ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIV (1977)

Sur le rayon de β-convexité de la famille Σ_a^*

par J. Zderkiewicz (Lublin)

Résumé. Dans ce travail, on détermine (théorème 1) le rayon de β-convexité de la famille Σ_a^*, $0 \leqslant a \leqslant a_0$, où a_0 est un nombre tel que $0,8 < a_0 < 0,9$. En particulier, on déduit de la formule (2.15) les rayons: β-r.c.Σ^* et r.c.Σ^*. Ce dernier résultat a été obtenu par Robertson [1].

1. Introduction. Désignons par Σ_a^*, $0 \leqslant a < 1$, la famille des fonctions $F(z) = 1/z + a_0 + a_1 z + \ldots$, holomorphes et univalentes dans l'anneau $0 < |z| < 1$ et satisfaisant à la condition

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Re}\left\{-\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\} > a \quad \text{pour} \quad 0 < |z| < 1;$$

$\Sigma_0^* \equiv \Sigma^*$ est alors la classe des fonctions Σ-étoilées, c'est-à-dire des fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur des domaines dont les complémentaires au plan sont des ensembles étoilés par rapport à l'origine.

Soit β un nombre arbitrairement fixé de l'intervalle $0 \leqslant \beta < 1$ et $F(z) \in \Sigma_a^*$.

Posons

$$r(F) = \sup_r \left\{r:\ -\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right) > \beta \ \text{pour} \ 0 < |z| < r\right\}.$$

Le nombre

$$\text{(1.2)} \qquad \beta - \text{r.c.}\Sigma_a^* = \inf_{F \in \Sigma_a^*} r(F)$$

est appelé rayon de β-convexité de la famille Σ_a^*. Ce rayon sera désigné par $0 = \text{r.c.}\,\Sigma_a^* = \text{r.c.}\,\Sigma_a^*$.

2. Résultat principal. Soit $F(z) \in \Sigma_a^*$ et désignons par $\wp$ la classe des fonctions $p(z)$ holomorphes dans le cercle $K = \{z:\ |z| < 1\}$ et telles que $p(0) = 1$ et $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour $z \in K$. La condition (1.1) prouve que $F(z) \in \Sigma_a^*$ si et seulement si

$$-\frac{zF'(z)}{F(z)} = a + (1-a)p(z) \quad \text{pour une fonction } p(z) \in \wp,$$

d'où l'on tire

$$(2.1)\qquad -\left[1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right] = (1-a)\big(p(z)+h\big)-\frac{zp'(z)}{p(z)+h},\qquad h=\frac{a}{1-a}.$$

Soit

$$\omega(r) = \min_{F(z)\epsilon\Sigma_a^*}\ \min_{|z|=r<1} \operatorname{Re}\left\{-\left[1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right]\right\}.$$

Alors le rayon de β-convexité de la famille Σ_a^* est la plus petite racine positive de l'équation

$$(2.2)\qquad \omega(r)-\beta = 0.$$

En vertu de la relation (2.1) on a

$$(2.3)\qquad \omega(r) = \min_{p(z)\epsilon P}\ \min_{|z|=r<1} \operatorname{Re}\left[(1-a)\big(p(z)+h\big)-\frac{zp'(z)}{p(z)+h}\right].$$

Zmorovič [2] a démontré que le minimum de (2.3) est égal au minimum de la fonction $H(R)$ dans l'intervalle $a+h-c\leqslant R\leqslant a+h+c$, où

$$(2.4)\qquad H(R) = (1-a)R+\frac{1+ah}{R}-a,$$

$$(2.5)\qquad a=\frac{1+r^2}{1-r^2},\qquad c=\frac{2r}{1-r^2}.$$

En dérivant la fonction $H(R)$ par rapport à la variable R on constate que son minimum absolu dans l'intervalle $(0,\infty)$ est atteint au point

$$(2.6)\qquad R_0=\sqrt{\frac{1+ah}{1-a}}.$$

Puisque pour tout r, $0<r<1$, et tout a, $0\leqslant a<1$, on a $a+h-c<R_0$, tandis qu'on n'a pas toujours $R_0\leqslant R_1 = a+h+c$, il s'ensuit que

$$(2.7)\qquad \omega(r) = \begin{cases} H(R_0) & \text{si } a+h-c<R_0\leqslant R_1,\\ H(R_1) & \text{si } \qquad\qquad R_1<R_0.\end{cases}$$

LEMME 1. *Soit*

$$(2.8)\qquad S(r) = -r^3+5r^2+8r+4,\quad b(r)=\frac{1}{2}+\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{s(r)/(1-r)}}{r},$$

$$(2.9)\qquad a(r)=\frac{b(r)}{1+b(r)},\qquad 0<r<1.$$

Alors

$$\omega(r) = \begin{cases} H(R_0) & si\ 0 \leqslant a \leqslant a(r), \\ H(R_1) & si\ a(r) < a < 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Démonstration. Considérons l'inégalité

$$a+h+c < \sqrt{\frac{1+ah}{1-a}}. \tag{2.11}$$

En faisant dans cette inégalité les substitutions (2.5) on obtient, après quelques simples transformations,

$$K(h) = Ah^2+Bh+C > 0, \tag{2.12}$$

où

$$A = \frac{2r^2}{1-r^2} > 0, \quad B = \frac{-2r(2+r)}{1-r^2} < 0, \quad C = \frac{-4r}{(1-r)^2} < 0$$

pour $0 < r < 1$.

Le discriminant du trinôme $K(h)$ est

$$\Delta = B^2-4AC = \frac{4r^2S(r)}{(1-r^2)^2(1-r)} > 0.$$

Par conséquent l'inégalité (2.12), donc aussi (2.11) a lieu pour

$$h = \frac{a}{1-a} > \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = h(r).$$

En tenant compte de (2.7) on tire de là la conclusion du lemme 1.

Lemme 2. *Soit* $b(r)$ *défini par la formule* (2.8) *et soit* r_0, $0 < r_0 < 1$, *une racine de l'équation*

$$2r^3+r^2-1 = 0. \tag{2.13}$$

Alors r_0 *est le point où la fonction* $b(r)$ *admet son minimum absolu dans l'intervalle* $0 < r < 1$.

Démonstration. Dérivant la fonction $b(r)$ on obtient

$$b'(r) = \frac{k(r)}{r^2(1-r)\sqrt{(1-r)S(r)}}, \tag{2.14}$$

où $k(r) = r^3+4r^2+r-2-(1-r)\sqrt{(1-r)S(r)}$.

On voit aisément que les équations $k(r) = 0$ et (2.13) sont équivalentes dans l'intervalle $(0, 1)$ et qu'elles ont dans cet intervalle exactement une racine r_0. De là, en tenant compte de (2.14), on tire la conclusion du lemme 2.

THÉORÈME. *Supposons* $H(R)$, R_0 *et* $a(r)$ *définis par les formules* (2.4), (2.6) *et* (2.9). *Soit* r_0, $0 < r_0 < 1$, *une racine de l'équation* (2.13) *et* $a_0 = a(r_0)$. *Alors pour tout* a, $0 \leqslant a \leqslant a_0$, *et tout* β, $0 \leqslant \beta < 1$, *on a la formule*

$$\beta-\text{r.c. } \Sigma_a^* = \sqrt{\frac{2a-1-\beta+2\sqrt{a^2-a(1+\beta)+1}}{2a+1-\beta+2\sqrt{a^2-a(1+\beta)+1}}}. \tag{2.15}$$

Démonstration. Il résulte du lemme 2 que pour $0 < r < 1$ on a $a_0 \leqslant a(r)$ et que la formule (2.10) entraîne $\omega(r) = H(R_0)$ quand $0 \leqslant a \leqslant a_0$. En vertu de (2.2) et en trouvant la racine positive de l'équation $H(R_0) - \beta = 0$ on en déduit la formule (2.15) et la démonstration du théoréme est ainsi achevée.

Remarque. 1° En posant $a = 0$ dans la formule (2.15) on obtient

$$\beta-\text{r.c. } \Sigma^* = \sqrt{\frac{1-\beta}{3-\beta}}.$$

2° En posant $a = \beta = 0$ dans cette formule on obtient le résultat bien connu de Robertson [1]:

$$\text{r.c. } \Sigma^* = 1/\sqrt{3}.$$

Références

[1] M. S. Robertson, *Extremal problems for analytic functions with positive real part, applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), p. 236–253.

[2] V. A. Zmorovič (В. А. Зморович), *О границах выпуклости звездных функций порядка α в круге* $|z| < 1$ *и круговой области* $0 < |z| < 1$, Мат. Сб. 68 (110) (1965), p. 518–526.

Reçu par la Rédaction le 10. 9. 1974