ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIII (1977)

Application de la méthode topologique de T. Ważewski à l'examen de l'instabilité de la solution banale d'un système d'équations différentielles

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous démontrons une condition suffisante et nécessaire pour l'instabilité de la solution banale $x = 0$ du système d'équations différentielles $x' = f(t, x)$. Dans la démonstration de la condition suffisante nous nous servirons de la méthode topologique de l'examen de l'allure des intégrales des équations différentielles ordinaires de T. Ważewski. Le théorème obtenu est une généralisation de la condition d'instabilité de Tchetaiev et de Liapounov.

Envisageons le système d'équations différentielles

(1) $$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

où

$$f(t, 0) \equiv 0.$$

On connaît les conditions de Liapounov et Tchetaiev suffisantes pour l'instabilité de la solution banale $x \equiv 0$ de l'équation (1). La méthode topologique de T. Ważewski permet d'obtenir une autre condition d'instabilité. Nous la démontrons dans la suite. La condition obtenue est aussi nécessaire pour l'instabilité de la solution banale (dans le cas de l'unicité des solutions du système (1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$, pour chaque (t_0, x_0)). La condition de Tchetaiev est un cas particulier de notre théorème.

1. Envisageons les conditions suivantes:

Hypothèse H.

(h_1) Il existe un ensemble ouvert Ω contenu dans le tube

$$\Pi = \{t \geqslant 0,\ \|x\| \leqslant r_0\}, \qquad (r_0 > 0),\ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

(1.1) $$\Omega \subset \Pi,$$

tel que

1° l'ensemble $L = \{(t, x)\colon t \geqslant 0,\ x = 0\}$ est contenue dans la frontière de $\Omega = \mathrm{Fr}\,\Omega$:

$$L \subset \mathrm{Fr}\,\Omega. \tag{1.2}$$

2° Désignons par ω l'ensemble des $(t, x) \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ tels que $t = 0$. Par K_r désignons l'ensemble suivant:

$$K_r = \{(t, x)\colon t \geqslant 0,\ \|x\| = r\}.$$

Nous supposons que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $r \in (0, \varepsilon)$ tel que

$$K_r \cap \omega \neq \emptyset. \tag{1.3}$$

3° Désignons par S l'ensemble des points $(t_0, x_0) \in \mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}$ tels que pour la solution $\varphi(t; t_0, x_0)$ du système (1) pour laquelle $\varphi(t_0; t_0, x) = x_0$ il existe un $\delta > 0$ tel que le point $\big(t, \varphi(t; t_0, x_0)\big) \in \Omega$ pour $t_0 - \delta \leqslant t < t_0$ dans le cas $t_0 > 0$. Le point $(0, x_0)$ appartient à S dans le cas où il existe une suite de $(t_v, x_v) \to (0, x_0)$, $t_v > 0$ telle que le point (t_v, x_v) n'appartient pas à Ω et $(0, x_0) \in \mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}$. Supposons qu'on a l'un des cas suivants:

(A) L'ensemble S est vide.

(B) Pour chaque $r > 0$ tel qu'on a (1.3) désignons par Z_r l'ensemble suivant:

$$Z_r = K_r \cap \omega$$

et supposons que pour chaque $r > 0$ tel qu'on a (1.3):

(B_1) $Z_r \cap S$ soit un rétracte de l'ensemble S.

(B_2) $Z_r \cap S$ ne soit pas un rétracte de Z_r.

(B_3) Chaque point de S est un point de sortie stricte de Ω c'est-à-dire pour chaque $(t_0, x_0) \in S$ il existe un $\delta > 0$ tel que le point $\big(t, \varphi(t, t_0, x_0)\big)$ n'appartient à $\Omega \cup \mathrm{Fr}\,\Omega$ pour $t_0 < t \leqslant t_0 + \delta$.

(h_2) Il existe une fonction $V(t, x)$ definie dans l'ensemble Π, telle que

(a_1) (1.4)
$$0 \leqslant V(t, x) \leqslant M \quad \text{dans } \Pi,$$
$$0 < V(t, x) < M \quad \text{dans } \Omega.$$

(a_2) Pour chaque $t \geqslant 0$, $\lim V(t, x)$ pour $x \to 0$, $(t, x) \in \Omega$ existe et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (t,x) \in \Omega}} V(t, x) = 0. \tag{1.5}$$

(a_3) Pour chaque solution $x(t)$ de (1) la dérivée de la fonction composée $v(t) = V\big(t, x(t)\big)$ existe et

$$\frac{d}{dt} V(t, x)_{(1)} = v'(t) \quad \text{(par définition)}.$$

Pour chaque $a > 0$ il existe une fonction $g_a(t, v)$ définie et continue pour $0 \leqslant t$, $a \leqslant v \leqslant M$,

$$(1.6) \qquad g_a(t, a) > 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant t,$$

telle que

$$(1.7) \qquad \frac{d}{dt} V(t, x)_{(1)} \geqslant g_a\big(t, V(t, x)\big) \quad \text{pour } (t, x) \in \Omega,\ a \leqslant V \leqslant M$$

et que pour chaque solution $u(t)$ de l'équation

$$(1.8) \qquad u'(t) = g_a\big(t, u(t)\big), \quad u(0) = v_0 \geqslant a > 0,$$

il existe un $T > 0$ ($T < \infty$) tel que

$$(1.9) \qquad u(T) = M, \quad a < u(t) < M \quad \text{pour } 0 < t < T.$$

(h_3) Supposons de plus l'unicité des solutions de l'équation (1) avec la condition $x(t_0) = x_0$ (pour chaque (t_0, x_0)) et pour chaque a l'unicité des solutions de l'équation (1.8) (avec la condition $u(t_0) = u_0$, pour chaque (t_0, u_0)).

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* H *étant admises, il existe, pour chaque* r, $0 < r < r_0$, *une solution* $x_r(t)$ *du système* (1) *et une constante* $T > 0$ *telle que*

$$\|x_r(0)\| \leqslant r \quad \textit{et} \quad \|x_r(T)\| = r_0,$$

d'où il vient que la solution $x \equiv 0$ *du système* (1) *est instable.*

La démonstration du théorème 1 peut être divisée en deux étapes, marquées par les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *De l'hypothèse* (h_2), (h_3) *il résulte qu'il n'existe pas de point* x_0, $0 < \|x_0\| < r_0$, $(0, x_0) \in \omega - \mathrm{Fr}\,\Omega$ *tel que la solution* $\varphi(t; t_0, x_0)$ *soit contenue dans* Ω *pour* $0 < t < \infty$.

LEMME 2. *Les hypothèses* (h_1), (h_3) *étant admises, il existe pour chaque* r, $0 < r < r_0$ *le point* x_r, *tel que* $\|x_r\| \leqslant r$ *et tel que pour la solution* $\varphi(t; 0, x_r)$ *du système* (1) *on a*

$$J \cap \{\mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}\} = 0$$

où l'ensemble $J = J_{\varphi(\cdot;t_0,x_0)}$ *est défini par la relation*

$$J = \{(t, x):\ t > 0,\ x = \varphi(t; 0, x_r)\}.$$

Démonstration du lemme 1. Supposons que la solution $x(t)$ du système (1) soit contenue pour $0 < t < \infty$ dans Ω:

$$0 < \|x(0)\| < r_0.$$

Il existe un $a > 0$ tel que $v(0) = V\big(0, x(0)\big) \geqslant a$. Le long de la solution $x(t)$ on a

$$(1.10) \qquad v'(t) = \frac{d}{dt} V\big(t, x(t)\big) \geqslant g_a\big(t, v(t)\big)$$

pour $0 < t < \infty$ tel que $a \leqslant v(t) \leqslant M$ d'où il résulte que pour chaque t tel que $v(t) = a$ on a

$$v'(t) \geqslant g_a(t, a) > 0$$

et par suite $v(t) > a$ pour chaque $t > 0$, et l'inégalité (1.10) est valable pour tout $t > 0$, d'où

$$v(t) \geqslant u(t) > 0 \quad \text{pour } 0 < t < \infty$$

où $u(t)$ est la solution de (1.8) telle que

$$v(t_0) = u(t_0) \geqslant a.$$

Mais, en vertu de (1.9), on a

$$V\big(T, x(T)\big) = v(T) \geqslant M = u(T)$$

ce qui est impossible dans Ω (cf. (1.4)).

Remarque 1. Du lemme 1 il s'ensuit que pour chaque solution $x(t)$ du système (1) telle que

$$J \cap \{\mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}\} = \emptyset \quad \text{pour } t > 0$$

il existe un $T_x > 0$ tel que $\big(T_x, x(T_x)\big) \epsilon K_{r_0}$.

Démonstration du lemme 2. Dans le cas (A) de la définition de l'ensemble S il résulte que pour chaque solution $x(t)$ du système (1) telle que $\big(0, x(0)\big) \epsilon \omega$ on a

$$J \cap (\mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}) = 0 \quad \text{pour } t > 0 \text{ tel que } \big(\tau, x(\tau)\big) \epsilon \Omega \text{ où } 0 < \tau < t.$$

Dans le cas (B) envisageons pour $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < r_0$, quelconque l'ensemble Z_r. Du théorème sur la méthode topologique de T. Ważewski[1] il s'ensuit que sur Z_r il existe au moins un point $(0, x_r)$ tel que

$$J_{\varphi(\cdot\,;0,x_r)} \cap S = \emptyset \quad \text{pour } t > 0$$

tel que

$$\big(\tau, \varphi(\tau, 0, x_r)\big) \epsilon \Omega \quad \text{pour } 0 < \tau < t.$$

Sur l'ensemble $\{\mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}\}$ il n'y a de points de sortie de Ω que les points de S, et par suite $\big(t, \varphi(t, 0, x_r)\big) \epsilon \Omega$ pour $0 < t < \infty$ où il existe un $\tau(x_r) > 0$ tel que

$$\big(\tau(x_r), \varphi\big(\tau(x_r), 0, x_r\big)\big) \epsilon K_{r_0}, \tag{1.11}$$

$$\big(t, \varphi(t; 0, x_r)\big) \epsilon \Omega \quad \text{pour } 0 < t < \tau(x_r). \tag{1.12}$$

---

[1] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 279–313.

c'est-à-dire dans le cas envisagé on a aussi

$$J \cap \{\mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}\} = \emptyset.$$

Démonstration du théorème 1. En vertu du lemme 2 pour chaque r tel qu'on a (1.3) il existe un x_r tel que $(0, x_r) \in Z_r$ et

$$J \cap \{\mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}\} = 0 \quad \text{pour } t \geqslant 0$$

tel que

$$\big(\tau, \varphi(\tau; 0, x_r)\big) \in \Omega \quad \text{pour } 0 < \tau < t.$$

En vertu du lemme 1 pour $\varphi(t; 0, x_r)$ il existe $\tau(x_r)$ tel qu'on a (1.11) et (1.12). De la définition de l'ensemble K_{r_0} il vient

$$\big\|\varphi\big(\tau(x_r); 0, x_r\big)\big\| = r_0,$$

$$\|\varphi(0; 0, x_r)\| = \|x_r\| = r \leqslant \varepsilon$$

donc il existe un $r_0 > 0$ tel que dans chaque boule $\|x\| \leqslant \varepsilon$ il existe un point x_r, tel que $\|x_r\| = r$ et que la solution $\varphi(t; 0, x_r)$ sort de la boule $\|x\| \leqslant r_0$ pour $t = \tau(x_r) > 0$. La solution banale $x = 0$ du système (1) est donc instable.

2. Remarque 2. Dans le cas de l'unicité des solutions du système (1) la condition de Tchetaiev est un cas particulier du théorème 1.

THÉORÈME DE TCHETAIEV.

HYPOTHÈSES H. Supposons qu'il existe un ensemble ouvert Ω satisfaisant à l'hypothèse (h_1) 1° et 2°. Supposons qu'il existe dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \mathrm{Fr}\,\Omega$ une fonction $V(t, x)$ de classe C^1 telle que

$$M \geqslant V(t, x) > 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.1}$$

$$V(t, x) = 0 \quad \text{sur la } \mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0}. \tag{2.2}$$

Pour chaque a, $0 < a < M$ il existe une constante $u_a > 0$ telle que

$$\frac{d}{dt} V_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f^i(t, x) \geqslant u_a > 0. \tag{2.3}$$

Les hypothèses H étant admises, la solution banale de (1) est instable.

Dans le cas du théorème de Tchetaiev l'hypothèse (h_1)–3(A) résulte de l'hypothèse (2.1) et (2.2) et de l'inégalité (2.3). Pour chaque sloution $x(t)$ telle que

$$\big(t_0, x(t_0)\big) \in \mathrm{Fr}\,\Omega - K_{r_0} \tag{2.4}$$

et telle que

$$\big(t, x(t)\big) \in \Omega \quad \text{pour } t_0 - \delta \leqslant t < t_0$$

on a

$$V(t_0-\delta, x(t_0-\delta)) = a > 0$$

et par suite

$$v'(t) \doteq \frac{d}{dt} V(t, x(t)) > 0 \quad \text{pour } t_0-\delta \leqslant t < t_0$$

d'où

$$v(t) \geqslant v(t_0-\delta) = a > 0$$

et

$$v'(t) > u_a > 0 \quad \text{pour } t_0-\delta \leqslant t < t_0$$

d'où il vient

$$v(t) > v(t_0-\delta)+u_a\cdot(t-t_0+\delta)$$

et par suite

$$v(t_0) \geqslant a+u_a\cdot\delta > 0$$

ce qui est incompatible avec la relation (2.4) et l'hypothèse (2.2). Donc $J\cap(\mathrm{Fr}-K_{r_0}) = \emptyset$ pour chaque solution $x(t)$ telle que $(t_0, x(t_0))\in\Omega$, c'est-à-dire l'ensemble S est vide. L'hypothèse (h_2) est satisfaite avec la fonction $g_a(t, v) = \mathrm{const} = u_a > 0$. L'équation (1.8) est de la forme

$$u'(t) = u_a$$

et par suite $u(t) = u_a t+u(0)$, $u(0) < M$.

Pour $T = \dfrac{M-u(0)}{u_a}$ on a $u(T) = M$.

3. Condition nécessaire d'instabilité.

THÉORÈME 2. *Dans le cas de l'unicité l'hypothèse* H, *le cas* A, *est la condition nécessaire d'instabilité de la solution $x = 0$ du système* (1).

Supposons que la solution banale $x = 0$ du système (1) soit instable. Il existe alors une constante $\varrho_0 > 0$ telle que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un point x_0 tel que $\|x_0\| \leqslant \varepsilon$ et une constante $T > 0$ telle que $\|\varphi(T; 0, x_0)\| = \varrho_0$. Désignons par Ω l'ensemble des points (t, x) tels que $t > 0$, $\|x\| < \varrho_0-\delta$ ($\delta > 0$) et tels que pour la solutions $\varphi(\tau; t, x)$ il existe un $T(t, x) > t$ tel que

$$\|\varphi(T(t, x); t, x)\| > r_0-\delta.$$

L'ensemble Ω est ouvert, car la solution $\varphi(t; \tau, \xi)$ dépend d'une manière continue de (τ, ξ). D'une façon analogue nous obtenons l'ensemble ω pour $t = 0$. De l'instabilité nous tirons immédiatement (1.3) et (1.2).

De l'unicité des solutions de (1) il résulte que pour chaque $(t,x) \in \Omega$, $J \cap (\operatorname{Fr}\Omega - K_{r_0}) = \emptyset$, c'est-à-dire que S est vide. Désignons par $\tau(t, x)$ le premier $\tau \geqslant t$ tel que

$$\|\varphi(\tau(t, x); t, x)\| = r_0 \quad (r_0 = \varrho_0 - \delta), \tag{3.1}$$

$$\|\varphi(\tau; t, x)\| < r_0 \quad \text{pour } t \leqslant \tau < \tau(t, x) \tag{3.2}$$

et posons

$$\tilde{T}(t, x) = \tau(t, x) - t \geqslant 0,$$

$$V(t, x) = \begin{cases} e^{-\tilde{T}(t,x)} & \text{pour } (t, x) \in \Omega, \\ 0 & \text{pour } (t, x) \in \Pi - \Omega. \end{cases}$$

On a

$$0 \leqslant V(t, x) \leqslant 1 \quad \text{dans } \Pi, \quad V(t, x) > 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Envisageons la fonction composée $V\big(t, x(t)\big) = v(t)$ pour $\big(t, x(t)\big) \in \Omega$ où $x(t)$ est une solution quelconque de (1). Évaluons le quotient

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{e^{-\tilde{T}(t+h, x(t+h))} - e^{-\tilde{T}(t, x(t))}}{h}$$
$$= \frac{e^{-\tau(t+h, x(t+h)) + t + h} - e^{-\tau(t, x(t)) + t}}{h}$$

mais $\tau\big(t, x(t)\big) = \text{const}$ pour chaque intégrale du (1) et par suite

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = e^{-\tau(t, x(t))} \cdot \frac{e^{t+h} - e^t}{h}$$

d'où résulte l'existence de

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = e^{-\tau(t, x(t))} \cdot \frac{d}{dt} e^t = e^{-\tau(t, x(t)) + t} = V\big(t, x(t)\big)$$

c'est-à-dire

$$v'(t) = v(t).$$

Donc pour chaque a pour la fonction $g_a(t, v)$ on peut poser

$$g_a(t, v) = v, \quad g_a(t, a) = a > 0.$$

La solution de l'équation

$$u' = g_a(t, u)$$

est de la forme

$$u(t) = u(t_0)e^{t-t_0} \qquad \text{pour } M > u(t_0) \geqslant a,$$

$$u(t) \geqslant M \qquad \text{pour } t-t_0 \geqslant \ln\frac{M}{u(t_0)}.$$

Toutes les hypothèses du théorème 1 sont donc satisfaites.

4. Exemples de l'application de la méthode de T. Ważewski dans certains cas particuliers. Envisageons le système des équations différentielles

$$(4.1) \qquad x' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y)$$

où

$$(4.2) \qquad f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0.$$

Exemple 1. Envisageons le système (4.1) dans le cas où les fonctions f_i satisfont aux hypothèses suivantes:

Hypothèses $\tilde{\mathrm{H}}$. Supposons qu'il existe des constantes $\varrho > 0$, l_1, l_2, $l_1 > l_2$ telles que dans l'ensemble

$$\tilde{\omega} = \{l_2 x \leqslant y \leqslant l_1 x,\ x^2+y^2 \leqslant \varrho,\ x > 0\}$$

on a

$$(4.3) \qquad f_1(x, y) > 0 \quad (\text{dans } \tilde{\omega})$$

que

$$(4.4) \qquad \lim \frac{f_2}{f_1}\frac{(x, y)}{(x, y)} = l_3$$

existe pour $(x, y) \to (0, 0)$, $(x, y) \in \tilde{\omega}$ et enfin que

$$(4.5) \qquad l_2 < l_3 < l_1.$$

Théorème $\tilde{\mathrm{A}}$. *Les hypothèses $\tilde{\mathrm{H}}$ étant admises, la solution banale $x = y = 0$ est instable.*

De la relation (4.4) et (4.5) il résulte qu'il existe un r_0 et un ϱ, $\varrho \geqslant r_0 > 0$ tels que

$$\frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} > l_2 \qquad \text{pour } y = l_2 x,\ x^2+y^2 \leqslant r_0^2,$$

$$\frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} < l_1 \qquad \text{pour } y = l_1 x,\ x^2+y^2 \leqslant r_0^2.$$

$f_1(x, y)$ étant positive, tous les points de l'ensemble

$$\{t > 0,\ y = l_1 x,\ \text{où } y = l_2 x,\ x^2+y^2 < r_0^2,\ x > 0\}$$

sont des points d'entrée dans

$$\Omega = \{l_2 x < y < l_1 x,\ x^2 + y^2 < r_0^2,\ t > 0,\ x > 0\}$$

c'est-à-dire que l'ensemble S est vide. On peut poser

$$V(t, x, y) = \begin{cases} x & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{pour } (x, y) \in \Pi - \Omega, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} V(x, y)_{(4.1)} = x' = f_1(x, y),$$

$$V(t, x, y) > 0 \qquad \text{dans } \Omega,$$

$$\frac{d}{dt} V(t, x, y)_{(4.1)} > 0 \qquad \text{dans } \Omega,$$

pour $x \geqslant a > 0$ et $(t, x, y) \in \Omega$ il existe une constante $u_a > 0$ telle que

$$f_1(x, y) \geqslant u_a \quad \text{pour } (t, x, y) \in \Omega,\ x \geqslant a$$

et par suite

$$\frac{d}{dt} V(t, x, y) > u_a \quad \text{pour } V(t, x, y) > a,\ (t, x, y) \in \Omega$$

donc le théorème 1 (cas A) entraîne l'instabilité de la solution banale.

Exemple 2. Admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses H*. Il existe des constantes $\varrho > 0$, $l_1, l_2, l_1 > l_2$ telles que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = l_1 x}} \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} = l_3 > l_1$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = l_2 x}} \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} = l_4 < l_2,$$

$$f_1(x, y) > 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \tilde{\omega}$$

où

$$\tilde{\omega}: \begin{matrix} x^2 + y^2 \leqslant \varrho, \\ l_1 x \leqslant y \leqslant l_2 x, \end{matrix} \qquad x > 0.$$

Théorème $\tilde{\mathrm{B}}$. *Les hypothèses* H* *étant admises, la solution banale du système* (4, 1) *est instable.*

Démonstration. On vérifie facilement qu'on peut appliquer le cas B du théorème 1 avec la même fonction $V(t, x, y)$ que dans le théorème $\tilde{\mathrm{A}}$, et avec le même ensemble Ω.

EXEMPLE 3. Envisageons le système (4.1), où (f_1, f_2) satisfait à l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSES H^{**}.

1° Il existe une fonction $\varphi(x)$ continue pour $0 < x \leqslant \varrho_0$ telle que

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{pour } 0 < x < \varrho_0, \varphi(0) = 0. \tag{4.5}$$

2° $\varphi'(x)$ existe pour $x > 0$ et

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x) = c > 0. \tag{4.6}$$

3° La limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))} = a_1 \tag{4.7}$$

existe et

$$a_1 > c. \tag{4.8}$$

4° La limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x, -\varphi(x))}{f_1(x, -\varphi(x))} = a_2 \tag{4.9}$$

existe et

$$-a_2 > c. \tag{4.10}$$

Supposons de plus que

$$f_1(x, y) > 0 \quad \text{pour } y^2 < \varphi^2(x), 0 < x \leqslant \varrho_0. \tag{4.11}$$

THÉORÈME B^{**}. *Les hypothèses* H^{**} *étant admises,* $x = y = 0$ *est la solution instable du système* (4.1).

Démonstration. De l'hypothèse (4.6), (4.7) et (4.9) il résulte qu'il existe un $r_0 < \varrho_0$ tel que

$$\frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))} > \varphi'(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant r_0 \tag{4.12}$$

et

$$\frac{f_2(x, -\varphi(x))}{f_1(x, -\varphi(x))} < -\varphi'(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant r_0. \tag{4.13}$$

Envisageons l'ensemble Ω suivant:

$$\{t > 0, y^2 < \varphi^2(x), x^2 + y^2 < r_0^2\}.$$

De l'inégalité (4.12) et (4.13) il s'ensuit que pour $y = \varphi(x)$

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi^2(x) - y^2\big) = 2\varphi(x)\big\{\varphi'(x)f_1\big(x, \varphi(x)\big) - f_2\big(x, \varphi(x)\big)\big\}$$

$$= 2\varphi(x)f_1(x, \varphi)\left\{\varphi'(x) - \frac{f_2\big(x, \varphi(x)\big)}{f_1\big(x, \varphi(x)\big)}\right\} < 0.$$

D'une façon analogue on a pour $y = -\varphi(x)$

$$\frac{d}{dt}\{\varphi^2(x)-y^2\}_{y=-\varphi(x)}$$
$$= 2\varphi(x)f_1\big(x,-\varphi(x)\big)\left\{\varphi'(x)+\frac{f_2\big(x,-\varphi(x)\big)}{f_1\big(x,-\varphi(x)\big)}\right\}<0 \quad \text{pour } 0<x\leqslant r_0.$$

C'est-à-dire $S = \operatorname{Fr}\Omega - K_{r_0} - L$ et chaque point de l'ensemble S est un point de sortie stricte de Ω. L'ensemble Z_r est de la forme

$$Z_r = \{t = 0,\, x^2+y^2 = r^2,\, y^2 \leqslant \varphi^2(x)\}$$

et

$$Z_r\cap S = \{t = 0,\, x^2+y^2 = r^2,\, y^2 = \varphi^2(x)\}.$$

Il existe exactement un x_{0r} tel que

$$x_{0r}^2+\varphi^2(x_{0r}) = r^2.$$

On a donc seulement deux points appartenant à $Z_r\cap S$. Ce sont les points $(x_{0r}, \sqrt{r^2-x_{0r}^2})$ et $(x_{0r}, -\sqrt{r^2-x_{0r}^2})$. Un tel ensemble ne peut pas être un rétracte de l'arc Z_r, mais il est un rétracte de l'ensemble S.

Comme fonction $V(t, x, y)$ on peut prendre la fonction

$$V(t,x,y) = \begin{cases} x & \text{pour } (t,x,y)\in\Omega, \\ 0 & \text{pour } (t,x,y)\in\Pi-\Omega. \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu le cas B du théorème 1.

Reçu par la Rédaction le 23. 5. 1974