ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1975)

Über die Orientierung der Kleinschen Geometrien

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice)

Zusammenfassung. Unter der Kleinschen Geometrie verstehen wir das Tripel (1) (M, G, f), wo M eine beliebige Menge, G beliebige Gruppe und $f\colon M\times G\to M$ die Wirkung von G auf M ist. Es sei (2) $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ eine Folge von s Elementen aus M. Mit $H(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ wird die folgende Untergruppe von G bezeichnet, $H(p_1, p_2, \ldots, p_s) = \{g\in G\colon f(p_i, g) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, s\}$. Die Folge (2) heisst Reper s-ter Ordnung, wenn H nur aus dem neutralen Element besteht. Alle Repers s-ter Ordnung bilden ein Objekt, (3) $(\mathfrak{M}_s, G, F_s)$ (vgl. 2.1), der Geometrie (1). Die Geometrie (1) heisst s-ter Ordnung orientierbar, wenn es eine invariante Zerlegung (Definition 2.2), des Objektes (3) gibt, die nur aus zwei Untermengen besteht.

Einige notwendige und hinreichende Bedingungen für die Orientierbarkeit der Geometrie werden gegeben. Die Betrachtungen werden auf zwei Beispielen der affinen und projektiven Geometrie illustriert.

Die Kleinsche Geometrie verstehe ich im folgenden in dem Sinne, wie sie in [1] dargestellt worden ist. In der vorliegenden Note wird eine Definition über die Orientierbarkeit in dieser Geometrie gegeben. Überdies sollen die unten durchgeführten Betrachtungen eine Anwendung, der in [1] eingeführten Begriffe zeigen. Insbesondere im § 1 wird der Begriff des Repers definiert und es werden einige seiner Eigenschaften bewiesen. § 2 enthält Definition der Orientierung sowie gewisse Bedingungen für die Orientierbarkeit in der Geometrie. In §§ 3, 4 und 5 werden die Ergebnisse an zwei Beispielen der affinen und projektiven Geometrie illustriert. Es wird dort festgestellt, dass die n-dimensionale affine Geometrie und projektive Geometrie ungerader Dimension orientierbar sind. Für die projektive Geometrie wird ein Objekt betrachtet, das unabhängig von diesen Anwendungen an und für sich interessant ist.

§ 1. Reper s-ter Ordnung. Zuerst erinnern wir an die in [1] gegebene Definition der Kleinschen Geometrie, (vgl. [1], S. 272, Definition 1.2).

DEFINITION. Die Kleinische Geometrie ist ein Tripel

$$(M, G, f), \tag{1.1}$$

wobei M eine beliebige Menge, G eine beliebige Gruppe und f eine effektive Wirkung von G auf M ist. Unter der effektiven Wirkung f verstehen wir eine Funktion $f\colon M\times G\to M$, die die drei folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\forall x\in M\wedge \forall g_1, g_2\in G, \quad f(f(x, g_1), g_2) = f(x, g_2\cdot g_1),$$
$$\forall x\in M, \quad f(x, e) = x,$$
$$\forall x\in M, \quad f(x, g) = x \Rightarrow g = e.$$

In diesen Bedingungen wird mit $g_2\cdot g_1$ das Produkt der Elemente g_2 und g_1 von G und mit e das neutrale Element der Gruppe G bezeichnet.

Es sei eine Kleinsche Geometrie (1.1) gegeben. Jeder Untermenge P von M kann die folgende Untergruppe

$$H(P) = \{g\in G: \forall x\in P, f(x, g) = x\} \tag{1.2}$$

von G eindeutig zugeordnet werden.

DEFINITION 1.1. Eine Untermenge P heisst *Reper* in der Geometrie (1.1), wenn die Untergruppe $H(P)$ nur aus dem neutralen Element e von G besteht,

$$H(P) = \{e\}. \tag{1.3}$$

Es gibt die *Repers* in jeder Geometrie. Da f auf M laut Definition effektiv wirkt, ist die ganze Menge M ein Reper. Die wichtigsten sind aber diese Repers, deren Anzahl von Punkten möglichst klein ist. Im weiteren beschränken wir uns auf die Repers, welche nur aus einer endlicher Anzahl von Punkten bestehen. Überdies werden wir voraussetzen, dass die Punkte des Repers eine *geordnete* Folge bilden.

DEFINITION 1.2. Ein *Reper* s-ter Ordnung in der Geometrie (1.1) ist jede Folge von s-Punkten, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ der Menge M, welche die Bedingung (1.3) erfüllen, d.h.

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_s) = \{e\}. \tag{1.4}$$

Ein *Reper* s-ter Ordnung heisst minimal, wenn es kein Reper $(s-1)$-ter Ordnung gibt.

Mit $\mathfrak{M}_s$ bezeichnen wir die Menge aller Repers s-ter Ordung in (1.1). $\mathfrak{M}_s$ ist eine Untermenge der Faser M^s des folgenden Produktobjektes (vgl. [1], S. 275),

$$(M^s, G, f^s), \quad M^s = \overset{(1)}{M}\times\overset{(2)}{M}\times\overset{(3)}{M}\times\ldots\times\overset{(s)}{M}, \tag{1.5}$$
$$\forall x\in M^s, \quad \forall g\in G, \quad f^s(x, g) := \big(f(x_1, g), f(x_2, g), \ldots, f(x_s, g)\big).$$

Wir beweisen die folgende Eigenschaft der Menge $\mathfrak{M}_s$.

HILFSSATZ 1.1. *$\mathfrak{M}_s$ ist eine invariante Untermenge der Faser M^s von* (1.5) (vgl. [1], S. 276, § 5, zulässige Untermenge).

Beweis. Wir sollen die folgende Implikation

$$\omega \in \mathfrak{M}_s \Rightarrow \forall g \in G, \quad \overline{\omega} = f^s(\omega, g) \in \mathfrak{M}_s,$$

für alle g aus G zeigen.

Es sei $\omega \in \mathfrak{M}_s$. Das Element ω hat die Form $\omega(p_1, \dots, p_s)$, wobei die Bedingung (1.4) gilt. Nach der Transformation geht ω in die $\overline{\omega}$

$$\overline{\omega} = f^s(\omega, g) = (\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_s), \quad \overline{p}_i = f(p_i, g),$$

über. Um zu zeigen, dass $H(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_i) = \{e\}$ gilt, nehmen wir ein beliebiges h aus $H(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_s\}$. Es gelten die Relationen: $f(\overline{p}_i, h) = \overline{p}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$,

$$f\big(f(f(p_i, g), h), g^{-1}\big) = p_i \Rightarrow f(p_i, g^{-1}hg) = p_i \Rightarrow g^{-1}hg = e \Rightarrow h = e.$$

Die letzte zeigt, dass $H(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_s) = \{e\}$ ist und somit der Hilfssatz bewiesen wurde.

§ 2. Orientierbarkeit s-ter Ordnung. Da $\mathfrak{M}_s$ eine invariante Untermenge von (1.5) ist, kann man das folgende Teilobjekt,

$$(\mathfrak{M}_s, G, F_s), \quad F_s: \doteq f^s | \mathfrak{M}_s \times G, \tag{2.1}$$

bilden (vgl. [1], S. 276, § 5). Mit Hilfe von (2.1) definieren wir Orientierbarkeit der Geometrie (1.1), bzw. des Raumes M. Zuerst muss aber der Begriff der invarianten Zerlegung eigenführt werden (vgl. [3]).

Es sei

$$(\mathfrak{M}, G, F) \tag{2.2}$$

irgend ein Objekt der Geometrie (1.1).

Definition 2.2. Eine Invariante Zerlegung des Objektes (2.2) ist jede Familie $\{\mathfrak{M}_a, a \in A\}$ der Untermengen $\mathfrak{M}_a$ von $\mathfrak{M}$, welche die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{a \in A} \mathfrak{M}_a, \tag{2.3}$$

$$\forall a, \beta \in A, \quad a \neq \beta, \quad \mathfrak{M}_a \cap \mathfrak{M}_\beta \neq \emptyset, \tag{2.4}$$

$$\forall a \in A, \quad \forall \underset{1}{\omega}, \underset{2}{\omega} \in \mathfrak{M}_a, \quad \forall g \in G, \quad \exists \beta \in A \quad \text{derart, daß} \tag{2.5}$$

$$F(\underset{1}{\omega}, g), F(\underset{2}{\omega}, g) \in \mathfrak{M}_\beta.$$

Definition 2.3. Die Geometrie (1.1) bzw. der Raum M wird s-ter Ordnung orientierbar genannt, wenn es eine invariante Zerlegung des Objektes (2.1) gibt, die nur aus zwei Untermengen $\mathfrak{M}_s^+$ und $\mathfrak{M}_s^-$ besteht. Jede der Mengen $\mathfrak{M}_s^+$ bzw. $\mathfrak{M}_s^-$ nennen wir *Orientierung* s-ter Ordnung der Geometrie (1.1) (des Raumes M). Die Geometrie mit ausgezeichneter Orientierung heisst *orientiert.*

Im allgemeinen ist es nicht leicht zu zeigen, dass eine gegebene Geometrie orientierbar ist. Deshalb geben wir unten zwei notwendige und hinreichende Bedingungen für die Orientierbarkeit. Die erste stellt eine *verträgliche Äquivalenzrelation* (vgl. [1], S. 273, Definition 6.1 bzw. [4]) und die zweite — eine *Komitante* dar. Wir geben nun die Definitionen der verträglichen Äquivalenzrelation und der Komitante.

DEFINITION 2.4. Eine in $\mathfrak{M}$ definierte Relation $\mathfrak{w}$ heisst mit (2.2) verträglich, wenn sie die Implikation

$$(2.6) \qquad \underset{2}{\omega}, \underset{1}{\omega} \in M, \quad \underset{2}{\omega}\mathfrak{w}\underset{1}{\omega} \Rightarrow \forall g \in G, \quad F(\underset{2}{\omega}, g)\mathfrak{w}F(\underset{1}{\omega}, g)$$

erfüllt.

Die verträglichen Äquivalenzrelationen haben die folgende Eigenschaft:

HILFSSATZ 2.1. *Jede mit einem Objekt verträgliche Äquivalenzrelation bestimmt eine invariante Zerlegung der Faser dieses Objektes und umgekehrt. Die Untermengen dieser Zerlegung sind Äquivalenzklassen hinsichtlich der Relation.*

Aus diesem Hilfssatz folgt sofort die Bedingung für die s-Orientierbarkeit.

SATZ 2.1. *Die Geometrie* (1.1) *ist dann und nur dann s-orientierbar, wenn es eine mit* (2.1) *verträgliche Äquivalenzrelation gibt, die der Bedingung*

$$(2.7) \qquad (\underset{1}{\omega}\mathfrak{w}\underset{2}{\omega})' \wedge (\underset{2}{\omega}\mathfrak{w}\underset{3}{\omega})' \Rightarrow \underset{1}{\omega}\mathfrak{w}\underset{3}{\omega}$$

genügt (*Strich bedeutet die Verneinung des Satzes*).

Die Bedingung (2.7) ist dann und nur dann erfüllt, wenn $\mathfrak{w}$ genau zwei Äquivalenzklassen hat.

Um eine weitere Bedingung für die Orientierbarkeit darzustellen, führen wir den Begriff der Komitante ein (vgl. [1], S. 274, § 4).

DEFINITION 2.5. Ein Objekt $(\mathfrak{N}, G, F_1)$ heisst Komitante des Objektes (2.2), wenn es eine Surjektion $h: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ gibt, die der Bedingung $\forall \omega \in \mathfrak{M}$, $\forall g \in G$, $F_1(h(\omega), g) = h(F(\omega, g))$ genügt. Unter den Komitanten und den verträglichen Äquivalenzrelationen gilt ein enger Zusammenhang. Er ist im nachstehenden Hilfssatz dargestellt.

HILFSSATZ 2.2. *Jede Komitante des Objektes* (2.2) *bestimmt eine mit* (2.2) *verträgliche Äquivalenzrelation* $\mathfrak{w}$ *und umgekehrt. Die Äquivalenzrelation* $\mathfrak{w}$ *hat die Form*

$$(2.8) \qquad \underset{2}{\omega} \in M, \quad \underset{1}{\omega} \in M, \quad \underset{2}{\omega}\mathfrak{w}\underset{1}{\omega} \Leftrightarrow h(\underset{2}{\omega}) = h(\underset{1}{\omega}).$$

Aus dem Hilfssatz (2.2) ergibt sich

Satz 2.2. *Die Geometrie* (1.1) *ist dann und nur dann s-orientierbar, wenn es eine Komitante des Objektes* (2.1) *gibt derart, dass ihre Faser genau zwei verschiedene Elemente besitzt.*

§ 3. Affine Geometrie. Im folgenden werden die Betrachtungen des vorigen Paragraphen für die Untersuchung der Orientierbarkeit der affinen und projektiven Geometrie angewandt.

Gemäss der in [2] gegebenen Definition ist die reelle n-dimensionale affine Geometrie ein Tripel

$$\big(R^n, GA(n, R), f\big), \tag{3.1}$$

wo $R^n = \overset{(1)}{R} \times \overset{(2)}{R} \times \overset{(3)}{R} \times \ldots \times \overset{(n)}{R}$ (n-faches Kartesisches Produkt der reellen Zahlen R) ist. $GA(n, R)$ ist die n-dimensionale affine Gruppe, d.h. die Menge

$$GA(n, R) = \{(A, a)\colon\ A \in GL(n, R),\ \ a \in R^n\}$$

mit der Verknüpfung "$\circ$"

$$(B, b) \circ (A, a) = (B \cdot A, Ba + b).$$

Die Wirkung f der Gruppe $GA(n, R)$ auf R^n hat die Form

$$f(x, A, a)\colon = A \cdot x + a.$$

In der Geometrie (3.1) existieren Repers $(n+1)$-ter Ordnung. Diese sind die Folgen von $(n+1)$-Punkten

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \tag{3.2}$$

mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Det}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0, \qquad u_i = x_i - x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Die Menge aller $(n+1)$-Repers bildet die Faser $\mathfrak{M}_{n+1}$ des Objektes

$$\big(\mathfrak{M}_{n+1}, GA(n, R), f_{n+1}\big). \tag{3.4}$$

Da es eine biskalare Komitante des Objektes (3.4) gibt und zwar $\sigma = \operatorname{sgn}\operatorname{Det}(u_1, \ldots, u_n)$, die nur zwei Werte $+1$ und -1 hat, ist die Geometrie (3.1), gemäss des Satzes 2.2 $(n+1)$-orientierbar. Die Orientierung und die entsprechende Äquivalenzrelation $\mathfrak{w}$ sind folgendermassen definiert:

$$\mathfrak{M}_{n+1}^{+} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}_{n+1}, \operatorname{sgn}\operatorname{Det}(u_1, \ldots, u_n) = 1\},$$

$$\mathfrak{M}_{n+1}^{-} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}_{n+1}, \operatorname{sgn}\operatorname{Det}(u_1, \ldots, u_n) = -1\},$$

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{M}_{n+1}, \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}_{n+1},$$

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n)\, \mathfrak{w}\, (x_0, x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \operatorname{sgn}\operatorname{Det}(y_1 - y_0, \ldots, y_n - y_0) = \operatorname{sgn}\operatorname{Det}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0).$$

Für $s < n+1$ ist die Geometrie nicht s-orientierbar, weil keine Repers s-ter Ordnung für $s < n+1$ existieren.

§ 4. Projektive Geometrie. Im folgenden wird gezeigt, dass die reelle projektive Geometrie ungerader Dimension $(n+2)$-orientierbar ist. Wir werden uns der Definition des projektiven Raumes bedienen, die in [2] gegeben ist. Wir wiederholen die Definition.

Es sei

$$R_*^{n+1} = R^{n+1} - \{(0, \ldots, 0)\}$$

das $(n+1)$-fache Kartesische Produkt von $\boldsymbol{R}$ ohne des Nullpunktes. In R_*^{n+1} definieren wir die folgende Äquivalenzrelation $\mathfrak{w}_0$: $x \in R_*^{n+1}$, $y \in R_*^{n+1}$, $y \mathfrak{w}_0 x \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in R,\ y = \lambda x$.

Mit P^n wird die Menge der Äquivalenzklassen hinsichtlich der Relation $\mathfrak{w}_0$ bezeichnet,

$$P^n := R_*^{n+1}/\mathfrak{w}_0.$$

Da $\mathfrak{w}_0$ eine mit dem Objekt $\big(R_*^{n+1}, GL(n+1, R), f\big)$, $f(x, A) := Ax$, verträgliche Äquivalenzrelation ist, kann man das Faktorobjekt

$$\big(P^n, GL(n+1, R), \hat{f}\big), \quad \hat{f}([x], A) := [Ax],$$

bilden ([1], S. 276, § 6). Die Wirkung $\hat{f}$ ist aber nicht effektiv. Um diese durch eine effektive zu ersetzen, nehmen wir die Gruppe $H_0 = \{A \in GL(n+1, R): \forall x \in R_*^{n+1}, [Ax] = [x]\}$ und bilden die Faktorgruppe

$$G_0(n+1, R) := GL(n+1, R)/H_0 \tag{4.1}$$

(vgl. [1], S. 272).

Definition. Die n-dimensionale projective Geometrie ist das Tripel

$$\big(P^n, G_0(n+1, R), f_0\big), \tag{4.2}$$

wobei die Wirkung f_0 von (4.1) auf P^n durch die Formel $f_0([x], [A]) := [Ax]$ erklärt ist.

Es sei

$$(p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}) = (p_\alpha), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{4.5}$$

eine Folge der $(n+2)$-Punkten von P^n. Die Repers $(n+2)$-ter Ordnung sind durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet.

Hilfssatz 4.1. *Die Folge* (4.3) *bildet dann und nur dann ein Reper $(n+2)$-ter Ordnung in* (4.2), *wenn der Rang der Matrix (p_α^i) gleich $n+1$ ist:*

$$\operatorname{Rang}(p_\alpha^i) = n+1, \tag{4.4}$$

wobei (p_α^i) zum p_α gehören.

Mit P_{n+2} bezeichnen wir die Menge aller Repers $(n+2)$-ter Ordnung. P_{n+2} ist eine invariante Untermenge des Produktobjektes (Hilfssatz 1.1)

$$\big((P^n)^{n+2}, G_0(n+1, R), f_0^{n+2}\big). \tag{4.5}$$

Man kann also ein Teilobjekt

$$\big(\boldsymbol{P}_{n+2}, G_0(n+1, R), F_0\big), \qquad F_0 := f_0^{n+2}|_{\boldsymbol{P}_{n+2}\times G_0(n+1,R)} \tag{4.6}$$

bilden. Im § 5 wird gezeigt werden, dass es für ungerades n eine biskalare Komitante von (4.6) gibt, die nur zwei Werte $+1$ und -1 annimmt. Aus dem Satz 2.2 erhalten wir

SATZ 4.1. *Die projektive Geometrie ungerader Dimension ist $(n+2)$-ter Ordnung orientierbar.*

§ 5. Konstruktion einer Komitante. Wir nehmen an, dass n eine ungerade Zahl ist und wir werden zeigen, dass das Objekt (4.6) eine nicht triviale Komitante besitzt. Diese kann auf folgende Weise konstruiert werden.

Aus den Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ der Folge (4.3) wählen wir n Punkte aus. Die ausgewählten Punkte werden mit

$$p_{a_1}, p_{a_2}, \ldots, p_{a_n}, \qquad 1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant n+1, \tag{5.1}$$

bezeichnet. Unter den Indizes $1, 2, \ldots, n+1$ gibt es genau einen, der in der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nicht auftritt. Dieser wird mit β bezeichnet. Für die Punkte (5.1) bilden wir $n+1$ Determinanten, die mit Hilfe des Ricci Symbols folgendermassen dargestellt werden:

$$q_i^\beta := \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n i} p_{a_1}^{i_1} \ldots p_{a_n}^{i_n}, \qquad \beta, i_1, i_2, \ldots, i_n, i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{5.2}$$

Durch Überschiebung mit p_0^i erhalten wir aus (5.2)

$$q_0^\beta := q_i^\beta p_0^i. \tag{5.3}$$

Für jedes $\beta = 1, 2, \ldots, n+1$ ist (5.3) gleich der Determinante, die aus diesen Spalten der Matrix (p_a^i) gebildet ist, welche den Punkten $p_{a_1}, p_{a_2}, \ldots, p_{a_n}, p_0$ entsprechen. Wegen (4.4) muss (5.3) für jedes β von Null verschieden sein. Man kann also die Zahlen

$$\omega_i^\beta := q_i^\beta / q_0^\beta, \tag{5.4}$$

bestimmen.

Die Funktion

$$\sigma(p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}) := \operatorname{sgn} \operatorname{Det}(\omega_i^\beta) \tag{5.5}$$

bestimmt eben die gesuchte Komitante, welche zum Beweis des Satzes 4.1 notwendig ist. Sie stellt gleichzeitig das am Ende der Einleitung erwähnte

Objekt dar. Um das zu beweisen, müssen wir zeigen, dass (5.5) die drei folgenden Eigenschaften hat:

(5.6) σ ist auf den Punkten (5.1) definiert,

(5.7) σ ist auf P_{n+2} von Null verschieden,

(5.8) σ hat die nachstehende Transformationsformel

$$\sigma' = \sigma(p_0', p_1', \ldots, p_{n+1}') = \operatorname{sgn} J(A)\sigma, \quad J(A) = \operatorname{Det} A.$$

Da n ungerade ist, ändert sich $\operatorname{sgn} J(A)$ nicht, wenn wir A durch ϱA für beliebiges $\varrho \neq 0$ ersetzen. Die Transformationsformel (5.8) ist also auf den Elementen $[A] \epsilon G_0(n+1, R)$ definiert.

Um (5.6) zu beweisen, nehmen wir an, dass $\hat{p}_a^i$ zu p_a gehört. Dann gilt die Relation $\hat{p}_a^i = \lambda_a p_a^i$. Aus (5.2), (5.3) und (5.4) erhalten wir die Beziehungen:

$$\hat{q}_i^\beta = \lambda_{a_1} \ldots \lambda_{a_n} q_i^\beta, \quad \hat{q}_0^\beta = \lambda_0 \lambda_{a_1} \ldots \lambda_{a_n} q_0^\beta, \quad \hat{\omega}_i^\beta = \lambda_0^{-1} \omega_i^\beta.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{p}_0, \ldots, \hat{p}_{n+1}) &= \operatorname{sgn} \operatorname{Det}(\lambda_0^{-1} \omega_i^\beta) = \operatorname{sgn} \lambda_0^{-n-1} \operatorname{Det} \omega_i^\beta = \operatorname{sgn} \operatorname{Det} \omega_i^\beta \\ &= \sigma(p_0, \ldots, p_{n+1}),\end{aligned}$$

welche zeigt, dass (5.5) sich nicht ändert, wenn wir p_a^i durch eine andere Zahlenfolge $\hat{p}_a^i$ aus derselben Äquivalenzklasse p_a ersetzen. Die Eigenschaft (5.6) ist also bewiesen.

Zum indirekten Beweis von (5.7) sei vorausgesetzt, dass $\sigma = 0$ ist. Daraus würde folgen, dass $\operatorname{Det}(q_i^\beta) = 0$ ist. Die Zeilen der Determinante $\operatorname{Det}(q_i^\beta)$ müssen linear abhängig sein. Es gibt also Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}$, die den Bedingungen

(5.9) $$\gamma_\beta q_i^\beta = 0, \quad \sum_{\beta|1}^{n+1} |\gamma_\beta| > 0$$

genügen. Eine der Zahlen $\gamma_\beta, \beta = 1, 2, \ldots, n+1$ muss von Null verschieden sein. Es sei

(5.10) $$\gamma_1 \neq 0.$$

(In den anderen Fällen ist der Beweis ganz analog). Durch Überschiebung von (5.9) mit p_1^i erhalten wir

(5.11) $$\gamma_\beta q_i^\beta p_1^i = 0.$$

Da $q_i^\beta p_1^i$ für $\beta = 2, 3, \ldots, n+1$, auf Grund von (5.2), die Werte der Determinanten darstellen, in denen zwei Spalten gleich p_1^i sind, d.h. man muß sie entfernen,

(5.12) $$q_i^\beta p_1^i = 0, \quad \beta = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Der Ausdruck $q_i^1 p_1^i$ ist eine Unterdeterminate $(n+1)$-ter Ordnung der Matrix (p_a^i). Er ist also wegen (4.4) von Null verschieden

(5.13) $$q_i^1 p_1^i \neq 0.$$

Aus (5.10), (5.12) und (5.13) erhalten wir die Ungleichung

$$\gamma_1 q_i^1 p_1^i = \gamma_\beta q_i^\beta p_1^i \neq 0,$$

welche der Relation (5.11) widerspricht. (5.5) muss also von Null verschieden sein.

Jetzt soll die Transformationsformel (5.8) für die Funktion (5.5) abgeleitet werden. Es sei $A = (A_j^{i'})$ ein beliebiges Element der Äquivalenzklasse $[A]$ von $G_0(n+1, R)$. Wir bezeichnen mit $p'_a = [A_j^{i'} p_a^j]$ das Bild von p_a bei der Transformation, die dem Element $[A]$ entspricht. Die Symbole q_0^β, q_i^β, ω_i^β haben nach dieser Transformation die folgenden Formen $'q_0^\beta = Jq_0^\beta$, $q_{i'}^\beta = A_{i'}^j J q_j^\beta$, $\omega_{i'}^\beta = A_{i'}^j \omega_j^\beta$.

Der Wert der Funktion σ für die Bilder p'_a der Punkte p_a kann folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\sigma(p'_0, \ldots, p'_{n+1}) &= \operatorname{sgn}\operatorname{Det}(\omega_{i'}^\beta) = \operatorname{sgn} J^{-1}\operatorname{Det}\omega_i^\beta = \operatorname{sgn} J \cdot \operatorname{sgn}\operatorname{Det}\omega_i^\beta \\ &= \operatorname{sgn} J \cdot \sigma.\end{aligned}$$

Die Funktion (5.5) hat also die Transformationformel (5.8) erfüllt, w.z.b.w.

Literatur

[1] E. J. Jasińska und M. Kucharzewski, *Kleinische Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte*, Colloq. Math. 26 (1972), p. 271–279.

[2] М. Кухажевский, Е. Ясинская, *Геометрия структур Клеина*, Доклады V Всесоюзной Конференции по Современным Проблемам Геометрии, Самарканд, 20.10–24.10. 1972.

[3] S. Midura et Z. Moszner, *Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet et l'objet géométrique*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), p. 323–338.

[4] E. Siwek et A. Zajtz, *Contribution à la théorie des pseudo-objets géométriques*, ibidem 19 (1967), p. 185–192.

Reçu par la Rédaction le 24. 7. 1973