COLLOQUIUM MATHEMATICUM

LI DÉDIÉ À M. STANISŁAW HARTMAN 1987

FUNKTIONENALGEBREN AUF BAHNEN NILPOTENTER GRUPPEN

VON

HORST LEPTIN (BIELEFELD)

STANISŁAW HARTMAN ZUM 70. GEBURTSTAG
IN FREUNDSCHAFT UND RESPEKT

In der Theorie der L^1-Algebren und allgemeiner der harmonischen Analyse nichtkommutativer lokal kompakter Gruppen G hat es sich gezeigt, daß eine Klasse von Funktionenalgebren auf G eine besondere Rolle spielt. Es handelt sich hierbei um gewisse dichte, linkstranslationsinvariante Unteralgebren $\mathcal{Q}$ von $C_\infty(G)$, der Algebra aller komplexwertigen, stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf der Gruppe G. Typische Beispiele sind die Fourierschen Algebren $A(G)$ im Falle kommutativer Gruppen.

Diese $\mathcal{Q}$ haben ihre eigene Norm, in der sie Banachsche G-Algebren sind, es lassen sich also die verschränkten Algebren $L^1(G, \mathcal{Q})$ definieren. Das Interesse an den Algebren $\mathcal{Q}$ wird u. a. durch die Bedeutung dieser $L^1(G, \mathcal{Q})$ gerechtfertigt, denn diese treten z. B. gleichsam kanonisch als elementare Bausteine der Gruppen-Algebren $L^1(G)$ auf; so sind die $L^1(\boldsymbol{R}^n, A(\boldsymbol{R}^n))$ etwa genau die primitiven Quotienten von $L^1(G)$ für die zusammenhängenden, zweistufig nilpotenten Gruppen. Es ist naheliegend zu fragen, ob eine analoge explizite Darstellung der primitiven Quotienten, also der Faktoralgebren $L^1(G)/\ker \pi$ nach den Kernen $\ker \pi$ irreduzibler unitärer Darstellungen π von G für beliebige zusammenhängende nilpotente Gruppen G möglich ist. Natürlich kann man sich dabei auf Liesche Gruppen beschränken. Man weiß nach Dixmier, daß dann die irreduziblen Darstellungen π von Charakteren von Untergruppen H von G induziert sind. Ist dieses H nun normal, so läßt sich in der Tat beweisen, daß $L^1(G)/\ker \pi$ im wesentlichen wieder die Form $L^1(F, \mathcal{Q})$ hat und zwar für $F = G/H$ mit einer Unteralgebra $\mathcal{Q}$ von $C_\infty(F)$. Dieses $\mathcal{Q}$ ist eine Invariante der Darstellung π; Gegenstand dieser Arbeit ist das Studium dieser Algebren $\mathcal{Q}$, Hauptergebnis der Satz, daß die Algebra $\mathcal{D}(F)$ der glatten Funktionen auf F mit kompakten Trägern in $\mathcal{Q}$ enthalten ist und daß für $q \in \mathcal{D}(F)$ die Abbildungen $z \to q^z$, $z \to q_z$ mit $q^z(x) = q(zx)$, $q_z(x) = q(xz^{-1})$ stetig sind.

Es sei zunächst G eine beliebige lokal kompakte Gruppe mit Einselement e und $C_\infty(G)$ die Banachsche Algebra der komplexwertigen, im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen auf G. Die Supremumsnorm auf $C_\infty(G)$ sei wie üblich mit $|f|_\infty$ bezeichnet. Wie in der Einleitung seien für eine auf G definierte Funktion f und für $z \in G$ die Funktionen f^z und f_z durch

$$f^z(x) = f(zx), \quad f_z(x) = f(xz^{-1})$$

erklärt. Hierdurch operiert G von beiden Seiten stetig auf $C_\infty(G)$. Schließlich definieren wir auf $C_\infty(G)$ die Involution $f \to f^*$ durch Konjugation: $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

Definition (vgl. [3], Theorem 4). Eine *harte Algebra* auf G ist eine $*$-invariante Unteralgebra $\mathcal{Q}$ von $C_\infty(G)$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) $\mathcal{Q}$ ist eine Banachsche Algebra mit einer Norm $|q|$ mit den Eigenschaften $|q| = |q^*| \geqslant |q|_\infty$.

(2) $\mathcal{Q}$ ist linksinvariant, d. h. mit q liegt auch q^z in $\mathcal{Q}$ und es gilt $|q^z| = |q|$.

(3) Für jedes $q \in \mathcal{Q}$ ist die Abbildung $z \to q^z$ stetig von G in $\mathcal{Q}$.

(4) Das Ideal $\mathcal{Q}_0$ der Funktionen aus $\mathcal{Q}$ mit kompakten Trägern ist dicht in $\mathcal{Q}$.

(5) Sei $\mathcal{Q}_{00}$ die Unteralgebra aller $q \in \mathcal{Q}_0$, für welche alle q_z, $z \in G$, wieder in $\mathcal{Q}_0$ liegen und für die $z \to q_z$ stetig ist. Zu jeder e-Umgebung U in G gibt es ein $w \in \mathcal{Q}_{00}$ mit $w \neq 0$, dessen Träger $\operatorname{supp} w$ in U liegt.

Das wichtigste nicht triviale Beispiel einer harten Algebra auf G ist die Fourier-Eymard'sche Algebra $A(G) = A_2(G)$. Für harte Algebren $\mathcal{Q}$ sind die verschränkten Algebren $L^1(G, \mathcal{Q})$ stets einfach und symmetrisch, siehe etwa [3]; die vielleicht wichtigste Eigenschaft ist jedoch, daß $L^1(G, \mathcal{Q})$ von minimalen hermiteschen Idempotenten erzeugt wird, vgl. [2], [3] und weitere dort zitierte Literatur.

Wir betrachten nun weiter einen lokal kompakten Hausdorffschen Raum V, auf dem G stetig wirkt, d. h. wir haben eine stetige Abbildung $G \times V \to V$, wie üblich mit $(x, u) \to xu$ bezeichnet, mit $x(yu) = (xy)u$, $eu = u$ für alle $x, y \in G$, $u \in V$. Die Fixgruppen

$$G_p = \{x \in G;\ xp = p\}$$

der Punkte $p \in V$ sind dann abgeschlossen. Falls auch die Bahnen $Gp = \{xp;\ x \in G\}$ in V abgeschlossen sind, so erhält man unter ziemlich allgemeinen Bedingungen an G aus der Abbildung $x \to xp$ einen Homöomorphismus ϕ des homogenen Raumes G/G_p auf die Bahn Gp. Ist insbesondere $G_p = \{e\}$, so ist ϕ eine topologische Einbettung von G in V. Eine Unteralgebra $\mathscr{A}$ von $C_\infty(V)$ definiert dann eine Unteralgebra $\mathscr{A}_p$ von $C_\infty(G)$:

$$\mathscr{A}_p = \{f \in C_\infty(G);\ \text{es existiert ein } g \in A \text{ mit } f(x) = g(xp) \text{ für alle } x \in G\}$$

mit anderen Worten: $\mathscr{A}_p$ ist die Menge aller Funktionen ${}^pg$, $g \in \mathscr{A}$, definiert durch

$$^pg(x) = g(xp).$$

Ist für $S \subset V$ der Kern $k(S)$ wie üblich das Ideal aller auf S verschwindenden Funktionen aus $\mathscr{A}$, so ist offensichtlich $\mathscr{A}_p$ zum Quotienten $\mathscr{A}/k(Gp)$ isomorph. Ist $\mathscr{A}$ Banachsch mit einer die Norm $|\cdot|_\infty$ majorisierenden Norm, so ist $k(Gp)$ abgeschlossen und folglich $\mathscr{A}/k(Gp)$ Banachsch. Der Isomorphismus $\mathscr{A}_p \cong \mathscr{A}/k(Gp)$ macht dann auch $\mathscr{A}_p$ zur involutiven Banachschen Algebra.

Wir können für Funktionen f auf V und $z \in G$ genau wie im Spezialfall $V = G$ wieder f^z durch $f^z(x) = f(zx)$ definieren. Hierdurch wird $C_\infty(V)$ zur G-Algebra. Ist nun $\mathscr{A}$ G-invariant, so zeigt die Formel $({}^pg)^z = {}^p(g^z)$, daß auch $\mathscr{A}_p$ linksinvariant ist, dagegen gibt es keinen Grund dafür, daß mit f auch f_z wieder in $\mathscr{A}_p$ liegt oder gar die Abbildung $z \to f_z$ stetig von G in $\mathscr{A}_p$ ist, das folgende Ergebnis ist also keineswegs selbstverständlich:

(0) *Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und G eine zusammenhängende unipotente Untergruppe der linearen Gruppe $SL(V)$, sei $p \in V$ und $G_p = (e)$. Ist dann $\mathscr{A}$ eine G-invariante harte Algebra auf V und ist der Raum $\mathscr{S}(V)$ der Testfunktionen auf V stetig in $\mathscr{A}_{00}$ — vgl. Definition* (5) — *eingebettet, so ist $\mathscr{S}(G)$ in $\mathscr{A}_{p00}$ enthalten, insbesondere ist die Algebra $\mathscr{A}_p$ hart.*

Da G unipotent ist können wir G als Gruppe von Dreiecksmatrizen mit Einsen in der Diagonale schreiben, insbesondere ist G nilpotent. Die Bahnen in V sind dann stets abgeschlossene algebraische Mannigfaltigkeiten, siehe etwa [4]. Die Voraussetzung über die Algebra $\mathscr{A}$ wird z. B. von der Fourierschen Algebra $A_2(V)$, allgemeiner von den $A_p(V)$, $1 < p < \infty$, erfüllt. Das ist genau der in der Darstellungstheorie nilpotenten Gruppen auftretende Fall: Dort ist $V = \mathscr{H}^*$, der duale Raum des Ideals $\mathscr{H}$ der Lieschen Algebra $\mathscr{N}$ der Gruppe N, und G die durch die koadjungierte Darstellung auf f^* definierte Gruppe.

Die Liesche Algebra der zusammenhängenden unipotenten Gruppe G läßt sich konkret mit einer Lieschen Algebra $\mathscr{G}$ nilpotenter Endomorphismen des n-dimensionalen reellen Vektorraumes V identifizieren. G besteht dann genau aus den Transformationen

$$e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}X^{n-1}, \qquad X \in \mathscr{G}.$$

Für $p \in V$ ist

$$\mathscr{G}_p = \{X \in \mathscr{G};\ Xp = 0\}$$

die Fixalgebra und $\exp \mathscr{G}_p = \{e^X;\ X \in \mathscr{G}_p\} = Gp$ die Fixgruppe. Sei $X_1, \ldots, X_d$ eine Basis von $\mathscr{G}$. Die Bedingungen „1) $G_p = \{e\}$, 2) $\mathscr{G}_p = 0$,

3) $X \to Xp$ injektiv von $\mathscr{G}$ auf $\mathscr{G}p$, 4) die $X_j p$ sind linear unabhängig" sind offensichtlich alle äquivalent, aus 4) folgt sofort, daß $\{p \in V;\ G_p = \{e\}\}$ eine invariante offene Teilmenge in V ist.

Wir wählen nun ein festes p mit $G_p = \{e\}$, also $\mathscr{G}_p = 0$, und einen linearen Unterraum $R \subset V$ mit

$$V = \mathscr{G}p \oplus R.$$

Die Vektoren $b_j = X_j p$, $j = 1, \ldots, d$, können wir durch Vektoren $b_{d+1}, \ldots, b_n$ aus R zu einer Basis $\{b_j\}_{j=1,\ldots,n}$ von V ergänzen. Zu der Produktmannigfaltigkeit $G \times R$ erhalten wir durch

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \Big(e^{\sum_1^d x_j X_j}, \sum_{d+1}^{n} x_j b_j\Big)$$

ein globales Koordinatensystem. Die durch

$$\phi\colon (x, u) \to \phi(x, u) = x(p+u)$$

definierte rationale Abbildung ϕ von $G \times R$ in V hat in diesen Koordinaten und in der Basis $\{b_j\}$ im Punkte $(e, 0)$ als Jacobimatrix die Einheitsmatrix, ϕ ist in $(e, 0)$ also ein lokaler Diffeomorphismus. Somit existiert eine offene Umgebung E von e in G und eine offene Umgebung U von 0 in R, so daß $E \times U$ diffeomorph auf eine offene Umgebung Ω von p in V abgebildet wird.

(1) *Zu jeder offenen Menge C in G mit kompakter Hülle K existiert eine offene 0-Umgebung $W \subset R$, so dass $C \times W$ durch ϕ diffeomorph auf eine offene Umgebung von p in V abgebildet wird.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß ein W existiert, so daß $K \times W$ durch ϕ injektiv abgebildet wird. Wäre diese Behauptung falsch, so gäbe es Folgen (x_n, u_n), (y_n, v_n) in $K \times R$ mit $(x_n, u_n) \neq (y_n, v_n)$ für alle n, $\lim u_n = \lim v_n = 0$, $x_n(p+u_n) = y_n(p+v_n)$. Da K kompakt ist, können wir annehmen, daß $x = \lim x_n$ und $y = \lim y_n$ existieren. Dann wäre $xp = yp$, also $x = y$, also $y_n^{-1} x_n \in E$ für fast alle n. Ferner folgt $u_n, v_n \in U$ für fast alle n und somit wegen $y_n^{-1} x_n(p+u_n) = p+v_n$ also $y_n^{-1} x_n = e$, $u_n = v_n$ für fast alle n, im Widerspruch zu $(x_n, u_n) \neq (y_n, v_n)$ für alle n.

Als nächstes zeigen wir:

(2) $$\mathscr{D}(G) \subset \mathscr{A}_p,$$

d. h. wir müssen zeigen, daß zu jeder Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ ein $f \in \mathscr{A}$ existiert mit $\varphi(x) = f(xp)$. Hierzu wählen wir eine offene Menge E in G, die den Träger K von φ enthält, und eine offene 0-Umgebung U in R, so daß $E \times U$ durch ϕ diffeomorph auf die offene Menge $\Omega \subset V$ abgebildet wird. Das ist nach (1) möglich, da K kompakt ist.

Sei $\psi \in \mathscr{S}(R)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset U$, $\psi(0) = 1$. Dann ist $\chi = \varphi \otimes \psi \in \mathscr{S}(G \times R)$ mit $\operatorname{supp}\chi \subset E \times U$ und $\chi(x, 0) = \varphi(x)$. Die Funktion $\chi \cdot \phi^{-1}$ auf Ω ist dann offensichtlich die Einschränkung einer Funktion $f \in \mathscr{D}(V)$ und es gilt

$$f(xp) = f(\phi(x, 0)) = \chi(x, 0) = \varphi(x)$$

also $\varphi = {}^p f \in \mathscr{A}_p$, denn nach Voraussetzung liegt $\mathscr{D}(V)$, also auch f in $\mathscr{A}$.

Schließlich bleibt noch zu zeigen:

$$\mathscr{D}(G) \subset \mathscr{A}_{p00}. \tag{3}$$

Da $\mathscr{D}(G)$ rechtstranslationsinvariant ist und in $\mathscr{A}_{p0}$ liegt, genügt es zu zeigen, daß für $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ die Abbildung $z \to \varphi_z \in \mathscr{A}_p$ stetig in e ist. Wir behalten die bisherigen Bezeichnungen φ, K, E usw. bei. Es gibt dann eine symmetrische kompakte e-Umgebung L in G mit $KL \subset E$. Sei $\mathscr{D}_E = \{\sigma \in \mathscr{D}(G);$ $\operatorname{supp} \sigma \subset E\}$, entsprechend $\mathscr{D}_{E \times U} \subset \mathscr{D}(G \times R)$, $\mathscr{D}_\Omega \subset \mathscr{D}(V)$. Es ist klar, daß $\chi_z = \varphi_z \otimes \psi$ für $z \in L$ in $\mathscr{D}_{E \times U}$ liegt und die Abbildung $z \to \chi_z$ bezüglich der üblichen Topologie von $\mathscr{D}_{E \times U}$ stetig ist: Die Normen in $\mathscr{D}(G)$ lassen sich mit Hilfe rechtsinvarianter Vektorfelder definieren. Weiter definiert ϕ einen topologischen Isomorphismus i von $\mathscr{D}(G \times R)$ auf $\mathscr{D}_\Omega$, also in $\mathscr{D}(V)$. Setzen wir $f_z = i(\chi_z)$, so ist also $z \to f_z$ stetig von L in $\mathscr{D}(V)$ und damit nach Voraussetzung auch in $\mathscr{A}$. Wie oben sieht man, daß ${}^p f_z = \varphi_z$ ist. Da schließlich die Abbildung $h \to {}^p h$ die Algebra $\mathscr{A}$ stetig auf $\mathscr{A}_p$ abbildet, ist $z \to \varphi_z$ stetig und (3), also auch unser Hauptergebnis (0) bewiesen.

Folge. *Ist $\mathscr{A} = A(V)$ die Fouriersche Algebra von V, $p \in V$ und $G_p = \{e\}$, so ist $\mathscr{A}_p$ eine harte Unteralgebra von $C_\infty(G)$.*

Die Fouriersche Algebra $A(V)$ enthält bekanntlich die Algebra $\mathscr{S}(V) = \mathscr{S}$ der Schwartz'schen Funktionen, infolgedessen ist die Frage naheliegend, ob in diesem Falle auch $\mathscr{S}(G)$ (siehe etwa [1]) in den $\mathscr{A}_p$ enthalten ist. Das ist in der Tat richtig, falls p „in allgemeiner Lage" ist, denn dann kann man in (1) $C = G$ wählen, d. h. es existiert eine 0-Umgebung $U \subset R$, so daß ϕ: $(x, u) \to x(p+u)$ ein Diffeomorphismus von $G \times U$ auf einen offenen, G-invarianten Teil von V ist. Hiermit läßt sich $\mathscr{S}(G) \subset \mathscr{A}_p$ und die Stetigkeit von $z \to \varphi_z$ dann genau wie für $\varphi \in \mathscr{D}$ beweisen. Im allgemeinen ist jedoch V über den Bahnen Gp mit $G_p = \{e\}$ nicht lokal trivial. Der einfachste Fall dieser Art ist der folgende: Sei $\dim V = 4$, $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis, N die nilpotente Transformation $Nb_j = b_{j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant 3$ $(b_4 = 0)$, $G = \{e^{tN};\ t \in \boldsymbol{R}\}$. Ist R der von b_0, b_1, b_2 erzeugte Unterraum von V und setzt man $|y| = |y_1| + |y_2| + |y_3|$ für $y = y_0 b_0 + y_1 b_1 + y_2 b_2 \in R$, so wird

$$e^{tN}\left(b_2 - \frac{6}{t} b_1 + \frac{12}{t^2} b_0\right) = b_2 + \frac{6}{t} b_1 + \frac{12}{t^2} b_0.$$

Ist R der von b_0, b_1, b_2 erzeugte Unterraum von V und setzt man $|y| = |y_1| + |y_2| + |y_3|$ für $y = y_0 b_0 + y_1 b_1 + y_2 b_2 \in R$, so wird

$$\Lambda = \{(t, y) \in G \times R;\ |y|(1 + |t| + |t|^2) < 1\}$$

von ϕ bijektiv auf die offene Obermenge $\Omega = \phi(\Lambda)$ der Bahn Gb_2 abgebildet: Sind nämlich $(s, y), (t, z) \in G \times R$, $r = s-t$, also $|r| \leqslant |s|+|t|$, so ist $|r| \leqslant 2|s|$ oder $|r| \leqslant 2|t|$. Sei etwa $|r| \leqslant 2|s|$. Ist nun $\phi(s, y) = \phi(t, z)$, so folgt

$$e^{rN}(b_2+y) = b_2+z \equiv r(1+y_0+\tfrac{1}{2}ry_1+\tfrac{1}{6}r^2y_2)b_3 (\operatorname{mod} R)$$

also $r = 0$ und somit $(s, y) = (t, z)$ oder

$$1 = -y_0-\tfrac{1}{2}ry_1-\tfrac{1}{6}r^2y_2 \leqslant |y|(1+|s|+|s|^2),$$

also $(s, y) \notin \Lambda$.

Hieraus folgt nun leicht: Enthält $\mathscr{A}$ die Algebra $\mathscr{S}(V)$, so enthält $\mathscr{A}_p$ auch $\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$. Um zu zeigen, daß ein $\varphi \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ in $\mathscr{A}_p$ liegt, haben wir hier lediglich die Funktion $\chi \in \mathscr{S}(G \times R)$ nicht wie früher durch $\varphi \otimes \psi$ sondern wie folgt zu definieren: Wir wählen $\psi \in \mathscr{D}(R)$ mit $\psi(0) = 1$ und $\psi(y) = 0$ für $|y| > \frac{1}{3}$ und setzen

$$\chi(t, y) = \varphi(t)\psi\big((1+t^2)y\big).$$

Dann ist $\chi \in \mathscr{S}(G \times R)$, $\operatorname{supp}\chi \subset \Lambda$ und $\chi(t, 0) = \varphi(t)$. Der Rest folgt wie im Beweis von (2).

Es ist anzunehmen, daß mit derselben Idee auch allgemein gezeigt werden kann, daß $\mathscr{S}(G)$ in $\mathscr{A}_p$ liegt, falls $\mathscr{A}$ die Algebra $\mathscr{S}(V)$ enthält.

LITERATUR

[1] R. Howe, *On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities*, Pacific Journal of Mathematics 73 (1977), p. 329–363.

[2] H. Leptin, *On onesided harmonic analysis in non commutative locally compact groups*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 306 (1979), p. 122–153.

[3] – and D. Poguntke, *Symmetry and nonsymmetry for locally compact groups*, Journal of Functional Analysis 33 (1979), p. 119–134.

[4] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris 1967.

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT BIELEFELD
BIELEFELD, BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

Reçu par la Rédaction le 25. 04. 1984