß $\mathfrak{v}$ nicht alle kartesischen Produkte enthält. Also ist $\mathfrak{v}$ keine Varietät

Für die in der Einleitung dieses Kapitels definierten abgeschlossenen Türme gilt dann:

FOLGERUNG 6.4. *Sei $\aleph$ eine Kardinalzahl. Jeder abgeschlossene Turm von Gruppenklassen, die ihre direkten Faktoren und ihre $\aleph$-kartesischen Produkte enthalten, ist endlich.*

Beweis: Ist der Turm $\Theta$ unendlich, so enthält er, da er abgeschlossen ist, immer die Gruppenklasse $\mathfrak{v}_\omega$ zur ersten Limeszahl $\omega$. Weil $\mathfrak{v}_\omega = \bigcup_{\mathcal{N}} \mathfrak{v}_n$ ist, kann diese Klasse nach Satz 6.2 nicht alle $\aleph$-kartesischen Produkte enthalten. Das widerspricht der Voraussetzung. Also ist $\Theta$ endlich.

Anmerkung: Wegen Folgerung 6.4 ist ein Varietätenturm dann und nur dann endlich, wenn er abgeschlossen ist.

Es gibt aber auch nicht-abgeschlossene, unendliche Varietätentürme, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $\mathfrak{v}_n$ = Klasse aller abelschen Gruppen vom Exponenten $n!$,

$\bigcup_{\mathcal{N}} \mathfrak{v}_n$ = Klasse aller abelschen Torsionsgruppen,

$\mathfrak{v}_\omega^*$ = Klasse aller abelschen Gruppen,

$\mathfrak{v}_{\omega+k}$ = Klasse aller Gruppen der Nilpotenzklasse $k+1$.

Dann sind $\mathfrak{v}_n$ bzw. $\langle \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_\omega^*, \mathfrak{v}_{\omega+k} \rangle$ für alle natürlichen Zahlen $n$, $k$ nicht-abgeschlossene, unendliche Varietätentürme vom Typ $<\omega$ bzw. $<2\omega$.

Für die Anwendung beim Beweis von Satz 6.8 und Satz 6.9 benötigen wir die folgenden beiden Hilfssätze:

LEMMA 6.5. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *gruppentheoretische Eigenschaften, so gilt:*

(1) *Die Klasse aller Hyper-*$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$*-Gruppen ist in der Bildung von Produkten (beliebig vieler) sich paarweise zentralisierender Normalteiler abgeschlossen.*

(2) *Direkte Produkte von (beliebig vielen) Hypo-*$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$*-Gruppen sind wieder Hypo-*$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$*-Gruppen.*

Beweis: Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge sich paarweise zentralisierender Hyper-$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Normalteiler einer Gruppe, $P$ ihr Produkt und $H$ ein echter Normalteiler von $P$. Wäre nun $G \cdot H/H = 1$ für alle $G \in \mathfrak{M}$, so wäre $G \subseteq H$ für alle $G \in \mathfrak{M}$, also wäre $P = \{G/G \in \mathfrak{M}\} \subseteq H \subset P$ ein Widerspruch. Daher gibt es ein $G \in \mathfrak{M}$ mit $G \cdot H/H \neq 1$. (Anmerkung: Dieser Schluß (und die Behauptung) ist für $\aleph$-kartesische Produkte mit $\aleph > \aleph_0$ falsch, da hier i.a. $\{G/G \in \mathfrak{M}\} \subset \mathfrak{K}_\aleph \mathfrak{M}$ ist.) Weil $G$ eine Hyper-$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Gruppen ist, gibt es einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Normalteiler $N/H$ von $G \cdot H/H$. Ferner ist $N/H$ ein $\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Normalteiler von $P/H$, da alle Gruppen $X \cdot H/H$ mit $X \in \mathfrak{M}$ und $X \neq G$ den Normalteiler $N/H$ zentralisieren. Also ist $P$ eine Hyper-$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Gruppe.

Sei nun $\mathfrak{M}$ eine Menge von Hypo-$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Gruppen, $D = \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ ihr direktes Produkt und $1 \neq H$ ein Normalteiler von $D$. Sei $\tau$ der kanonische Isomorphismus von $G \in \mathfrak{M}$ in $D$. Da $H \neq 1$, existiert ein $G \in \mathfrak{M}$ derart, daß $T = \mathfrak{D}(\mathfrak{T})$ mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{M} \setminus G$ und $1 \neq (T^\tau H)/T^\tau$ einem Normalteiler von $G$ isomorph ist. Beschreibe $\iota$ diesen Isomorphismus von $(T^\tau \cdot H)/T^\tau$ in $G$. Da $G$ eine Hypo-$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Gruppe ist, besitzt der Normalteiler $1 \neq N = \big((T^\tau H)/T^\tau\big)^\iota$ von $G$ eine in $G$ normale Untergruppe $W$ derart, daß $N/W$ ein von 1 verschiedener $\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Normalteiler von $G/W$ ist. Sei nun $X = (W \otimes T)^\tau \cap H$ in $D$, so ist $H/X$ ein von 1 verschiedener $\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Normalteiler ($\cong N/W$) von $D/X$ und daher $D$ wieder eine Hypo-$\mathfrak{e}^\mathfrak{a}$-Gruppe. Q.E.D.

Für jede Kardinalzahl $\mathfrak{r}$ sei $\sigma(\mathfrak{r})$ ein Ordnungstyp (oder eine Menge von Ordnungstypen) einer Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{r}$. Sei $\mathfrak{m}$ eine Kardinalzahl oder das Symbol $\infty$.

Dann nennen wir die Klasse $\Sigma$ von Ordnungstypen $\mathfrak{m}$-$\sigma$-abgeschlossen, wenn folgendes gilt:

(a) Ist $\mu < \nu$ und $\nu \in \Sigma$, so ist auch $\mu \in \Sigma$.

(b) Ist $\mathfrak{T}$ eine $\sigma(|\mathfrak{T}|)$-geordnete Menge der Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$ von Elementen aus $\Sigma$, so gehört auch die ordnungstheoretische Summe $\sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \tau$ zu $\Sigma$, vgl. P. S. Alexandroff ([1], Seite 41).

LEMMA 6.6. *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *gruppentheoretische Eigenschaften. Für jede Kardinalzahl* $\mathfrak{r}$ *sei* $\sigma(\mathfrak{r})$ *eine lineare Anordnung einer Menge der Mächtigkeit* $\mathfrak{r}$. *Sei* $\mathfrak{m}$ *eine Kardinalzahl oder das Symbol* $\infty$, $\Sigma$ *eine* $\mathfrak{m}$-$\sigma$-*abgeschlossene Klasse von Ordnungstypen und* $\mathfrak{k}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}, \Sigma)$ *die Klasse aller Gruppen mit* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-$\tau$-*Reihe für* $\tau \in \Sigma$. *Ist dann* $\mathfrak{M}$ *eine Menge von höchstens* $\mathfrak{m}$ *Gruppen aus* $\mathfrak{k}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}, \Sigma)$, *so ist auch das direkte Produkt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ *eine* $\mathfrak{k}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}, \Sigma)$-*Gruppe.*

Beweis: Sei $\mathfrak{M}$ eine $\sigma(|\mathfrak{M}|)$-geordnete Menge der Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$ von Gruppen aus $\mathfrak{k}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}, \Sigma)$. Ferner sei $\mathfrak{N}(G)$ für $G \in \mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-$\tau$-Reihe von $G$ und $\tau \in \Sigma$. Ist $\mathfrak{M}(G) = \{X / X \in \mathfrak{M}$ und $X < G\}$ und $D = \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$, so bilden wir $N(G|A) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(G)) \otimes A$ für alle $A \in \mathfrak{N}(G)$ und alle $G \in \mathfrak{M}$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\iota$ von $N(G|A)$ in $D$, und die Menge aller $N(G|A)'$ bildet eine $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-$\gamma$-Reihe von $D$. Wegen der $\mathfrak{m}$-$\sigma$-Abgeschlossenheit gehört $\gamma$ zu $\Sigma$, und $D$ ist eine $\mathfrak{k}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}, \Sigma)$-Gruppe. Q.E.D.

FOLGERUNG 6.7. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *gruppentheoretische Eigenschaften, so sind die folgenden Gruppenklassen bzgl. (beliebiger) direkter Produkte abgeschlossen:*

(1) *die Klasse aller Gruppen mit aufsteigender* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-*Reihe,*

(2) *die Klasse aller Gruppen mit absteigender* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-*Reihe.*

Beweis: Im ersten Fall ist $\Sigma$ die Klasse aller Ordinalzahlen, und $\sigma$ ordnet jeder Mächtigkeit die Wohlordnungen einer Menge dieser Mächtigkeit zu. Dann ist $\Sigma$ auch $\infty$-$\sigma$-abgeschlossen, und die Behauptung folgt aus Lemma 6.6.

Im zweiten Fall ist $\Sigma$ die Klasse aller Ordnungstypen absteigend wohlgeordneter Mengen und $\sigma$ eine Abbildung, die einer Mächtigkeit $\mathfrak{r}$ die Ordnungstyp aller absteigend wohlgeordneten Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{r}$ zuordnet. Dann ist $\Sigma$ ebenfalls $\infty$-$\sigma$-abgeschlossen, und die Behauptung (2) folgt auch aus dem Lemma 6.6.

SATZ 6.8.

(a) *Seien* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{a}$ *untergruppenvererbliche Eigenschaften. Ist jede nilpotente* $\mathfrak{e}$-*Gruppe eine Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-*Gruppe und ist die Klasse aller Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-*Gruppen Vereinigung eines Turmes residueller, bzgl. der Bildung direkter Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$, *(und die Klasse aller Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-*Gruppen ist ebenfalls* $\mathfrak{u}$).

(b) *Seien* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ *faktoren- und* $\mathfrak{a}$ *untergruppenvererblich. Ist die Klasse aller Hyper-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-*Gruppen Vereinigung eines Turmes residueller bzgl.*

*der Bildung direkter Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(c) *Sei* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ *eine Varietät und* $\mathfrak{a}$ *epimorphismenvererblich. Ist die Klasse aller Hyper-*$\mathfrak{e}^{\alpha}$*-Gruppen Vereinigung eines Turmes residueller bzgl. der Bildung direkter Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(d) *Seien* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{a}$ *untergruppenvererblich. Ist die Klasse aller Gruppen mit aufsteigender* $\mathfrak{e}^{\alpha}$*-Reihe Vereinigung eines Varietätenturmes, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

Anmerkung: (a) und (d) müssen unterschieden werden, da für untergruppenvererbliche Eigenschaften $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ die Klasse der Hyper-$\mathfrak{e}^{\alpha}$-Gruppen i.a. echt in der Klasse der Gruppen mit aufsteigender $\mathfrak{e}^{\alpha}$-Reihe enthalten ist, wie $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{e} = \langle Z(\infty) \rangle$ zeigt.

Beweis: (a) Ist die Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\alpha}$-Gruppen, die alle nilpotenten $\mathfrak{e}$-Gruppen enthält, ein Turm residueller in direkten Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so folgt aus Lemma 6.5 zusammen mit Satz 6.1, daß die Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\alpha}$-Gruppen residuell ist. Aus Folgerung 5.5 erhalten wir dann $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(b) Vererbt sich $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ auf Faktoren und $\mathfrak{a}$ auf Untergruppen und ist die Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\alpha}$-Gruppen ein Turm residueller in direkten Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so ist die Klasse der Hyper-$\mathfrak{e}^{\alpha}$-Gruppen nach Lemma 6.5 und Satz 6.1 selbst residuell. Wegen Folgerung 5.5 ist dann, da nilpotente $\mathfrak{e}$-Gruppen Hyper-$\mathfrak{e}^{1}$-Gruppen sind, $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(c) Sei $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ eine Varietät und $\mathfrak{a}$ epimorphismenabgeschlossen. Ist die Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\alpha}$-Gruppen ein Turm residueller in direkten Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so ist die Klasse aller Hyper-$\mathfrak{e}^{\alpha}$-Gruppen nach Lemma 6.5 und Satz 6.1 selbst residuell, und nach Folgerung 5.11 ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(d) Seien $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ und $\mathfrak{a}$ untergruppenvererblich. Ist die Klasse aller Gruppen mit aufsteigender $\mathfrak{e}^{\alpha}$-Reihe ein Varietätenturm, so ist diese Klasse wegen Lemma 6.5 und Satz 6.1 selbst eine Varietät. Aus Folgerung 5.6 erhalten wir dann $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

Damit ist der Satz 6.8 bewiesen.

SATZ 6.9. *Seien* $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{a}$ *Eigenschaften, die sich auf direkte Produkte vererben, und sei* $\beta$ *eine unendliche Ordinalzahl. Dann gilt:*

(a) *Vererbt sich* $\mathfrak{a}$ *auf epimorphe Bilder und ist* $\mathfrak{e}$ *eine Varietät und ist die Klasse aller Gruppen mit aufsteigender* $\mathfrak{e}^{\alpha}$*-*$\beta$*-Reihe Vereinigung eines Turmes residueller bzgl. der Bildung direkter Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(b) *Vererben sich* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *auf Faktoren und ist die Klasse aller Gruppen mit aufsteigender* $\mathfrak{e}^{\alpha}$*-*$\beta$*-Reihe Vereinigung eines Turmes kartesisch*

*und bzgl. der Bildung direkter Faktoren abgeschlossener Gruppenklassen, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(c) *Vererben sich* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{e}$ *auf Untergruppen und ist die Klasse aller Gruppen mit absteigender* $\mathfrak{e}^{\alpha}$*-*$\beta$*-Reihe Vereinigung eines Turmes residueller Gruppenklassen* $\mathfrak{x}$ *derart, daß epimorphe Bilder freier* $\mathfrak{x}$*-Gruppen wieder* $\mathfrak{x}$*-Gruppen sind, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

Beweis. (a) Aus den Voraussetzungen von (a) sowie Lemma 6.5 und Satz 6.1 folgt, daß die Klasse aller Gruppen mit aufsteigender $\mathfrak{e}^{\alpha}$-$\beta$-Reihe eine residuelle Gruppenklasse ist. Wegen Folgerung 5.10 ist dann $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

(b) Wegen Lemma 6.5 und Satz 6.1 folgt abermals, daß die Klasse aller Gruppen mit aufsteigender $\mathfrak{e}^{\alpha}$-$\beta$-Reihe kartesisch abgeschlossen ist. Nach Folgerung 5.7 ist dann $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u}$.

(c) Aus den Voraussetzungen von (c), Lemma 6.5 und Satz 6.1 folgt, daß die Klasse aller Gruppen mit absteigender $\mathfrak{e}^{\alpha}$-$\beta$-Reihe residuell ist und epimorphe Bilder freier Gruppen wieder enthält. Daher ist nach Folgerung 5.4 auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = \mathfrak{u}$.

## VII. Gruppen mit aufsteigender $\mathfrak{f}$-Reihe

Eine gruppentheoretische Funktion $\mathfrak{f}$ auf einer Gruppenklasse $\mathfrak{k}$ ist eine Vorschrift, die jeder Gruppe $G$ aus $\mathfrak{k}$ eine eindeutig bestimmte Untergruppe $\mathfrak{f}G$ mit

$$(\sigma) \qquad (\mathfrak{f}G)^{\sigma} = \mathfrak{f}(G^{\sigma}) \quad \text{für jeden Isomorphismus } \sigma \text{ von } G$$

zuordnet.

Ist $G$ eine Gruppe der epimorphismenabgeschlossenen Gruppenklasse $\mathfrak{k}$, so definieren wir durch transfinite Induktion die aufsteigende $\mathfrak{f}$-Reihe von $G$:

(1) $\mathfrak{f}_0 G = 1$,

(2) $\mathfrak{f}_{\tau+1} G / \mathfrak{f}_{\tau} G = \mathfrak{f}(G/\mathfrak{f}_{\tau} G)$,

(3) $\mathfrak{f}_{\lambda} G = \bigcup_{\tau<\lambda} \mathfrak{f}_{\tau} G$, wenn $\lambda$ eine Limeszahl ist.

Das Schlußglied der aufsteigenden $\mathfrak{f}$-Reihe $\mathfrak{h}\mathfrak{f}G = \bigcup_{\tau} \mathfrak{f}_{\tau} G$ nennen wir in Analogie zum Hyperzentrum auch das Hyper-$\mathfrak{f}$ von $G$.

Eine Gruppe $G$ heißt $\mathfrak{f}^*_{\beta}$-Gruppe genau dann, wenn $\mathfrak{f}_{\beta} G = G$ ist; für eine $\mathfrak{f}^*_{\beta}$-Gruppe $G$ ist auch $\mathfrak{h}\mathfrak{f}G = G$, und wir nennen dann $G$ eine Hyper-$\mathfrak{f}^*$-Gruppe.

Zu jeder gruppentheoretischen Funktion $\mathfrak{f}$ gibt es genau eine Eigenschaft $\mathfrak{f}^*$. Umgekehrt gibt es zu einer Eigenschaft $\mathfrak{e}$ im allgemeinen mehrere

Funktionen $\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}^* = \mathfrak{e}$, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\mathfrak{f}(1)\, G = \begin{cases} G, & \text{wenn } G \text{ abelsch ist,} \\ 1, & \text{wenn } G \text{ nicht abelsch ist,} \end{cases}$$

$$\mathfrak{f}(2)\, G = \mathfrak{z}G,$$

$\mathfrak{f}(1)^* = \mathfrak{f}(2)^* =$ Klasse aller abelschen Gruppen.

Zunächst sei $\mathfrak{t}$ die universelle Gruppenklasse.

Dann heißt $\mathfrak{f}$ eine lokale Funktion, wenn $\mathfrak{f}^*$ lokal ist, d.h wenn folgendes gilt:

$G$ ist genau dann eine $\mathfrak{f}^*$-Gruppe, wenn die endlich erzeugbaren Untergruppen von $G$ sämtlich $\mathfrak{f}^*$-Gruppen sind, d.h.

dann und nur dann ist $\mathfrak{f}G = G$, wenn $\mathfrak{f}U = U$ für alle endlich erzeugbaren Untergruppen $U$ von $G$ ist.

Im folgenden Lemma wollen wir die Lokalität von $\mathfrak{f}$ aus reinen Bedingungen an die Funktion $\mathfrak{f}$ herleiten. Insbesondere folgt daraus die Lokalität von $\mathfrak{f} =$ Zentrum oder $\mathfrak{f} =$ Hirsch-Plotkin-Radikal $=$ maximaler, lokal nilpotenter Normalteiler. Der Beweis ist in wesentlichen Teilen schon bei R. Baer ([9], Seite 307 bis 309) zu finden.

LEMMA 7.1. *Die Funktion $\mathfrak{f}$ ist lokal, wenn folgendes gilt:*

(L) *Es ist $x \in \mathfrak{f}G$ dann und nur dann, wenn für jede endlich erzeugte Untergruppe $U$ von $G$ auch $x \in \mathfrak{f}\{U, x\}$ ist; d.h. $\mathfrak{f}$ ist lokal im Sinne von R. Baer* ([9], *Seite* 307).

Beweis: Zunächst leiten wir die folgende Eigenschaft von $\mathfrak{f}$ her:

(U) Ist $U \subseteq G$, so folgt $U \cap \mathfrak{f}G \subseteq \mathfrak{f}U$.

Ist $x \in U \cap \mathfrak{f}G$, so ist auch $x \in \mathfrak{f}\{x, E\}$ für alle endlich erzeugten Untergruppen $E$ von $G$ wegen (L). Insbesondere ist dann aber $x \in \mathfrak{f}\{x, E\}$ für alle endlich erzeugten Untergruppen $E$ von $U$. Aus (L) folgt jetzt wieder, daß $x$ auch Element von $\mathfrak{f}U$ ist. Also ist (U) bewiesen.

Zum Beweis der Untergruppenvererblichket von $\mathfrak{f}^*$ sei $U$ eine Untergruppe der $\mathfrak{f}^*$-Gruppe $G$. Dann gilt wegen (U):

$$U = U \cap G = U \cap \mathfrak{f}G \subseteq \mathfrak{f}U \subseteq U;$$

also ist $U = \mathfrak{f}U$, und $U$ ist eine $\mathfrak{f}^*$-Gruppe. Damit ist $\mathfrak{f}^*$ untergruppenabgeschlossen.

Wir betrachten nun einen Turm von $\mathfrak{f}^*$-Gruppen. Das ist eine Menge $\Theta$ von Untergruppen einer Gruppe mit folgenden Eigenschaften:

(0) $\Theta$ ist nicht leer.

(1) Ist $T \in \Theta$, so ist $T$ eine $\mathfrak{f}^*$-Gruppe.

(2) Sind $S, T \in \Theta$, so folgt $S \subseteq T$ oder $T \subset S$.

Sei $G = \bigcup_{\Theta} T$ die Vereinigung dieser Gruppen. $G$ ist wieder eine Gruppe, und wenn $x \in K \subseteq G$ und $K$ endlich erzeugt ist, so gibt es ein $T \in \Theta$ derart, daß $K \subseteq T$ ist. Weil $T$ eine $\mathfrak{f}^*$-Gruppe ist, folgt nach der eben bewiesenen Untergruppenvererblichkeit von $\mathfrak{f}^*$, daß $K$ eine $\mathfrak{f}^*$-Gruppe ist. Also ist $x \in K = \mathfrak{f}K$ für alle endlich erzeugten, $x$ enthaltenden Untergruppen $K$ von $G$. Aus Voraussetzung (L) folgt dann aber $x \in \mathfrak{f}G$ und daher $\mathfrak{f}G = G$, d.h. $\mathfrak{f}^*$ ist turmvererblich. Nach einem Satz von R. Baer ([5], Satz 6, Seite 345) ist Untergruppen- und Turmvererblichkeit von gruppentheoretischen Eigenschaften mit Lokalität äquivalent. Wir haben also zusammen gezeigt, daß $\mathfrak{f}^*$ und daher per definitionem auch $\mathfrak{f}$ lokal ist.

Anmerkung: Wir betrachten die folgende gruppentheoretische Funktion:

$$\mathfrak{f}G = \begin{cases} G, & \text{wenn } G \text{ abelsch ist,} \\ \mathfrak{z}G, & \text{wenn } G \text{ unendlich, nicht abelsch ist,} \\ 1, & \text{wenn } G \text{ endlich, nicht abelsch ist.} \end{cases}$$

Da $\mathfrak{f}^*$ die Eigenschaft abelsch zu sein ist, ist $\mathfrak{f}$ eine lokale Funktion. Sei $G$ eine unendliche, nilpotente Gruppe und $U$ ein endlicher, nicht abelscher Normalteiler von $G$. Wäre $U \cap \mathfrak{f}G \subseteq \mathfrak{f}U$, so folgt der Widerspruch: $1 = \mathfrak{f}U \supseteq U \cap \mathfrak{f}G = U \cap \mathfrak{z}G \neq 1$.

Also erfüllt diese Funktion keines falls die Bedingung (U) und erst recht nicht die Bedingung (L), obwohl $\mathfrak{f}$ lokal ist. Daher ist (L) nur eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung für die Lokalität von $\mathfrak{f}$.

LEMMA 7.2. *Sei $\mathfrak{f}$ eine gruppentheoretische Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Aus $U \subseteq G$ folgt $U \cap \mathfrak{f}G \subseteq \mathfrak{f}U$.*

(2) *Für jeden Homomorphismus $\eta$ von $G$ ist $(\mathfrak{f}G)^\eta \subseteq \mathfrak{f}(G^\eta)$.*

*Für jede Ordinalzahl $\beta$ vererbt sich dann $\mathfrak{f}_\beta^*$ auf Faktoren, und es gilt:*

($1_\beta$) *Aus $U \subseteq G$ folgt $U \cap \mathfrak{f}_\beta G \subseteq \mathfrak{f}_\beta U$.*

($2_\beta$) *Für jeden Homomorphismus $\eta$ von $G$ ist $(\mathfrak{f}_\beta G)^\eta \subseteq \mathfrak{f}_\beta(G^\eta)$.*

Beweis: Sei $W \subseteq \mathfrak{f}G$, $U \subseteq G$ und $\eta$ ein Homomorphismus von $U$. Aus (1) folgt dann $W \cap U \subseteq \mathfrak{f}G \cap U \subseteq \mathfrak{f}U$, also ist $(W \cap U)^\eta \subseteq (\mathfrak{f}U)^\eta$. Anwendung von (2) ergibt dann:

$$\text{(i)} \qquad (W \cap U)^\eta \subseteq \mathfrak{f}(U^\eta).$$

Zum Beweis von ($1_\beta$) durch transfinite Induktion ist (1) die Verankerung. Wir nehmen für $\tau > 0$ an, daß $U \cap \mathfrak{f}_\nu G \subseteq \mathfrak{f}_\nu U$ für alle $\nu < \tau$ ist. Ist $\tau = \lambda$ eine Limeszahl, so folgt

$$U \cap \mathfrak{f}_\lambda G = U \cap \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{f}_\nu G = \bigcup_{\nu<\lambda} (U \cap \mathfrak{f}_\nu G) \subseteq \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{f}_\nu U = \mathfrak{f}_\lambda U.$$

Falls $\tau$ keine Limeszahl ist, folgt nach Induktionsannahme $U \cap \mathfrak{f}_{\tau-1}G \subseteq \mathfrak{f}_{\tau-1}U$. Also existiert ein Epimorphismus $\eta$ von $U/(U \cap \mathfrak{f}_{\tau-1}G)$ auf $U/\mathfrak{f}_{\tau-1}G$. Dann sei $\iota$ der kanonische Isomorphismus von $(U \cap \mathfrak{f}_\tau G)/(U \cap \mathfrak{f}_{\tau-1}G)$ auf $\mathfrak{f}_{\tau-1}G(U \cap \mathfrak{f}_\tau G)/\mathfrak{f}_{\tau-1}G$. Damit folgt:

$$[(U \cap \mathfrak{f}_\tau G)/(U \cap \mathfrak{f}_{\tau-1}G)]^\iota = \mathfrak{f}_{\tau-1}G(U \cap \mathfrak{f}_\tau G)/\mathfrak{f}_{\tau-1}G \subseteq \mathfrak{f}_\tau G/\mathfrak{f}_{\tau-1}G = \mathfrak{f}(G/\mathfrak{f}_{\tau-1}G).$$

Anwendung von (i) ergibt.

$$(U \cap \mathfrak{f}_\tau G)\cdot \mathfrak{f}_{\tau-1}U/\mathfrak{f}_{\tau-1}U \subseteq \mathfrak{f}(U/\mathfrak{f}_{\tau-1}U) = \mathfrak{f}_\tau U/\mathfrak{f}_{\tau-1}U.$$

Daraus folgt $U \cap \mathfrak{f}_\tau G \subseteq \mathfrak{f}_\tau U$ und $(1_\beta)$ ist bewiesen.

Um $(2_\beta)$ durch transfinite Induktion zu beweisen, benutzen wir (2) als Verankerung. Angenommen, für $\tau > 0$ sei schon $(\mathfrak{f}_\nu G)^\eta \subseteq \mathfrak{f}_\nu(G^\eta)$ für alle $\nu < \tau$. Ist $\tau = \lambda$ eine Limeszahl, so folgt

$$(\mathfrak{f}_\lambda G)^\eta = (\bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{f}_\nu G)^\eta = \bigcup_{\nu<\lambda} (\mathfrak{f}_\nu G)^\eta \subseteq \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{f}_\nu(G^\eta) = \mathfrak{f}_\lambda(G^\eta).$$

Wenn $\tau$ keine Limeszahl ist, folgt nach Induktionsannahme, daß $(\mathfrak{f}_{\tau-1}G)^\eta \subseteq \mathfrak{f}_{\tau-1}(G^\eta)$ ist. Also existiert ein Epimorphismus von $G^\eta/(\mathfrak{f}_{\tau-1}G)^\eta$ auf $G^\eta/\mathfrak{f}_{\tau-1}(G^\eta)$. Aber $G^\eta/(\mathfrak{f}_{\tau-1}G)^\eta$ ist ein epimorphes Bild von $G/\mathfrak{f}_{\tau-1}G$. Daher gibt es sogar einen Epimorphismus von $G/\mathfrak{f}_{\tau-1}G$ auf $G^\eta/\mathfrak{f}_{\tau-1}(G^\eta)$. Dann ist das Bild von $\mathfrak{f}(G/\mathfrak{f}_{\tau-1}G) = \mathfrak{f}_\tau G/\mathfrak{f}_{\tau-1}G$ unter diesem Epimorphismus gerade $(\mathfrak{f}_\tau G)^\eta \mathfrak{f}_{\tau-1}(G^\eta)/\mathfrak{f}_{\tau-1}(G^\eta)$. Diese Gruppe liegt wegen (i) in $\mathfrak{f}\big(G^\eta/\mathfrak{f}_{\tau-1}(G^\eta)\big) = \mathfrak{f}_\tau(G^\eta)/\mathfrak{f}_{\tau-1}(G^\eta)$. Daraus folgt die Behauptung $(2_\beta)$.

Aus $(1_\beta)$ und $(2_\beta)$ folgt unmittelbar, daß sich $\mathfrak{f}^*_\beta$ auf Faktoren vererbt.

Hilfssatz 7.3. *Sei $\aleph$ eine unendliche Kardinalzahl, $\mathfrak{M}$ eine Menge von Gruppen und $\mathfrak{F}$ eine Abbildung von $\mathfrak{M}$, die jedem $G \in \mathfrak{M}$ einen Normalteiler $\mathfrak{F}G$ von $G$ zuordnet. Dann gilt*

$$\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}(G/\mathfrak{F}G) \cong (\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph} G)/(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}\mathfrak{F}G).$$

Beweis: Sei $g \in \underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph} G$. Dann und nur dann liegt $g$ in $\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}\mathfrak{F}G$, wenn jedes $gG$ in $\mathfrak{F}G$ liegt. Die Abbildung $g$ auf $g^\tau$ mit $g^\tau G = gG\cdot\mathfrak{F}G$ ist also ein Isomorphismus von $(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph} G)/(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}\mathfrak{F}G)$ auf $\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}(G/\mathfrak{F}G)$. Q.E.D.

Hilfssatz 7.4. *Ist $\mathfrak{f}$ eine gruppentheoretische Funktion, $\aleph$ eine Kardinalzahl, $\mathfrak{M}$ eine Menge von Gruppen und gilt für epimorphe Bilder $\mathfrak{E}G$ von $G \in \mathfrak{M}$ die Gleichung $\mathfrak{f}(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}\mathfrak{E}G) \cong \underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}\mathfrak{f}(\mathfrak{E}G)$, so folgt:*

(1) $\mathfrak{f}_n(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph} G) \cong \underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}(\mathfrak{f}_n G)$ *für alle natürlichen Zahlen $n$.*

(2) $\mathfrak{f}_\omega(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph} G) \cong \bigcup_n \underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}_\aleph}(\mathfrak{f}_n G)$.

Beweis durch vollständige Induktion: Setzen wir $\mathfrak{E}G = G$ für alle $G \in \mathfrak{M}$, so ist (1) nach Voraussetzung für $n = 1$ erfüllt. Sei nun (1) für

$n-1$ bewiesen und $\iota$ der durch Hilfssatz 7.3 definierte kanonische Isomorphismus von $\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}(G/\mathfrak{f}_{n-1}G)$ auf $(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}G)/\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{f}_{n-1}G)$. Dann folgt [1]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_n(\mathfrak{K}G)/\mathfrak{f}_{n-1}(\mathfrak{K}G) &= \mathfrak{f}\big(\mathfrak{K}G/\mathfrak{f}_{n-1}(\mathfrak{K}G)\big) = \mathfrak{f}\big(\mathfrak{K}G/\mathfrak{K}(\mathfrak{f}_{n-1}G)\big)^{\varkappa}\\ &= \mathfrak{f}\big(\mathfrak{K}(G/\mathfrak{f}_{n-1}G)\big)^{\iota\varkappa} = \Big(\mathfrak{K}\big(\mathfrak{f}(G/\mathfrak{f}_{n-1}G)\big)\Big)^{\mu\cdot\iota\cdot\varkappa} = \big(\mathfrak{K}(\mathfrak{f}_nG/\mathfrak{f}_{n-1}G)\big)^{\mu\cdot\iota\cdot\varkappa}\\ &= [\mathfrak{K}(\mathfrak{f}_nG)/\mathfrak{K}(\mathfrak{f}_{n-1}G)]^{\iota^{-1}\cdot\mu\cdot\iota\cdot\varkappa} = \big[\mathfrak{K}(\mathfrak{f}_nG)/\big(\mathfrak{f}_{n-1}(\mathfrak{K}G)\big)\big]^{\varkappa^{-1}\cdot\iota^{-1}\cdot\mu\cdot\iota\cdot\varkappa}.\end{aligned}$$

Dabei ist $\varkappa$ der nach Induktionsannahme existierende Isomorphismus von $\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}G/\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{f}_{n-1}G)$ auf $\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}G/\mathfrak{f}_{n-1}(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}G)$ und $\mu$ der nach Voraussetzung existierende Isomorphismus von $\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}\big(\mathfrak{f}(G/\mathfrak{f}_{n-1}G)\big)$ auf $\mathfrak{f}\big(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}(G/\mathfrak{f}_{n-1}G)\big)$. Aus der obigen Identität folgt dann sowohl (1) als auch (2).

LEMMA 7.5. *Sei $\mathfrak{f}$ eine gruppentheoretische Funktion mit:*

(1) *Ist $U \subseteq G$, so folgt $U \cap \mathfrak{f}G \subseteq \mathfrak{f}U$.*

(2) *Ist $\eta$ ein Epimorphismus von $G$, so ist $(\mathfrak{f}G)^{\eta} \subseteq \mathfrak{f}(G^{\eta})$.*

(3) *Ist $\mathfrak{M}$ eine Gruppenmenge, so folgt $\mathfrak{f}(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}G) = \underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{f}G)$.*

*Dann ist für jede natürliche Zahl $n$ die Klasse aller $\mathfrak{f}_n^*$-Gruppen eine Varietät und $\mathfrak{f}_n$ insbesondere eine lokale Funktion.*

Beweis: Aus (1) und (2) folgt nach Lemma 7.2 die Vererblichkeit von $\mathfrak{f}_n^*$ auf Faktoren. Wegen (3), zusammen mit Hilfssatz 7.4 (1), vererbt sich $\mathfrak{f}_n^*$ auch auf kartesische Produkte. Das ergibt den ersten Teil der Behauptung. Da Varietäten immer lokal sind, ist $\mathfrak{f}_n$ auch eine lokale Funktion. Q.E.D.

Anmerkung 1 zu Lemma 7.5: Um unter den gegebenen Voraussetzungen von Lemma 7.5 die Lokalität der Funktion $\mathfrak{f}_n$ folgern zu können, muß $n$ eine natürliche Zahl sein, wie das Beispiel $\mathfrak{f} = \mathfrak{z}$ = Zentrum zeigt. Wegen der Existenz von lokal nilpotenten, nicht hyperzentralen Gruppen ist schon $\mathfrak{f}_\omega$ keine lokale Funktion mehr.

Die folgenden drei Beispiele zeigen die Unentbehrlichkeit der Bedingungen (1), (2) oder (3) von Lemma 7.5:

(1) Für die Klasse der abelschen Gruppen sei $\mathfrak{f}G$ = Produkt aller teilbaren Untergruppen von $G$. (Eine Gruppe $G$ heißt *teilbar*, wenn für jede natürliche Zahl $n$ die Gleichung $G^n = G$ gilt.) Beispielsweise für eine Prüfersche Gruppe $P^\infty$ sieht man, daß (1) (von Lemma 7.5) nicht erfüllt ist, wenn man als Untergruppe eine zyklische, von 1 verschiedene $p$-Gruppe wählt. Also ist $\mathfrak{f}$ auch keine lokale Funktion. Da epimorphe Bilder von teilbaren Gruppen wieder teilbar sind, ist (2) erfüllt. Ebenso sind kartesische Produkte von teilbaren Gruppen teilbar, woraus folgt, daß auch (3) gilt.

---

[1] Der „Index" $\mathfrak{M}$ ist hier zur Abkürzung weggelassen!

(2) Für eine Primzahl $p$ sei $\mathfrak{f}G = \bigcap_P \mathfrak{c}P$, wobei $P$ alle $p$-Untergruppen von $G$ durchläuft. Diese Funktion $\mathfrak{f}$ erfüllt die Bedingungen (1) und (3); jedoch ist (2) nicht erfüllt, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $G$ das freie Produkt zweier unendlich, zyklischer und $B$ das freie Produkt zweier zyklischer $p$-Gruppen. Dann ist $B$ epimorphes Bild von $G$, aber $\mathfrak{f}G = G$ und $\mathfrak{f}B = 1$.

(3) Ist $\mathfrak{f}G = \mathfrak{h}\mathfrak{z}G =$ Hyperzentrum von $G$, so sind (1) und (2) erfüllt, aber (3) ist falsch, und Hyperzentralität ist auch nicht lokal.

Anmerkung 2 zu Lemma 7.5: Fordert man statt (1) die Bedingung:

(U*) Aus $U \subseteq G$ folgt $U \cap \mathfrak{f}G = \mathfrak{f}U$,

so ist $\mathfrak{f}$ schon deshalb lokal.

Die Untergruppenvererblichkeit folgt aus dem Lemma 7.2. Ist $\Theta$ ein Turm von $\mathfrak{f}^*$-Untergruppen, so ist $\mathfrak{f}T = T$ für $T \in \Theta$, also für $V = \bigcup_\Theta T$ dann $T \cap \mathfrak{f}V = \mathfrak{f}T = T$ und daher $T \subseteq \mathfrak{f}V$ für alle $T \in \Theta$. Damit ist auch $\mathfrak{f}V = V$.

Die Bedingung (U*) ist jedoch sehr stark. Sind nämlich die zyklischen Gruppen $\mathfrak{f}^*$-Gruppen, so ist schon $\mathfrak{f}G = G$ für alle Gruppen $G$:

Wenn $g \in G$ ist, folgt $\mathfrak{f}\{g\} = \{g\}$ und wegen (U*) dann $g \in \{g\} = \mathfrak{f}\{g\} \subseteq \mathfrak{f}G$, also $G = \mathfrak{f}G$.

## VIII. Endlichkeitsbedingungen für $\mathfrak{f}$-Reihen in kartesisch abgeschlossenen Gruppenklassen

Zum Beweis des Satzes 8.3 wird das folgende mengentheoretische Lemma wichtig sein.

LEMMA 8.1. *Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge der Mächtigkeit $\aleph$. Dann gibt es eine Menge $\mathfrak{P}$ von Teilmengen von $\mathfrak{M}$ mit:*

(a) $|\mathfrak{P}| = 2^{\aleph}$.

[(b) *Ist $\mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$, so ist $|\mathfrak{T}| = \aleph$.*]

(c) *Sind $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$ und ist $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{T}$, so existieren Teilmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| = \aleph$, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{S} = \emptyset$.*

Beweis: Da $|\mathfrak{M}| = \aleph$ und $\aleph \cdot \aleph = \aleph$, existiert eine Menge $\mathfrak{V}$ mit:

(0) Ist $\mathfrak{J} \in \mathfrak{V}$, so ist $\mathfrak{J}$ Teilmenge von $\mathfrak{M}$.

(1) $|\mathfrak{V}| = \aleph$.

(2) Aus $\mathfrak{J} \in \mathfrak{V}$ folgt $|\mathfrak{J}| = \aleph$.

(3) Sind $\mathfrak{J}, \mathfrak{K} \in \mathfrak{V}$, so ist ($\mathfrak{J} \neq \mathfrak{K}$ und) $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{K} = \emptyset$.

(4) $\bigcup_{\mathfrak{V}} \mathfrak{J} = \mathfrak{M}$.

Weil $2 \cdot \aleph = \aleph$ und $|\mathfrak{J}| = \aleph$ für $\mathfrak{J} \in \mathfrak{B}$, existieren $\mathfrak{J}(1)$ und $\mathfrak{J}(2)$ mit $|\mathfrak{J}(1)| = |\mathfrak{J}(2)| = \aleph$, $\mathfrak{J}(1) \cup \mathfrak{J}(2) = \mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}(1) \cap \mathfrak{J}(2) = \emptyset$.

Sei nun $\mathfrak{P}$ die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$ mit

(T) Es ist $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(1)$ oder $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(2)$ für alle $\mathfrak{J} \in \mathfrak{B}$.

Dann besteht $\mathfrak{P}$ aus $2^{\aleph}$ Elementen $\mathfrak{T}$ nach Potenzmengendefinition — vgl. etwa P. S. Alexandroff ([1], Seite 68). Wenn $\mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$, hat $\mathfrak{T}$ die Mächtigkeit $\aleph$, da entweder $\mathfrak{J}(1) \leqslant \mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{J}(2) \leqslant \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge der Menge $\mathfrak{M}$, also einer Menge der Mächtigkeit $\aleph$ ist.

Ist nun $\mathfrak{T}, \mathfrak{K} \in \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{K}$, so existiert ein $t$ mit o.B.d.A. $t \in \mathfrak{T}$ aber $t \notin \mathfrak{K}$. Da o.B.d.A. $t \in \mathfrak{J}(1)$, ist $\mathfrak{J}(1) \leqslant \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{J}(1) \cap \mathfrak{K} = \emptyset$. Umgekehrt ist dann auch $\mathfrak{J}(2) \leqslant \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}(2) \cap \mathfrak{T} = \emptyset$. Also ist auch (c) erfüllt.

Definition 8.2; vgl. L. Fuchs ([11], Seite 54, 37, 29, 30). Ist $p$ eine Primzahl, so ist die abelsche Gruppe $A$ eine *elementar abelsche $p$-Gruppe*, wenn $A^p = \{a^p / a \in A\} = 1$ ist.

Eine Gruppe $A$ ist eine *freie abelsche Gruppe*, wenn $A$ ein direktes Produkt unendlicher, zyklischer Gruppen ist.

Eine Teilmenge $U$ einer abelschen Gruppe heißt *unabhängig*, wenn die von $U$ erzeugte Untergruppe direktes Produkt der Elemente aus $U$ ist.

Der Rang einer abelschen Gruppe ist die *Mächtigkeit* einer maximalen, unabhängigen Teilmenge von Elementen unendlicher oder Primzahlpotenzordnung.

Satz 8.3. *Ist $\mathfrak{M}$ eine unendliche Menge von Gruppen $\neq 1$, $\aleph$ eine Kardinalzahl $\leqslant |\mathfrak{M}|$ und $G = \mathfrak{K}(\mathfrak{M})/\mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$, so sind äquivalent:*

(1) *$G$ besitzt keinen von 1 verschiedenen Normalteiler der Mächtigkeit $< 2^{\aleph}$.*

(2) *$G$ besitzt keinen von 1 verschiedenen Normalteiler mit Erzeugendensystem der Mächtigkeit $< 2^{\aleph}$.*

(3) *Jeder von 1 verschiedene Normalteiler von $G$ enthält eine elementar abelsche $p$-Gruppe vom Range $\aleph$ oder eine freie abelsche Gruppe vom Range $\aleph$.*

(4) *Ist $1 \neq N$ ein Normalteiler von $G$, so ist $|G/\mathfrak{c}N| \geqslant 2^{\aleph}$.*

(5) *Das Zentrum $\mathfrak{z}G$ von $G$ ist 1.*

(6) *Es ist $\mathfrak{z}X \neq 1$, für weniger als $\aleph$ Gruppen $X$ aus $\mathfrak{M}$.*

Beweis: Ist $\mathfrak{z}G \neq 1$, so gibt es ein Element $g \in \mathfrak{z}(\mathfrak{K}(\mathfrak{M}))$ mit $gX \neq 1$ für mindestens $\aleph$ Gruppen $X \in \mathfrak{M}$. Gibt es nämlich kein solches Element $g$, so ist für jedes $f \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ mit $f \notin \mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$ auch $fX \notin \mathfrak{z}X$ für mindestens $\aleph$ Gruppen $X \in \mathfrak{M}$. Dann existiert zu $fX \notin \mathfrak{z}X$ ein $aX \in X$ derart, daß $fX \circ aX \neq 1$ ist. Daher gilt für $a \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ mit $aX = 1$, wenn $fX \in \mathfrak{z}X$, daß $fX \circ aX \neq 1$ für $\aleph$ Gruppen $X \in \mathfrak{M}$, also $f \circ a \not\equiv 1 \bmod \mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$ ist. Folglich ist $f \cdot \mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$

nicht in $\mathfrak{z}G$ für alle $f \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ mit $f \notin \mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M}$ und daher $\mathfrak{z}G = 1$, was der Voraussetzung widerspricht.

Da $1 \neq gX \in \mathfrak{z}X$ für mindestens $\aleph$ Gruppen $X \in \mathfrak{M}$, ist $\mathfrak{z}X \neq 1$ für mindestens $\aleph$ Gruppen $X \in \mathfrak{M}$. Also folgt (5) aus (6). Die von $g \cdot \mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M}$ erzeugte Gruppe ist ein von 1 verschiedener, zyklischer, zentraler Normalteiler von $G$. Er hat natürlich höchstens abzählbare Mächtigkeit, wird von einem Element erzeugt, enthält eine elementar abelsche oder eine freie abelsche Gruppe vom Range 1, und $G/\mathfrak{c}\{g\mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M}\} = 1$ folgt wegen $g \cdot \mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \in \mathfrak{z}G$. Daher folgt (5) aus allen anderen Bedingungen.

Ist nun umgekehrt $\mathfrak{z}X \neq 1$ für mindestens $\aleph$ Gruppen $X \in \mathfrak{M}$, so existiert ein Element $z \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ derart, daß $zX \in \mathfrak{z}X$ für alle Gruppen $X \in \mathfrak{M}$ und $zX \neq 1$ für alle Gruppen $X \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{z}X \neq 1$ ist. Dann ist aber $1 \not\equiv z \bmod \mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M}$ und $1 \neq z \cdot \mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \in \mathfrak{z}G$, also $\mathfrak{z}G \neq 1$. Somit sind (5) und (6) äquivalent. Sei wieder $\mathfrak{z}X \neq 1$ für weniger als $\aleph$ Gruppen $X$ aus $\mathfrak{M}$. Ist $1 \neq N$ ein Normalteiler von $G$, so betrachten wir $G/\mathfrak{c}N$. Wenn $G = \mathfrak{c}N$ ist, ist $1 \neq N \subseteq \mathfrak{z}G$, also $\mathfrak{z}G \neq 1$. Aus der schon bewiesenen Äquivalenz von (5) und (6) folgt der Widerspruch $\mathfrak{z}G = 1$. Daher ist $G/\mathfrak{c}N \neq 1$, und es gibt ein $g \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ mit $g\mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \notin \mathfrak{c}N$. Folglich existiert auch ein $b \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ mit $b\mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \in N$ und $b^g \not\equiv b \bmod \mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M}$. Damit bilden wir die Menge $\mathfrak{M}^*$ aller $X$ aus $\mathfrak{M}$ mit $bX^{gX} \neq bX$. Diese Menge hat nach Konstruktion eine Mächtigkeit $\geqslant \aleph$. Anwendung von Lemma 8.1 ergibt die Existenz einer Menge $\mathfrak{P}$ von Teilmengen von $\mathfrak{M}^*$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(a) $|\mathfrak{P}| = 2^\aleph$.

[(b) Ist $\mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$, so ist $|\mathfrak{T}| = \aleph$.]

(c) Sind $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$ und ist $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{T}$, so existieren Teilmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| = \aleph$, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{S} = \emptyset$.

Ist nun $\mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$, so sei $f_\mathfrak{T} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ definiert durch:

$$f_\mathfrak{T} X = \begin{cases} gX, & \text{wenn } X \in \mathfrak{T}, \\ 1, & \text{wenn } X \in \mathfrak{M},\ X \notin \mathfrak{T}. \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist $(f_\mathfrak{T}^{-1} \cdot b \cdot f_\mathfrak{T})X = (f_\mathfrak{T} X)^{-1} \cdot bX \cdot f_\mathfrak{T} X \neq bX$ dann und nur dann, wenn $X \in \mathfrak{T}$. Wenn $\mathfrak{K}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{T}$ ist, so ist

$$(f_\mathfrak{T} X)^{-1} \cdot bX \cdot f_\mathfrak{T} X \neq (f_\mathfrak{K} X)^{-1} \cdot bX \cdot f_\mathfrak{K} X$$

für $\aleph$ Gruppen $X \in \mathfrak{M}$ (wegen Bedingung (c)). Daraus folgt schließlich, daß $f_\mathfrak{T}^{-1} \cdot b \cdot f_\mathfrak{T} \not\equiv f_\mathfrak{K}^{-1} \cdot b \cdot f_\mathfrak{K} \bmod \mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M}$ für $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{P}$ ist. Weil $b\mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \in N$ und daher auch $f_\mathfrak{T}^{-1} \cdot b \cdot f_\mathfrak{T}\mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \in N$ für alle $\mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$ ist, hat $N$ also wegen (a) eine Mächtigkeit $\geqslant 2^\aleph$. Daher ist (1) aus (6) hergeleitet. Weil aber sogar $f_\mathfrak{T}\mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \not\equiv f_\mathfrak{K}\mathfrak{K}_\aleph\mathfrak{M} \bmod \mathfrak{c}N$ ist, enthält $G/\mathfrak{c}N$ wenigstens $2^\aleph$ voneinander verschiedene Elemente. Damit haben wir auch (4) aus (6) hergeleitet, und die Äquivalenz von (1), (4), (5) und (6) ist bewiesen.

Wir setzen wieder die äquivalenten Bedingungen (1), (4), (5) und (6) voraus. Sei $1 \neq N$ ein Normalteiler von $G$ und $\tilde{a}$ ein von 1 verschiedenes Element von $N$. Ferner sei $a \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ ein Repräsentant von $\tilde{a}$ mit $\tilde{a} = a\,\mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$. Da $\tilde{a} \neq 1$ ist, ist $|\mathfrak{T}a| \geqslant \aleph$, und die Menge

$$\mathfrak{M}^* = \langle X / X \in \mathfrak{M},\ X \in \mathfrak{T}a,\ {}_3X = 1\rangle = \langle X / X \in \mathfrak{M},\ aX \neq 1,\ {}_3X = 1\rangle$$

— vgl. hierzu Bezeichnungen und Definitionen — hat wegen (6) die Mächtigkeit $\geqslant \aleph$. Da $\aleph \cdot \aleph = \aleph$, können wir $\mathfrak{M}^*$ in eine Menge $\mathfrak{P}$ von $\aleph$ disjunkten Teilmengen der Mächtigkeit $\geqslant \aleph$ zerlegen. Wegen $aX \neq 1$ und ${}_3X = 1$ für $X \in \mathfrak{M}^*$ existiert ein $gX \in X$ mit $aX^{gX} = bX \neq aX$. Dann definieren wir $y_{\mathfrak{T}}, g_{\mathfrak{T}} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ für alle $\mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$ durch:

$$y_{\mathfrak{T}}X = \begin{cases} aX, & \text{wenn } X \notin \mathfrak{T}, \\ bX, & \text{wenn } X \in \mathfrak{T}, \end{cases}$$

$$g_{\mathfrak{T}}X = \begin{cases} gX, & \text{wenn } X \in \mathfrak{T}, \\ 1, & \text{wenn } X \notin \mathfrak{T}. \end{cases}$$

Da $y_{\mathfrak{T}} = g_{\mathfrak{T}}^{-1} a\, g_{\mathfrak{T}}$ und $\tilde{a}$ aus $N$ ist, liegt das Element $\tilde{y}_{\mathfrak{T}} = y_{\mathfrak{T}}\mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$ ebenfalls in $N$, und definieren wir $x_{\mathfrak{T}}$ für alle $\mathfrak{T} \in \mathfrak{P}$ durch

$$x_{\mathfrak{T}}X = \begin{cases} bX \cdot aX^{-1}, & \text{wenn } X \in \mathfrak{T}, \\ 1 & \text{sonst}, \end{cases}$$

und $\tilde{x}_{\mathfrak{T}} = x_{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$, so ist $\tilde{x}_{\mathfrak{T}} = \tilde{y}_{\mathfrak{T}}\,\tilde{a}^{-1}$ aus $N$.

Da $bX \cdot aX^{-1} = aX^{gX} \cdot aX^{-1} \neq 1$ für $X \in \mathfrak{T}$ und $|\mathfrak{T}| \geqslant \aleph$ ist, so ist $\tilde{x}_{\mathfrak{T}}$ ein von 1 verschiedenes Element von $N$. Also ist $\mathfrak{X} = \langle \tilde{x}_{\mathfrak{T}} / \mathfrak{T} \in \mathfrak{P}\rangle$ eine Menge von $\geqslant \aleph$ voneinander verschiedenen Elementen aus $N$.

Enthält $\mathfrak{X}$ keine $\aleph$ Elemente der Ordnung 0 oder $\leqslant n$ für eine natürliche Zahl $n$, so gibt es eine Menge $\mathfrak{Q}$ von Teilmengen von $\mathfrak{P}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(d) $|\mathfrak{Q}| = \aleph$.

(e) Ist $\mathfrak{R} \in \mathfrak{Q}$, so ist $|\mathfrak{R}| = \aleph_0$.

(f) $\bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathfrak{Q}} \mathfrak{R} = \mathfrak{P}$.

(g) Ist $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{S} \in \mathfrak{Q}$, so ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} = \emptyset$.

(h) Ist $\mathfrak{R} \in \mathfrak{Q}$ und $n$ eine natürliche Zahl, so existiert ein $\mathfrak{T} \in \mathfrak{R}$ mit $o(x_{\mathfrak{T}}) \geqslant n$.

Nun betrachten wir die Menge $\mathfrak{W}$ aller Elemente $\tilde{w}_{\mathfrak{S}}$ für $\mathfrak{S} \in \mathfrak{Q}$ der folgenden Form:

$$w_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{T}) = \begin{cases} x_{\mathfrak{T}}, & \text{wenn } \mathfrak{T} \in \mathfrak{X}, \\ 1 & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit $\tilde{w}_{\mathfrak{S}} = w_{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{K}_{\aleph}\mathfrak{M}$.

Wegen (h) haben alle Elemente aus $\mathfrak{W}$ die Ordnung 0. Aus (d) und (g) folgt, daß $|\mathfrak{W}| = \aleph$ ist. Nach Konstruktion sind alle $w_{\mathfrak{S}}$ Konjugierte

von $a$. Da $\tilde{a} \in N$, ist also auch $\mathfrak{B}$ eine Teilmenge von $N$. Daher können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß alle Elemente aus $\mathfrak{X}$ gleiche Ordnung haben.

Nach Konstruktion sind alle Elemente aus $\mathfrak{X}$ unabhängig und miteinander vertauschbar.

Im ersten Fall ist daher $\mathfrak{X}$ eine freie Basis einer freien abelschen Gruppe von Range $\aleph$.

Im zweiten Fall gibt es eine von 1 verschiedene Primzahl $p$ derart, daß alle Elemente aus $\mathfrak{X}$ eine durch $p$ teilbare Ordnung haben. Nun bilden wir die Menge $\mathfrak{B}$ aller $\tilde{x}^k$ mit $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ und $k = o(\tilde{x})/p$. Dann ist die von $\mathfrak{B}$ erzeugte Gruppe ebenfalls eine Untergruppe von $N$ und zwar eine elementar abelsche $p$-Gruppe vom Range $\aleph$. Also ist die Äquivalenz von (3) bis (6) bewiesen.

Für eine Kardinalzahl $\aleph$ gilt $\aleph_0 \leqslant \aleph < 2^{\aleph}$, vgl. etwa P. S. Alexandroff ([1], Seite 68). Also ist $2^{\aleph}$ eine überabzählbare Kardinalzahl. Für überabzählbare Gruppen ist aber die Mächtigkeit eines Erzeugendensystems immer gleich der Mächtigkeit der ganzen Gruppe. Daraus folgt die Äquivalenz von (1) und (2), und die Äquivalenz aller sechs Bedingungen von Satz 8.3 ist bewiesen.

Um die nächsten Sätze möglichst allgemein formulieren zu können, führen wir die folgenden Bezeichnungen und Definitionen ein:

Ist $\mathfrak{e}$ eine gruppentheoretische Eigenschaft und $G$ eine Gruppe, so sei $\mathfrak{me}(G)$ das Minimum aller Mächtigkeiten $\mathfrak{r}$ mit der Eigenschaft:

Es gibt Untergruppen $U$ von $G$ mit $|U| = \mathfrak{r}$, $U$ ist keine $\mathfrak{e}$-Gruppe und $\mathfrak{me}(G) = 0$, wenn alle Untergruppen von $G$ die Eigenschaft $\mathfrak{e}$ haben. Wir nennen $U$ mit $|U| = \mathfrak{me}(G)$ dann eine $\mathfrak{me}$-*Untergruppe*.

Ist $\mathfrak{e}_i$ eine gruppentheoretische Eigenschaft von $\mathfrak{k}_i$-Gruppen für $i \in \mathfrak{J}$, so sei $s(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{k}_i) = \operatorname{Sup} \langle \mathfrak{me}_i(G)/G \in \mathfrak{k}_i,\ i \in \mathfrak{J} \rangle$ das Supremum dieser Mächtigkeiten $\mathfrak{me}_i(G)$. Dabei kann $s(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{k}_i)$ eine Kardinalzahl, 0 oder das Symbol $\infty$, d.h. größer als jede Kardinalzahl sein.

Sind $\mathfrak{e}_i$ lokale Eigenschaften, so ist $s(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{k}_i) \leqslant \aleph_0$.

Sei $\mathfrak{s}$ eine Kardinalzahl, 0 oder $\infty$, $\aleph$ eine Kardinalzahl und $\mathfrak{x}$ eine Gruppenklasse. Dann ist der $\aleph$-$\mathfrak{s}$-Rand von $\mathfrak{x}$ die kleinste Gruppenklasse $\mathfrak{y}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Ist $U$ eine Untergruppe einer $\mathfrak{x}$-Gruppe mit $|U| \leqslant \mathfrak{s}$, so ist $U \in \mathfrak{y}$.

(2) Kartesische Produkte abzählbar vieler $\mathfrak{y}$-Gruppen der Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{s}$ und deren epimorphe Bilder sind $\mathfrak{y}$-Gruppen.

(3) Ist $G$ eine $\mathfrak{y}$-Gruppe der Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{s}^{\aleph_0}$, und ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von $\aleph$ zu $G$ isomorphen Gruppen, so ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})/\mathfrak{B}(\mathfrak{M}) \in \mathfrak{y}$.

Diese Klasse $\mathfrak{y}$ wird mit $\mathfrak{r}(\mathfrak{x}, \aleph, \mathfrak{s}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{x})$ bezeichnet.

Weiterhin sei $\mathcal{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

LEMMA 8.4. *Sei* $\mathfrak{f}$ *eine gruppentheoretische Funktion, und für direkte Produkte abzählbarer Gruppenmengen* $\mathfrak{M}$ *sei* $\mathfrak{f}(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{D}}G) \underset{\mathfrak{M}}{\cong} \mathfrak{D}(\mathfrak{f}G)$. *Enthält die Gruppenklasse* $\mathfrak{k}$ *mit einer Gruppe alle ihre Untergruppen der Mächtigkeit* $\leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})$ *und mit einer abzählbaren Menge von Gruppen der Mächtigkeit* $\leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})$ *auch deren direktes Produkt und besitzt jede* $\mathfrak{k}$*-Gruppe der Mächtigkeit* $\leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k}) \cdot \aleph_0$ *eine endliche* $\mathfrak{f}$*-Reihe, so gibt es eine positive, ganze Zahl* $n$ *derart, daß alle Gruppen aus* $\mathfrak{k}$ *eine* $\mathfrak{f}$*-Reihe der Länge* $\leqslant n$ *besitzen.*

Beweis: Wäre das Lemma falsch, so gäbe es für jede natürliche Zahl $n$ eine Gruppe $G_n$ und daher auch eine Untergruppe $U_n$ von $G_n$ mit $|U_n| \leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})$, die keine $\mathfrak{f}$-Reihe der Länge $n$ besitzt, aber eine $\mathfrak{k}$-Gruppe ist. Wir bilden das direkte Produkt $D$ dieser Gruppen $U_n$. Nach Voraussetzung gehört $D$ zu $\mathfrak{k}$. Anwendung von Hilfssatz 7.4 zeigt, daß $D$ dann keine endliche $\mathfrak{f}$-Reihe besitzt. Das widerspricht der Voraussetzung unseres Lemmas, und damit ist die Behauptung bewiesen.

FOLGERUNG 8.5. *Enthält die Gruppenklasse* $\mathfrak{k}$ *mit einer Gruppe alle ihre abzählbaren Untergruppen und mit einer abzählbaren Menge abzählbarer Gruppen auch deren (natürlich abzählbares) direktes Produkt und ist jede Gruppe aus* $\mathfrak{k}$ *nilpotent endlicher Klasse, so gibt es eine positive, ganze Zahl* $n$ *derart, daß alle Gruppen aus* $\mathfrak{k}$ *nilpotent der Klasse* $n$ *sind.*

Beweis: Für das Zentrum $\mathfrak{z}$ sind (1), (2) und (3) von Lemma 7.5 erfüllt, also ist $\mathfrak{z}_n$ nach Lemma 7.5 lokal und daher $s(\mathfrak{z}_n^*, \mathfrak{k}) \leqslant \aleph_0$. Dann ergibt aber Anwendung von Lemma 8.4 die Behauptung der Folgerung.

LEMMA 8.6. *Sei* $\mathfrak{f}$ *eine gruppentheoretische Funktion auf der Klasse aller epimorphen Bilder von Gruppen aus* $\mathfrak{k}$ *und* $\mathfrak{r}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{k}, 1, s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k}))$ *so, daß für Faktoren* $F_n$ *von* $\mathfrak{m}\mathfrak{f}_n^*$*-Gruppen die Gleichung*

$$\mathfrak{f}(\underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{K}} F_n) \underset{\mathcal{N}}{\cong} \mathfrak{K}(\mathfrak{f} F_n)$$

*gilt. Hat dann jede* $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$*-Gruppe eine aufsteigende* $\mathfrak{f}$*-Reihe vom Typ* $\leqslant \omega$, *so gibt es eine natürliche Zahl* $n$ *derart, daß alle* $\mathfrak{k}$*-Gruppen eine* $\mathfrak{f}$*-Reihe der Länge* $n$ *besitzen.*

Beweis: Angenommen, das Lemma sei falsch. Dann gibt es für jede natürliche Zahl $n$ eine Gruppe $G_n$, die keine aufsteigende $\mathfrak{f}$-Reihe der Länge $n$ besitzt. Nach Definition des Randes gibt es dann eine Untergruppe $U_n$ von $G_n$ in $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$, die ebenfalls keine $\mathfrak{f}$-Reihe der Länge $n$ besitzt, für die also $\mathfrak{f}_n U_n \subset U_n$ und $|U_n| \leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})$ gilt. Wir bilden nun das kartesische Produkt $G = \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{K}} U_n$ dieser Gruppen $U_n$. Nach (2) der Definition des Randes gehört auch $G$ zu $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$. Wegen $\mathfrak{f}_n U_n \subset U_n$ gibt es ein $x_n \in U_n$, das nicht in $\mathfrak{f}_n U_n$ liegt. Wir bilden in $G$ das Element $x$ mit $x(U_n) = x_n$. Aus Hilfssatz 7.4 (2) folgt $\mathfrak{f}_\omega G \cong \bigcup_{i \in \mathcal{N}} \underset{n \in \mathcal{N}}{\mathfrak{K}} (\mathfrak{f}_i U_n)$, und da $x \notin \underset{n \in \mathcal{N}}{\mathfrak{K}} (\mathfrak{f}_i U_n)$ für jedes $i \in \mathcal{N}$, ist auch $x \notin \mathfrak{f}_\omega G$. Also ist $G$ eine $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$-Gruppe, die keine

aufsteigende $\mathfrak{f}$-Reihe vom Typ $\omega$ besitzt. Das widerspricht der Voraussetzung des Lemmas, und die Behauptung ist bewiesen.

Anmerkung: Für den Beweis des Satz 8.8 vermerken wir:

Wenn es keine natürliche Zahl $n$ derart gibt, daß alle $\mathfrak{k}$-Gruppen eine $\mathfrak{f}$-Reihe der Länge $n$ besitzen, existiert eine Gruppe $G = \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{R}} U_n$ aus $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$ mit $|G| \leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})^{\aleph_0}$ und $G/L \neq 1$ für $L = \mathfrak{f}_\omega G \cdot \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{D}} U_n$.

FOLGERUNG 8.7. *Enthält die Gruppenklasse $\mathfrak{k}$ mit einer Gruppe alle ihre abzählbaren Untergruppen und mit einer abzählbaren Menge abzählbarer Gruppen auch deren kartesisches Produkt, besitzt jede Gruppe der Mächtigkeit $\leqslant 2^{\aleph_0}$ aus $\mathfrak{k}$ eine aufsteigende Zentralreihe vom Typ $\leqslant \omega$, so gibt es eine natürliche Zahl $n$ derart, daß alle $\mathfrak{k}$-Gruppen nilpotent der Klasse $n$ sind.*

Beweis: Nach Lemma 7.5 ist wiederum $s(\mathfrak{z}_n^*, \mathfrak{k}) \leqslant \aleph_0$. Außerdem ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$ in $\mathfrak{k}$ enthalten. Anwendung von Lemma 8.6 ergibt dann die Behauptung.

Jetzt werden wir für den Rand von $\mathfrak{k}$ überhaupt keine $\mathfrak{f}$-Reihenbedingung (wie in Lemma 8.4 und 8.6), sondern nur noch eine stärkere Abgeschlossenheit und die Existenz von Normalteilern einer festen Mächtigkeit verlangen, und es wird sich zeigen, daß für gewisse Funktionen $\mathfrak{f}$ alle $\mathfrak{k}$-Gruppen trotzdem eine $\mathfrak{f}$-Reihe der Länge $n$ haben.

SATZ 8.8. *Sei $\aleph$ eine Kardinalzahl, $\mathfrak{k}$ eine Gruppenklasse und $\mathfrak{f}$ eine gruppentheoretische Funktion auf der Klasse aller epimorphen Bilder kartesischer Produkte von Gruppen aus $\mathfrak{k}$. Hat dann $\mathfrak{r}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{k}, \aleph, \mathfrak{f}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{k}, \aleph, s(\mathfrak{f}_i^*, \mathfrak{k})$ die Eigenschaften:*

(1) *Jede von 1 verschiedene $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$-Gruppe $G$ besitzt einen Normalteiler $N \neq 1$ mit $|N| < 2^{\aleph}$ oder $|G/\mathfrak{c}N| < 2^{\aleph}$.*

(2) *Ist $F_n$ für jedes $n \in \mathcal{N}$ ein Faktor einer $\mathfrak{m}\mathfrak{f}_n^*$-Untergruppe einer Gruppe $G_n$ aus $\mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{f}(\underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{R}} F_n) = \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{R}}(\mathfrak{f} F_n)$.*

(3) *Ist $G$ eine $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$-Gruppe und $|G| < s(\mathfrak{f}_n, \mathfrak{k})^{\aleph_0}$, so liegt $x \in G$ dann und nur dann in $\mathfrak{f}_\omega G$, wenn $x \circ G \leqslant \mathfrak{f}_r G$ für fast alle $r \in \mathcal{N}$ ist*

*so gibt es eine natürliche Zahl $m$ derart, daß alle $\mathfrak{k}$-Gruppen eine $\mathfrak{f}$-Reihe der Länge $m$ besitzen.*

Anmerkung: Setzt man $\mathfrak{k}$ = Klasse der abelschen Gruppen und ist $\mathfrak{f}G = \{x / x \in G \text{ mit } x^r = 1\}$ für abelsches $G$, wobei $r$ eine feste natürliche Zahl, etwa auch 1 ist, so ist $\mathfrak{f}_n G$ die maximale Untergruppe vom Exponenten $r^n$ von $G$. Die Bedingungen (1) und (2) des Satzes 8.8 sind dann natürlich erfüllt. Ist $x \in A \in \mathfrak{k}$ und $o(x) = 0$ (beispielsweise, wenn $A = Z(\infty)$ ist), so ist $x \circ A = 1 \leqslant \mathfrak{f}A$ aber nicht $x \in \mathfrak{f}_\omega A$, also ist (3) verletzt, und die Behauptung des Satzes ist etwa für $A = Z(\infty)$ falsch. Das zeigt die Unentbehrlichkeit der einschneidenden Bedingung (3) für den Satz 8.8. Sei $\mathfrak{k}$ wieder die Klasse der abelschen Gruppen und $r$ eine

von 1 verschiedene natürliche Zahl. Dann bilden wir die folgende Funktion für abelsche Gruppen $G$:

$$\mathfrak{f}G = \begin{cases} G, & \text{wenn } G \text{ unendlich ist,} \\ \{x/x \in G, \text{ es gibt ein } s \text{ mit } 0 < s \leqslant r \text{ und } x^s = 1\}, & \\ & \text{wenn } G \text{ eine endliche Gruppe ist.} \end{cases}$$

Dann ist $\mathfrak{f}_\omega G = G$. Also sind (1) und (3) von Satz 8.8 erfüllt. Ist $U_n = Z(r^2)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $r^2$, so folgt $\mathfrak{f}(\underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{K}} U_n) = \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{K}} U_n \neq \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{f} U_n)$.

Natürlich gibt es für jede natürliche Zahl $m$ eine Gruppe $G \in \mathfrak{k}$ derart, daß $\mathfrak{f}_m G \neq G$ ist. Das alles zeigt die Unentbehrlichkeit von (2). Da die Gruppenklasse $\mathfrak{r}(\mathfrak{k}, \aleph, s)$ nur Gruppen der Mächtigkeit $\leqslant 2^\aleph$ zu enthalten braucht, zeigt dies die Minimalität der Schranke $2^\aleph$ in (1); ebenso ist auch die Unentbehrlichkeit von (1) für den Satz 8.8 von vornherein klar.

Beweis des Satzes 8.8: Wäre der Satz falsch, so folgt aus der Anmerkung zu Lemma 8.6 die Existenz einer Gruppe $G$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$G = \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{K}} U_n, \ |G| \leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})^{\aleph_0}, \ U_n \in \mathfrak{k} \text{ und } G/L \neq 1 \text{ für } L = \mathfrak{f}_\omega G \cdot \underset{\mathcal{N}}{\mathfrak{D}} U_n.$$

Da $\mathfrak{r}(\mathfrak{k}, 1, s(\mathfrak{f}_i^*, \mathfrak{k})) \leqslant \mathfrak{r}(\mathfrak{k}, \aleph, s(\mathfrak{f}_i^*, \mathfrak{k}))$, ist auch $G \in \mathfrak{r}(\mathfrak{k})$, und es sei $\mathfrak{r}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{k}, \aleph, s(\mathfrak{f}_i^*, \mathfrak{k}))$.

Ist $z \in G$ mit $z(U_n) = z_n$, so folgt, daß $Lz \neq 1$ dann und nur dann ist, wenn folgendes gilt:

(i) Zu $n \in \mathcal{N}$ existieren unendlich viele $i \in \mathcal{N}$, daß $z_i \notin \mathfrak{f}_n U_i$,

denn genau dann liegt $z$ nach Hilfssatz 7.4 (2) und Definition des direkten Produktes nicht in $L$.

Da $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ ist, gibt es natürliche Zahlen $\mathcal{N}(r)$ für $r \in \mathcal{N}$ mit: $\bigcup_{r \in \mathcal{N}} \mathcal{N}(r) = \mathcal{N}$, $\mathcal{N}(r) \cap \mathcal{N}(k) = \emptyset$, wenn $r \neq k$, $|\mathcal{N}(r)| = \aleph_0$, und für $\mathcal{N}(r)$, $n > 0$ gibt es unendlich viele $i(r) \in \mathcal{N}(r)$ mit $z_{i(r)} \notin \mathfrak{f}_n U_{i(r)}$.

Dann bilden wir in $G(r) = \underset{\mathcal{N}(r)}{\mathfrak{K}} U_{n(r)}$ durch kanonische Projektion von $z$ das Element $z(r)$ mit $z(r)(U_n) = z_n$ für $n \in \mathcal{N}(r)$. Es folgt mit Hilfssatz 7.4 (2), daß $z(r) \notin \mathfrak{f}_\omega G(r)$. Da $G(r)$ kartesisches Produkt von $\mathfrak{k}$-Gruppen $U_n$ ist, ist $G(r)$ eine $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$-Gruppe der Mächtigkeit $\leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})^{\aleph_0}$, und deshalb gilt nach Voraussetzung (3), daß $z(r) \circ G(r) \not\leqslant \mathfrak{f}_r G(r)$ ist, d.h. es gibt ein $y(r) \in G(r)$ mit $z(r) \circ y(r) \notin \mathfrak{f}_r G(r)$. Durch die umgekehrte kanonische Einbettung der $G(r)$ in $G$ erhalten wir in $G$ das Element $y$ mit $y(U_n) = y(r)(U_n)$, wenn $n \in \mathcal{N}(r)$ ist. Für die Elemente $y, z \in G$ gilt dann $z \circ y \notin \mathfrak{f}_r G$ für alle natürlichen Zahlen $r$. Daher ist aber auch $z \circ y \notin \mathfrak{f}_\omega G$. Außerdem gibt es dann für $n > 0$ unendlich viele $i \in \mathcal{N}$ mit $(z \circ y)(U_i) \notin \mathfrak{f}_n U_i$, d.h. aber $z \circ y$ genügt der Bedingung (i), und somit ist $z \circ y \neq 1 \bmod L$. Damit haben wir gezeigt, daß $Lz$ nicht im Zentrum von $G/L$ liegt. Weil $Lz$ aber ein beliebiges, von 1 verschiedenes Element

aus $G/L$ ist, folgt $z(G/L) = 1$. Nach (2) der Definition des Randes $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$ ist $G/L$ eine $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$-Gruppe. Zusammen haben wir also die Existenz einer von 1 verschiedenen $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$-Gruppe mit trivialem Zentrum, deren Mächtigkeit $\leqslant s(\mathfrak{f}_n^*, \mathfrak{k})^{\aleph_0}$ ist, nachgewiesen. Sei nun $\mathfrak{M}$ eine Menge von $\aleph$ zu dieser Gruppe isomorpher Gruppen. Dann bilden wir $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})/\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Das ist nach (3) der Definition des Randes eine Gruppe aus $\mathfrak{r}(\mathfrak{k})$. Aus Satz 8.3 folgt dann, daß sie weder einen von 1 verschiedenen Normalteiler der Mächtigkeit $< 2^{\aleph}$ noch einen Normalteiler $N \neq 1$ mit $|(\mathfrak{K}(\mathfrak{M})/\mathfrak{B}(\mathfrak{M}))/\mathfrak{c}N| < 2^{\aleph}$ besitzt. Also erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung (1), und der Satz 8.8 ist bewiesen.

FOLGERUNG 8.9. *Sei $\aleph$ eine Kardinalzahl und $\mathfrak{k}$ eine Gruppenklasse, die alle ihre abzählbaren Untergruppen und mit einer abzählbaren Menge abzählbarer Gruppen auch deren kartesisches Produkt und seine epimorphen Bilder enthält. Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von $\aleph$ isomorphen $\mathfrak{k}$-Gruppen der Mächtigkeit $\leqslant 2^{\aleph_0}$, so sei auch $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})/\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ eine $\mathfrak{k}$-Gruppe. Wenn jede $\mathfrak{k}$-Gruppe $G \neq 1$ einen Normalteiler $N \neq 1$ besitzt derart, daß $|N| < 2^{\aleph}$ oder $|G/\mathfrak{c}N| < 2^{\aleph}$ ist, so gibt es eine natürliche Zahl $n$ derart, daß alle $\mathfrak{k}$-Gruppen nilpotent der Klasse $n$ sind.*

Beweis: Wir setzen $\mathfrak{f} = \mathfrak{z}$ = Zentrum und wenden Lemma 7.5 an. Da $\mathfrak{z}$ die Voraussetzungen (1), (2) und (3) von Lemma 7.5 erfüllt, ist $\mathfrak{z}_n$ eine lokale Funktion und daher $s(\mathfrak{z}_n^*, \mathfrak{k}) \leqslant \aleph_0$. Natürlich ist $\mathfrak{z}(\underset{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}G) \underset{\mathfrak{M}}{\cong} \mathfrak{K}(\mathfrak{z}G)$, und aus $x \circ G \leqslant \mathfrak{z}_n G$ folgt $x \in \mathfrak{z}_{n+1}G \subseteq \mathfrak{z}_\omega G$, also sind alle Voraussetzungen von Satz 8.8 erfüllt. Seine Anwendung ergibt dann die Behauptung der Folgerung.

DEFINITION 8.10. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ gruppentheoretische Eigenschaften. Dann ist $G$ eine *Poly-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe*, wenn $G$ eine endliche $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalreihe besitzt.

HAUPTFOLGERUNG 8.11. *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ gruppentheoretische Eigenschaften, und vererbe sich $\mathfrak{e}$ auf Normalteiler. Seien Zentren von Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen wieder Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen. Ist $\mathfrak{k}$ eine kartesisch abgeschlossene Klasse von Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen, so sind die folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{k}$ äquivalent:*

(1) *Es gibt eine Kardinalzahl $\aleph$ derart, daß alle $\mathfrak{e}$-Gruppen eine Mächtigkeit $< \aleph$ haben.*

(2) *Es gibt eine Kardinalzahl $\aleph$ derart, daß alle $\mathfrak{a}$-Gruppen eine Mächtigkeit $< \aleph$ haben.*

(3) *$\mathfrak{a}$ ist die triviale Gruppenklasse $\mathfrak{t}$.*

(4) *Es gibt eine natürliche Zahl $n$ derart, daß alle $\mathfrak{k}$-Gruppen nilpotent der Klasse $n$ sind.*

*Sind ferner alle abelschen $\mathfrak{k}$-Gruppen Poly-$\mathfrak{e}$-Gruppen, so ist mit* (1) *bis* (4) *äquivalent:*

(5) *Jede* $\mathfrak{k}$*-Gruppe besitzt eine endliche* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$*-Reihe, ist also eine Poly-*$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$*-Gruppe.*

*Existiert außerdem eine natürliche Zahl* $m$ *derart, daß alle abelschen* $\mathfrak{k}$*-Gruppen eine* $\mathfrak{e}$*-Reihe der Länge* $\leqslant m$ *besitzen, so ist mit* (1) *bis* (5) *äquivalent:*

(6) *Es gibt eine natürliche Zahl* $n$ *derart, daß alle* $\mathfrak{k}$*-Gruppen eine* $\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$*-Reihe der Länge* $\leqslant n$ *haben.*

Beweis: Sei $1 \neq H$ ein epimorphes Bild einer nilpotenten Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe. Dann besitzt $H$ einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Normalteiler $N$, und es ist $N \cap \mathfrak{z}H \neq 1$. Ist $1 \neq Z$ eine zyklische Untergruppe von $N \cap \mathfrak{z}H$, so ist $Z$ ein $\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Normalteiler von $H$. Also ist $\mathfrak{k}$ nach (4) eine Klasse von Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppen, wobei $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{e}$-Gruppen eine Mächtigkeit $\leqslant \aleph_0$ haben. Somit folgen (1) und (2) aus (4). Umgekehrt folgt aus (1) auch (4) nach Folgerung 8.9. Wir leiten jetzt (3) aus (2) her. Dazu nehmen wir an, daß $\mathfrak{a}$ nur $\neq \mathfrak{t}$ ist. Dann gibt es eine Gruppe $G \in \mathfrak{k}$, die einen Normalteiler $N$ besitzt, daß für $F = G/N$ gilt:

(i) Ist $1 \neq M$ ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler von $F$, so ist $F/\mathfrak{c}M \neq 1$.

Wäre $\mathfrak{z}F \neq 1$, so wäre $\mathfrak{z}F$ nach Voraussetzung eine von 1 verschiedene Hyper-$\mathfrak{e}$-Gruppe. Also besitzt $\mathfrak{z}F$ eine von 1 verschiedene $\mathfrak{e}$-Untergruppe $E$, die dann normal in $F$ ist. Für $E$ gilt jedoch $F/\mathfrak{c}E = 1$, was (i) widerspricht. Folglich ist $\mathfrak{z}F = 1$. Seien $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{N}$ Mengen von jeweils $\aleph$ zu $F$, $G$ bzw. $N$ isomorphen Gruppen. Wir bilden $K = \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$. Weil $K \cong \mathfrak{K}(\mathfrak{G})/\mathfrak{K}(\mathfrak{N})$ ist, gehört $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ zu $\mathfrak{k}$ und $K$ ist eine Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe. Ebenso ist auch $W = \mathfrak{K}(\mathfrak{F})/\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ eine Hyper-$\mathfrak{e}$-$^{\mathfrak{a}}$Gruppe. Daher besitzt $W$ einen von 1 verschiedenen Normalteiler $N$ derart, daß $W/\mathfrak{c}N$ eine $\mathfrak{a}$-Gruppe ist. Wegen Satz 8.3 ist aber $|W/\mathfrak{c}N| \geqslant 2^{\aleph}$, was (2) widerspricht, da $\mathfrak{a}$-Gruppen $\aleph$-Gruppen sein sollten. Also folgt (3) aus (2).

Da nach (3) alle $\mathfrak{k}$-Gruppen hyperzentral sind, folgt aus der schon bewiesenen Äquivalenz von (1) und (4), daß es eine natürliche Zahl $n$ gibt, daß alle $\mathfrak{k}$-Gruppen nilpotent der Klasse $n$ sind. Damit ist auch (4) aus (3) hergeleitet, und die ersten vier Bedingungen sind äquivalent.

Wegen (4) besitzt jede $\mathfrak{k}$-Gruppe eine endliche Zentralreihe, die sich zu einer endlichen, zentralen $\mathfrak{e}$-Reihe verfeinern läßt. Also sind alle $\mathfrak{k}$-Gruppen Poly-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Gruppen und nilpotent der Klasse $n$, d.h. (5) ist bewiesen. Aus (5) folgt durch Abschwächung wieder (4). Ebenso ist es klar, daß unter der zusätzlichen Voraussetzung auch (4) und (6) äquivalent sind. Folglich sind alle sechs Bedingungen des Satzes 8.11 äquivalent.

## Literaturverzeichnis


[1] P. S. Alexandroff, *Einführung in die Mengenlehre*, Berlin 1956.

[2] R. Baer, *Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich*, Studia Math. 5 (1934), S. 15–17.

[3] — und F. Levi, *Freie Produkte und ihre Untergruppen*, Compos. Math. 3 (1936), S. 391–398.

[4] — *Noethersche Gruppen*, Math. Zeitschr. 66 (1956), S. 269–288.

[5] — *Lokal Noethersche Gruppen*, Math. Zeitschr. 66 (1957), S. 341–363.

[6] — *Abzählbar erkennbare gruppentheoretische Eigenschaften*, Math. Zeitschr. 79 (1962), S. 244–363.

[7] — *Gruppentheoretische Eigenschaften*, Math. Annalen 149 (1963), S. 181–210.

[8] — *Gruppen mit Minimalbedingung*, Math. Annalen 150 (1963), S. 1–44.

[9] — *Group theoretical properties and functions*, Colloq. Math. 16 (1966), S. 285–328.

[10] — *Erreichbare und engelsche Elemente*, Hambg. Abh. 27 (1964), S. 44–74.

[11] L. Fuchs, *Abelian groups*, Budapest 1958.

[12] M. M. Guterman, *Normal systems*, Journ. of Alg. 4 (1966), S. 317–320.

[13] M. Hall, *The theory of groups*, New York 1959.

[14] P. Hall, *Wreath powers and characteristically simple groups*, Proc. Camb. Phil. Soc. 58 (1962), S. 170–184.

[15] — *On non-strictly simple groups*, Proc. Camb. Phil. Soc. 59 (1963), S. 531–533.

[16] — B. Hartley, *The stability group of a series of subgroups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 16 (1966), S. 1–39.

[17] M. Krasner, L. Kaloujnine, *Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension des groupes II*, Acta Sci. Math. Szeged 14 (1951), S. 39–66.

[18] A. G. Kurosh, *Theory of groups*, Vol. II, New York 1960.

[19] H. Neumann, *Varieties of groups*, Berlin–Heidelberg–New York 1967.

[20] W. Specht, *Gruppentheorie*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1956.



INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Würzburg



*Eingegangen 13. 12. 1967*