ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1973)

Verallgemeinerte projekiv-euklidische Räume

von Leon Bieszk und Donata Matel-Kamińska (Szczecin)

Einleitung. Den Gegenstand dieser Arbeit (angeregt von Prof. S. Gołąb) bildet eine Verallgemeinerung der Begriffe und Sätze hinsichtlich der projektiv-euklidischen Räume.

Es sei gegeben ein Raum ausgestattet mit einer linearen Konnexion L_n, d.h. eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit X_n von einer hinreichend hohen Regularitätsordnung, in der ein Objektfeld der parallelen Übertragung $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ definiert ist.

Das Objekt $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ bestimmt eindeutig des System der geodätischen Linien. H. Weyl hat in seiner Arbeit [8] folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Sollen zwei Objekte $\underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu}$ und $\underset{2}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu}$, die in derselben Mannigfaltigkeit X_n angegeben sind, dasselbe System der geodätischen Linien bestimmen, so ist es notwendig und hinreichend, dass ein Vektorfeld p_λ von der Eigenschaft existiere*

$$\underset{2}{\Gamma}{}_{(\lambda\mu)}^{\nu} - \underset{1}{\Gamma}{}_{(\lambda\mu)}^{\nu} = 2A_{(\lambda}^{\nu}p_{\mu)}. \tag{1}$$

Wenn wir uns nur auf die symmetrischen Objekte $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ beschränken ($L_n = A_n$), so vereinfacht sich die Bedingung (1) und lautet:

$$\underset{2}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} - \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} = 2A_{(\lambda}^{\nu}p_{\mu)}. \tag{2}$$

Berücksichtigt man die Tatsache, dass das System der geodätischen Linien ausschliesslich (nach dem obigen Satz) von dem symmetrischen Teil $\Gamma_{(\lambda\mu)}^{\nu}$ des Objekts $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ abhängig ist hat man sich beschränkt projektiv-euklidischen Räume A_n zu untersuchen.

Definition 1. Den Raum A_n mit dem Objekt $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ nennen wir *projektiv-euklidisch*, wenn ein solches Vektorfeld p_λ existiert, dass der Raum mit der Konnexion

$$\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + 2A_{(\lambda}^{\nu}p_{\mu)} \tag{3}$$

einen identisch verschwindenden Krümmungstensor $\tilde{R}_{\lambda\mu\nu}^{\omega}$ hat.

Definition 2. Die Transformation $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \to \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$, die durch die Formel (3) gegeben ist, wird als *projektive Transformation der Konnexion* genannt.

Bezeichnet man kurz

(4) $$W_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{1-n^2}[nR_{\lambda\mu}+R_{\mu\lambda}],$$

wo $R_{\lambda\mu}$ den Ricci-Tensor bedeutet, so nennt man

(5) $$W_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega} \overset{\mathrm{df}}{=} R_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega} - 2W_{[\lambda\mu]}A_\nu^\omega + 2A_{[\lambda}^\omega W_{\mu]\nu}$$

den *projektiven Krümmungstensor von Weyl.*

Es besteht der

Satz 2. *Für $n>2$ ist der Raum A_n dann und nur dann projektiv-euklidisch, wenn der Tensor $W_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega}$ identisch verschwindet. Dagegen für $n=2$ ist A_2 dann und nur dann projektiv-euklidisch, wenn der Tensor $W_{\lambda\mu}$ die Bedingungen erfüllt*

(6) $$\nabla_{[\omega}W_{\lambda]\mu} = 0.$$

Es gelten folgende Eigenschaften der Tensoren $W_{\lambda\mu}$ und $W_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega}$ [6].

Satz 3 (a) *Tensor $W_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega}$ ist eine Invariante der projektiven Transformationen.*

Für $n=2$ ist (b) $W_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega}=0$.

Für $n>2$ haben wir:

(7) (c) $W_{(\lambda\mu)\nu}^{\ \ \ \ \ \omega}=0$, (d) $W_{[\lambda\mu\nu]}^{\ \ \ \ \ \omega}=0$, (e) $W_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \lambda}=0$, (f) $W_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \nu}=0$,

(g) $$\overset{1}{R}{}_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega} - 3\overset{1}{R}{}_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega} + 3\overset{2}{R}{}_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega} - \overset{3}{R}{}_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega} = 0,$$

wo $\overset{1}{R}{}_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega}$, $\overset{2}{R}{}_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega}$ und $\overset{3}{R}{}_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \omega}$ die Krümmungstensoren der Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$ sind, die mit Hilfe der Vektorfelder p_λ, $2p_\lambda$, und $3p_\lambda$ entsprechend generiert wird, d.h.: $\overset{1}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + 2A_{(\lambda}^{\nu}p_{\mu)}$,

$$\overset{2}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + 4A_{(\lambda}^{\nu}p_{\mu)}, \qquad \overset{3}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + 6A_{(\lambda}^{\nu}p_{\mu)},$$

(8) (h) $$\nabla_{[\varkappa}W_{\lambda\mu]\nu}^{\ \ \ \ \ \omega} = \frac{1}{n-2}A_{[\varkappa}^{\omega}\nabla_{|\varrho|}W_{\lambda\mu]\nu}^{\ \ \ \ \ \varrho}.$$

1. Verallgemeinerte projektiv-euklidische Räume. Gegeben sei ein Raum L_n mit einer linearen Konnexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ (nicht notwendig symmetrischen). Zuerst werden die grundlegenden Definitionen und Identitäten angegeben, die für die Beweise der entsprechenden Sätze und Eigenschaften unerlässlich sind.

Der *Einheitstensor* wird mit A_μ^λ bezeichnet:

(1) $$A_\mu^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \lambda=\mu, \\ 0, & \text{wenn } \lambda\neq\mu. \end{cases}$$

Der *Torsionstensor* $S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ wird wie üblich definiert:

(2) $$S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} = \Gamma_{[\lambda\mu]}^{\ \ \ \nu}.$$

Eine Konnexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ wird *halbsymmetrisch* genannt, wenn der Tensor $S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ folgende Form hat:

(3) $$S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} = S_{[\lambda}A_{\mu]}^{\nu},$$

wo

(4) $$S_\lambda = \frac{2}{n-1} S_{\lambda\mu}^{\ \ \mu} \quad \text{ist.}$$

Es gilt

(5) $$\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} = \Gamma_{(\lambda\mu)}^{\ \ \ \nu} + S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}.$$

Mit ∇_ω wird die kovariante Ableitung bezüglich $\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ bezeichnet. Insbesondere ergibt sich dann

(6) $$\nabla_\omega A_\mu^\lambda = 0.$$

Der *Krümmungstensor* $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ der Konnexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ wird wie folgt ausgedrückt:

(7) $$R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} \stackrel{\text{df}}{=} 2\partial_{[\alpha}\Gamma_{\beta]\gamma}^{\ \ \ \delta} + 2\Gamma_{[\alpha|\varrho|}^{\ \ \ \ \delta}\Gamma_{\beta]\gamma}^{\ \ \ \varrho}.$$

Algebraische Komitanten des Krümmungstensors werden wie folgt bezeichnet:

(8) $$R_{\alpha\beta} \stackrel{\text{df}}{=} R_{\delta\alpha\beta}^{\ \ \ \delta}, \qquad V_{\alpha\beta} \stackrel{\text{df}}{=} R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \gamma}.$$

Die grundlegenden Identitäten für den Krümmungstensor lauten [6]:

(9) $$R_{(\alpha\beta)\gamma}^{\ \ \ \ \delta} = 0,$$

(10) $$R_{[\alpha\beta\gamma]}^{\ \ \ \ \delta} = 2\nabla_{[\alpha}S_{\beta\gamma]}^{\ \ \ \delta} - 4S_{[\alpha\beta}^{\ \ \ \varrho}S_{\gamma]\varrho}^{\ \ \ \delta},$$

(11) $$2R_{[\alpha\beta]} = -V_{\alpha\beta} + 2\nabla_\varrho S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho} + 2(n-1)\nabla_{[\alpha}S_{\beta]} + 2(n-1)S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}S_\varrho,$$

(12) $$\nabla_{[\omega}R_{\alpha\beta]\gamma}^{\ \ \ \ \delta} = 2S_{[\omega\alpha}^{\ \ \ \varrho}R_{\beta]\varrho\gamma}^{\ \ \ \ \delta} \quad \text{(Bianchische Identität)},$$

(13) $$\nabla_{[\omega}V_{\alpha\beta]} = 2S_{[\omega\alpha}^{\ \ \ \varrho}V_{\beta]\varrho},$$

(14) $$\nabla_\varrho R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \varrho} = 2\nabla_{[\alpha}R_{\beta]\gamma} + 4S_{\omega[\alpha}^{\ \ \ \varrho}R_{\beta]\varrho\gamma}^{\ \ \ \ \omega} + 2S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}R_{\varrho\gamma}.$$

Wir erinnern noch an eine Formel, die weiter benutzt wird:

(15) $$\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}W^{\lambda_1\ldots\lambda_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_q} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} R_{\mu\nu\varrho}^{\ \ \ \ \lambda_i}W^{\lambda_1\ldots\lambda_{i-1},\varrho,\lambda_{i+1}\ldots\lambda_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_q} - \\ - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} R_{\mu\nu\mu_j}^{\ \ \ \ \ \varrho}W^{\lambda_1\ldots\lambda_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_{j-1},\varrho,\mu_{j+1}\ldots\mu_q} - \\ - S_{\mu\nu}^{\ \ \varrho}\nabla_\varrho W^{\lambda_1\ldots\lambda_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_q}.$$

DEFINITION 1. Der Raum L_n mit der Konnexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ wird *verallgemeinerter projektiv-euklidischer Raum* gennant, wenn ein Vektorfeld P_λ existiert, dass der Raum mit der Konnexion

$$\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{(\lambda\mu)}^{\nu} + 2A_{(\lambda}^{\nu}P_{\mu)} \tag{16}$$

einen identisch verschwindenden Krümmungstensor $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ hat.

DEFINITION 2. Die Transformation $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \to \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$, die durch die Formel (16) bestimmt ist, nennen wir *verallgemeinerte projektive Transformation der Konnexion.*

Fragen wir nach einer Formel, die Abhängigkeit des durch die Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$ generierten Krümmungstensors $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ von dem durch die Konnexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ generierten Krümmungstensors $R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ und von dem Feld P_λ ausdrückt.

Aus (5) und (15) folgt

$$\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + T_{\lambda\mu}^{\nu}, \tag{17}$$

wo

$$T_{\lambda\mu}^{\nu} = -S_{\lambda\mu}^{\nu} + 2A_{(\lambda}^{\nu}P_{\mu)} \tag{18}$$

gesetzt wird.

Rechnet man

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} \overset{\mathrm{df}}{=} 2\partial_{[\alpha}\tilde{\Gamma}_{\beta]\gamma}^{\delta} + \tilde{\Gamma}_{[\alpha|\varrho|}^{\delta}\tilde{\Gamma}_{\beta]\gamma}^{\varrho} \tag{19}$$

aus, so erhält man

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} + 2\nabla_{[\alpha}T_{\beta]\gamma}^{\delta} + 2S_{\alpha\beta}^{\varrho}T_{\varrho\gamma}^{\delta} + 2T_{[\alpha|\varrho|}^{\delta}T_{\beta]\gamma}^{\varrho} \tag{20}$$

[vgl. (4.25), Arbeit [6], S. 141].

Im Falle $S_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$ reduziert sich die Formel (19) auf die Formel (89.7) der Arbeit [4].

Die Formel (19) zeigt, wie sich der Krümmungstensor verändert, wenn man zu dem Objekt der Konnexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ einen beliebigen Tensor $T_{\lambda\mu}^{\nu}$ addiert. Diese Formel wird die Grundlage für weitere Berechungen bilden.

Berücksichtigt man (18) so erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = {} & R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} - 2\nabla_{[\alpha}S_{\beta]\gamma}^{\delta} - 2A_{[\alpha}^{\delta}\nabla_{\beta]}P_{\gamma} + 2A_{\gamma}^{\delta}\nabla_{[\alpha}P_{\beta]} + \\ & + 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\delta}S_{\beta]\gamma}^{\varrho} - 2S_{\alpha\beta}^{\varrho}S_{\varrho\gamma}^{\delta} + 2A_{\gamma}^{\delta}S_{\alpha\beta}^{\varrho}P_{\varrho} + \\ & + 2A_{[\alpha}^{\delta}P_{\beta]}P_{\gamma} - 2A_{[\alpha}^{\delta}S_{\beta]\gamma}^{\varrho}P_{\varrho}.\end{aligned} \tag{21}$$

Für weitere Betrachtungen ist es bequem den folgenden Hilfstensor $P_{\alpha\beta}$ einzuführen [6]:

$$P_{\alpha\beta} \overset{\mathrm{df}}{=} \nabla_{\alpha}P_{\beta} - P_{\alpha}P_{\beta} + S_{\alpha\beta}^{\varrho}P_{\varrho}. \tag{22}$$

Mit Hilfe von $P_{\alpha\beta}$ kann (21) folgendermassen umgeschrieben werden

$$(23)\qquad \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} - 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta[\gamma}^{\ \ \delta} - 2S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho} S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta} + 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\ \ \ \ \delta} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho} - - A_{[\alpha}^{\delta} P_{\beta]\gamma} + A_{\beta}^{\delta} P_{\alpha\gamma} + A_{\gamma}^{\delta}(P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}).$$

Wir gehen jetzt dazu über, um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine verallgemeinerte projektiv-euklidische Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ des Raumes L_n abzuleiten.

Laut Definition 1

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} - 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \delta} - 2S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho} S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta} + 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\ \ \ \ \delta} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho} - - A_{\alpha}^{\delta} P_{\beta\gamma} + A_{\beta}^{\delta} P_{\alpha\gamma} + A_{\gamma}^{\delta}(P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}) = 0.$$

Dann wird

$$(24)\qquad R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \delta} + 2S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho} S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta} - 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\ \ \ \ \delta} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho} + + A_{\alpha}^{\delta} P_{\beta\gamma} - A_{\beta}^{\delta} P_{\alpha\gamma} - A_{\gamma}^{\delta}(P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}).$$

Hilfssatz 1. *Der Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ erfüllt die Formel* (24) *dann und nur dann, wenn der folgende Ausdruck $\overline{P}_{\alpha\beta}$:*

$$(25)\qquad \overline{P}_{\alpha\beta} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{n^2-1}[nR_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha} - 2n\nabla_{[\varrho} S_{\alpha]\beta}^{\ \ \varrho} + 2nS_{[\varkappa|\varrho|}^{\ \ \ \ \varkappa} S_{\alpha]\beta}^{\ \ \varrho} - - 2nS_{\varrho\alpha}^{\ \ \varkappa} S_{\varkappa\beta}^{\ \ \varrho} - 2\nabla_{[\varrho} S_{\beta]\alpha}^{\ \ \varrho} + 2S_{[\varrho|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho} S_{\beta]\alpha}^{\ \ \varkappa} - 2S_{\varrho\beta}^{\ \ \varkappa} S_{\varkappa\alpha}^{\ \ \varrho}]$$

eingesetzt in die Formel (24) *anstatt $P_{\alpha\beta}$ folgende Identität ergibt:*

$$(26)\qquad R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \delta} + 2S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho} S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta} - 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\ \ \ \ \delta} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho} + \frac{1}{n^2-1} A_{\alpha}^{\delta}[nR_{\beta\gamma} + + R_{\gamma\beta} - 2n\nabla_{[\varrho} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho} + 2nS_{[\varrho|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varkappa} - 2nS_{\varrho\beta}^{\ \ \varkappa} S_{\varkappa\gamma}^{\ \ \varrho} - - 2\nabla_{[\varrho} S_{\gamma]\beta}^{\ \ \varrho} + 2S_{[\varrho|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho} S_{\gamma]\beta}^{\ \ \varkappa} - 2S_{\varrho\gamma}^{\ \ \varkappa} S_{\varkappa\beta}^{\ \ \varrho}] - \frac{1}{n^2-1} A_{\beta}^{\delta}[nR_{\alpha\gamma} + R_{\gamma\alpha} - - 2n\nabla_{[\varrho} S_{\alpha]\gamma}^{\ \ \varrho} + 2nS_{[\varrho|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho} S_{\alpha]\gamma}^{\ \ \varkappa} - 2nS_{\varrho\alpha}^{\ \ \varkappa} S_{\varkappa\gamma}^{\ \ \varrho} - 2\nabla_{[\varrho} S_{\gamma]\alpha}^{\ \ \varrho} + + 2S_{[\varrho|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho} S_{\gamma]\alpha}^{\ \ \varkappa} - 2S_{\varrho\gamma}^{\ \ \varkappa} S_{\varkappa\alpha}^{\ \ \varrho}] - \frac{1}{n+1} A_{\gamma}^{\delta}[R_{\alpha\beta} - R_{\beta\alpha} - - 2\nabla_{\varrho} S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho} + \nabla_{\alpha} S_{\varrho\beta}^{\ \ \varrho} - \nabla_{\beta} S_{\varrho\alpha}^{\ \ \varrho} + 2S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho} S_{\varkappa\varrho}^{\ \ \varkappa}].$$

Beweis. Tatsächlich, setzen wir voraus, dass der Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ die spezielle Struktur (24) hat. Die Faltung der Indizes α und δ und die Berücksichtigung der Bezeichnung (8) ergibt den folgenden Ausdruck:

$$(27)\qquad R_{\beta\gamma} = 2\nabla_{[\varkappa} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varkappa} + 2S_{\varkappa\beta}^{\ \ \varrho} S_{\varrho\beta}^{\ \ \varkappa} - 2S_{[\varkappa|\varrho|}^{\ \ \ \ \varkappa} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho} + nP_{\beta\gamma} - P_{\gamma\beta}.$$

Wir wollen jetzt (27) in bezug suf $P_{\alpha\beta}$ lösen. Zu diesem Zweck schreiben wir (27) noch einmal aus indem die Indizes $\beta\gamma$ vertauscht werden. Dies ergibt

$$(28)\qquad R_{\gamma\beta} = 2\nabla_{[\varkappa} S_{\gamma]\beta}^{\varkappa} + 2S_{\varkappa\gamma}^{\varrho} S_{\varrho\beta}^{\varkappa} - 2S_{[\varkappa|\varrho|}^{\varkappa} S_{\gamma]\beta}^{\varrho} + nP_{\gamma\beta} - P_{\beta\gamma}.$$

Das System (27) + (28) wird gelöst indem man die erste Gleichung mit n multipliziert und nachher beiderseitig zu (28) addiert. Daraus erhält man

$$(29)\qquad P_{\beta\gamma} = \frac{1}{n^2-1}\,[nR_{\beta\gamma} + R_{\gamma\beta} - 2n\nabla_{[\varrho} S_{\beta]\gamma}^{\varrho} + 2nS_{[\varkappa|\varrho|}^{\varkappa} S_{\beta]\gamma}^{\varrho} -$$
$$- 2nS_{\varkappa\beta}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}^{\varkappa} - 2\nabla_{[\varrho} S_{\gamma]\beta}^{\varrho} + 2S_{[\varkappa|\varrho|}^{\varkappa} S_{\gamma]\beta}^{\varrho} - 2S_{\varkappa\gamma}^{\varrho} S_{\varrho\beta}^{\varkappa}].$$

Wir haben also gezeigt, dass aus (24) folgt, dass $P_{\beta\gamma}$ in bestimmter Form sich durch die Tensoren $R_{\beta\gamma}$ und $S_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ausdrücken lässt. Um die Relation (26) zu erhalten genügt es folgende Formel anwenden

$$(30)\qquad P_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{n+1}\,[R_{[\alpha\beta]} + \nabla_{[\alpha} S_{|\varrho|\beta]}^{\varrho} - \nabla_{\varrho} S_{\alpha\beta}^{\varrho} + S_{\alpha\beta}^{\varrho} S_{\varkappa\varrho}^{\varkappa}],$$

die leicht aus (29) folgt.

Umgekehrt setzen wir voraus, dass der Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ die Identität (26) erfüllt. Wenn jetzt die Definition (25) ausgenützt wird, so erhält man daraus die spezielle Struktur (24) des Tensors $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ mit dem Tensor $P_{\beta\gamma}$, der durch (29) definiert ist.

Bemerken wir, dass für $n = 2$, $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ immer die spezielle Struktur (24) hat, so dass die Bedingung (26) automatisch eine Identität ergibt. In der Tat, bei der Bezeichnung

$$(31)\qquad Q_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} \overset{\mathrm{df}}{=} 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}^{\delta} - 2S_{\alpha\beta}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}^{\delta} + 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\delta} S_{\beta]\gamma}^{\varrho}$$

erhält man auf Grund (24) und (31) folgendes Gleichungssystem mit gesuchten Unbekannten $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$:

$$(32)\qquad \begin{cases} P_{11} & = -R_{121}^{\ \ \ 2} - Q_{121}^{\ \ \ 2}, \\ \quad P_{12} - 2P_{21} & = -R_{121}^{\ \ \ 1} - Q_{121}^{\ \ \ 1}, \\ -2P_{12} + P_{21} & = R_{122}^{\ \ \ 2} + Q_{122}^{\ \ \ 2}, \\ \qquad\qquad P_{22} & = R_{122}^{\ \ \ 1} + Q_{122}^{\ \ \ 1}. \end{cases}$$

Da die Determinante des Gleichungssystems $D = -3 \neq 0$ ist, daher hat das Gleichungssystem (32) eine einzige Lösung in der folgenden Darstellung:

$$(33)\qquad \begin{cases} P_{11} = -R_{121}^{\ \ \ 2} - Q_{121}^{\ \ \ 2}, \\ P_{12} = \frac{1}{3}(R_{121}^{\ \ \ 1} + Q_{121}^{\ \ \ 1} - 2R_{122}^{\ \ \ 2} - 2Q_{122}^{\ \ \ 2}), \\ P_{21} = \frac{1}{3}(2R_{121}^{\ \ \ 1} + 2Q_{121}^{\ \ \ 1} - R_{122}^{\ \ \ 2} - Q_{122}^{\ \ \ 2}), \\ P_{22} = R_{122}^{\ \ \ 1} + Q_{122}^{\ \ \ 1}. \end{cases}$$

Also für $n = 2$ hat $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ tatsächlich die Struktur (24). Betrachtet man (22) als ein Gleichungssystem mit gegebenen $P_{\alpha\beta}$ und $S_{\alpha\beta}^{\gamma}$ und Unbekannten $P_\varkappa$, so erhält man ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

HILFSSATZ 2. *Wenn der Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ die spezielle Struktur* (24) *hat, dann nehmen die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems* (22) *folgende Form an*:

$$\nabla_{[\alpha}P_{\gamma]\beta} + S_{[\alpha|\beta|}{}^{\varrho}P_{\gamma]\varrho} + S_{\alpha\gamma}^{\varrho}P_{\varrho\beta} = 0. \tag{34}$$

Beweis. Schreiben wir das Gleichungssystem (22) in der Form

$$\nabla_\alpha P_\beta = P_\alpha P_\beta + P_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}^{\varrho}P_\varrho. \tag{35}$$

Durch kovariante Ableitung von (35) erhält man

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma\nabla_\alpha P_\beta = {} & \nabla_\gamma P_{\alpha\beta} - P_\varrho\nabla_\gamma S_{\alpha\beta}^{\varrho} + 2P_\alpha P_\beta P_\gamma + P_\alpha P_{\gamma\beta} + P_\beta P_{\gamma\alpha} - \\ & - S_{\gamma\beta}^{\varrho}P_\varrho P_\alpha - S_{\gamma\alpha}^{\varrho}P_\varrho P_\beta - S_{\alpha\beta}^{\varrho}P_\varrho P_\gamma - S_{\alpha\beta}^{\varrho}P_{\gamma\varrho} + S_{\alpha\beta}^{\varrho}S_{\gamma\varrho}^{\varkappa}P_\varkappa.\end{aligned} \tag{36}$$

Durch Alternation der Indizes γ und α auf beiden Seiten der Formel (36) erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla_{[\gamma}\nabla_{\alpha]}P_\beta = {} & \nabla_{[\gamma}P_{\alpha]\beta} - P_\varrho\nabla_{[\gamma}S_{\alpha]\beta}^{\varrho} + 2P_\beta P_{[\alpha}P_{\gamma]} + P_{[\alpha}P_{\gamma]\beta} + \\ & + P_\beta P_{[\gamma\alpha]} - P_{[\alpha}S_{\gamma]\beta}^{\varrho}P_\varrho - S_{[\gamma\alpha]}^{\varrho}P_\varrho P_\beta - P_{[\gamma}S_{\alpha]\beta}^{\varrho}P_\varrho + \\ & + S_{\beta[\alpha}^{\varrho}P_{\gamma]\varrho} - S_{\beta[\alpha}^{\varrho}S_{\gamma]\varrho}^{\varkappa}P_\varkappa.\end{aligned} \tag{37}$$

Einerseits können wir $\nabla_{[\alpha}\nabla_{\alpha]}P_\beta$ auf Grund der Formel (15) (für $p = 0$, $q = 1$) schreiben

$$\nabla_{[\gamma}\nabla_{\alpha]}P_\beta = -\tfrac{1}{2}R_{\gamma\alpha\beta}{}^{\varrho}P_\varrho - S_{\gamma\alpha}^{\varrho}\nabla_\varrho P_\beta,$$

woraus laut (24)

$$\begin{aligned}\nabla_{[\gamma}\nabla_{\alpha]}P_\beta = {} & -\nabla_{[\gamma}S_{\alpha]\beta}^{\varrho}P_\varrho - S_{\gamma\alpha}^{\varkappa}S_{\varkappa\beta}^{\varrho}P_\varrho + S_{[\gamma|\varkappa|}^{\varrho}S_{\alpha]\beta}^{\varkappa}P_\varrho - \\ & - S_{\gamma\alpha}^{\varrho}\nabla_\varrho P_\beta - \tfrac{1}{2}A_\gamma^\varrho P_{\alpha\beta}P_\varrho + \tfrac{1}{2}A_\alpha^\varrho P_{\gamma\beta}P_\varrho + \tfrac{1}{2}A_\beta^\varrho(P_{\gamma\alpha} - P_{\alpha\gamma})P_\varrho\end{aligned} \tag{38}$$

folgt.

Andererseits haben wir

$$P_{[\alpha}P_{\gamma]} = 0, \qquad -P_{[\alpha}S_{\gamma]\beta}^{\varrho}P_\varrho - P_{[\gamma}S_{\alpha]\beta}^{\varrho}P_\varrho = 0;$$

also können wir die Formel (37) folgendermassen umschreiben

$$\begin{aligned}\nabla_{[\gamma}\nabla_{\alpha]}P_\beta = {} & \nabla_{[\gamma}P_{\alpha]\beta} - P_\varrho\nabla_{[\gamma}S_{\alpha]\beta}^{\varrho} + P_{[\alpha}P_{\gamma]\beta} + P_\beta P_{[\gamma\alpha]} - \\ & - S_{[\gamma\alpha]}^{\varrho}P_\varrho P_\beta + S_{\beta[\alpha}^{\varrho}P_{\gamma]\varrho} - S_{\beta[\alpha}^{\varrho}S_{\gamma]\varrho}^{\varkappa}P_\varkappa.\end{aligned} \tag{39}$$

Vergleicht man beide Seiten der Formeln (38) und (39), so haben wir nach einer Reduktion

$$-S_{\gamma\alpha}^{\varrho}\nabla_\varrho P_\beta - S_{\gamma\alpha}^{\varkappa}S_{\varkappa\beta}^{\varrho}P_\varrho = \nabla_{[\gamma}P_{\alpha]\beta} + S_{\beta[\alpha}^{\varrho}P_{\gamma]\varrho} - S_{\gamma\alpha}^{\varrho}P_\varrho P_\beta.$$

Wenn wir in der obigen Formel berücksichtigen (35), so erhalten wir

$$V_{[\gamma}P_{\alpha]\beta}+S_{\beta[\alpha}^{\ \ \varrho}P_{\gamma]\varrho}+S_{\gamma\alpha}^{\ \ \varrho}P_{\varrho\beta} = 0,$$

also Bedingung (34), was zu beweisen war.

SATZ 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung einer verallgemeinerten projektiven euklidischen Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ des Raumes L_n $(n \geqslant 2)$ beruht darauf, dass ihr Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ die Gestalt von* (24) *hat und Tensor $P_{\alpha\beta}$, der durch die Formel* (22) *definiert ist, die Integrabilitätsbedingungen* (34) *des Differentialgleichungssystems* (35) *erfüllt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen wurde schon begründet. Setzen wir jetzt für die Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ die Identitäten (24) und (34) voraus. Es wird ein Tensorfeld P_α als Lösung des Differentialgleichungssystems gesucht

$$V_\alpha P_\beta = P_\alpha P_\beta + P_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}P_\varrho. \tag{40}$$

Da die Integrabilitätsbedingungen (34) des Gleichungssystems (40) nach den Voruassetzungen identisch erfüllt sind (für beliebige P_α und beliebige ξ^β), können wir daraus schliessen, dass das Gleichungssystem (40) eine Lösung für beliebige Anfangswerte der unbekannten Funktionen $\overset{0}{P}_\alpha = P_\alpha(\overset{0}{\xi}{}^\beta)$ besitzt. Diese Lösung existiert wenigstens in einer gewissen Umgebung des Punktes $\overset{0}{\xi}{}^\beta$ (s. [4], Seite 449 oder [5], par. 26). Konstruieren wir jetzt die Konnexion

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - S_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} + 2A_{(\alpha}^{\gamma}P_{\beta)}$$

und berechnen für sie den Krümmungstensor $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$. Er wird, wie wir bereits wissen, durch die Formel (23) ausgedrückt, wobei der Tensor $P_{\alpha\beta}$ in dieser Formel die Gestalt (22) hat, d.h., wie aus (40) zu ersehen ist, dass er mit dem von uns betrachteten Tensor $P_{\alpha\beta}$ übereinstimmt.

Wenn man berücksichtigt, dass (24) laut Voraussetzungen erfüllt ist, überzeugt man sich, dass $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = 0$ ist und das bedeutet, dass $\Gamma_{\alpha\beta}$ eine verallgemeinerte projektiv-euklidische Konnexion ist, was zu beweisen war.

Wir haben bereits bemerkt, dass für $n = 2$ die Bedingung (24) für einen beliebigen Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ erfüllt ist, so dass als notwendige und hinreichende Bedingung die Bedingung (34) selbst bleibt. Dagegen, wie wir es weiter zeigen werden, genügt es für $n > 2$ sich auf die Bedingung (24) zu beschränken, da die Bedingung (34) die Folge der Bedingung (24) ist.

HILFSSATZ 3. *Für $n > 2$ ergibt sich die Bedingung* (34) *als eine Folge der Bedingung* (24).

Beweis. Wir gehen von der Bianchischen Identität (12) aus:

$$\nabla_{[\omega} R_{\alpha\beta]\gamma}{}^{\delta} = 2 S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho} R_{\beta]\varrho\gamma}{}^{\delta} \tag{41}$$

und durch Anwendung der Formel (24)

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}{}^{\delta} + 2 S_{\alpha\beta}{}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} - 2 S_{[\alpha|\varrho|}{}^{\delta} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} + 2 A_{[\alpha}^{\delta} P_{\beta]\gamma} - 2 A_{\gamma}^{\delta} P_{[\alpha\beta]}, \tag{42}$$

setzen wir die rechte Seite von (42) in die linke Seite von (41) ein. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla_{\omega} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= 2\nabla_{\omega}\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}{}^{\delta} + 2\nabla_{\omega} S_{\alpha\beta}{}^{\varrho}\cdot S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} + 2 S_{\alpha\beta}{}^{\varrho}\nabla_{\omega} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} - \\ &- 2(\nabla_{\omega} S_{[\alpha|\varrho|}{}^{\delta}) S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} - 2 S_{[\alpha|\varrho|}\nabla_{|\omega|} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} + 2 A_{[\alpha}^{\delta}\nabla_{|\omega|} P_{\beta]\gamma} - 2 A_{\gamma}^{\delta}\nabla_{\omega} P_{[\alpha\beta]}.\end{aligned}$$

Dann durch Alternation der Indizes ω, α, β erhalten wir:

$$\begin{aligned}\nabla_{[\omega} R_{\alpha\beta]\gamma}{}^{\delta} &= 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\alpha} S_{\beta]\gamma}{}^{\delta} + 2\nabla_{[\omega} S_{\alpha\beta]}{}^{\varrho}\cdot S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} + 2 S_{[\alpha\beta}{}^{\varrho}\nabla_{\omega]} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} - \\ &- 2(\nabla_{[\omega} S_{\alpha|\varrho|}{}^{\delta}) S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} - 2 S_{[\alpha|\varrho|}{}^{\delta}\nabla_{\omega} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} + \\ &+ 2 A_{[\alpha}^{\delta}\nabla_{\omega} P_{\beta]\gamma} - 2 A_{\gamma}^{\delta}\nabla_{[\omega} P_{\alpha\beta]}.\end{aligned} \tag{43}$$

Auf Grund der Formel (15) (für $p = 1$ und $q = 2$) haben wir

$$\nabla_{[\omega}\nabla_{\alpha]} S_{\beta\gamma}{}^{\delta} = \tfrac{1}{2} R_{\omega\alpha\varrho}{}^{\delta} S_{\beta\gamma}{}^{\varrho} - \tfrac{1}{2} R_{\omega\alpha\beta}{}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} - \tfrac{1}{2} R_{\omega\alpha\gamma}{}^{\varrho} S_{\beta\varrho}{}^{\delta} - S_{\omega\alpha}{}^{\varrho}\nabla_{\varrho} S_{\beta\gamma}{}^{\delta},$$

woraus

$$2\nabla_{[\omega}\nabla_{\alpha} S_{\beta]\gamma}{}^{\delta} = R_{[\omega\alpha|\varrho|}{}^{\delta} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} - R_{[\omega\alpha\beta]}{}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} - R_{[\omega\alpha|\gamma|}{}^{\varrho} S_{\beta]\varrho}{}^{\delta} - 2 S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}\nabla_{|\varrho|} S_{\beta]\gamma}{}^{\delta} \tag{44}$$

folgt.

Weiter setzen wir in die rechte Seite der Formel (44) die rechte Seite von (42) ein. Zu diesem Zweck berechnen wir zuerst den Ausdruck

$$\begin{aligned}R_{\omega\alpha\varrho}{}^{\delta} S_{\beta\gamma}{}^{\varrho} &= 2\nabla_{[\omega} S_{\alpha]\varrho}{}^{\delta} S_{\beta\gamma}{}^{\varrho} + 2 S_{\omega\alpha}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\varrho}{}^{\delta} S_{\beta\gamma}{}^{\varrho} - 2 S_{[\omega|\varkappa|}{}^{\delta} S_{\alpha]\varrho}{}^{\varkappa} S_{\beta\gamma}{}^{\delta} + \\ &+ 2 A_{[\omega}^{\delta} P_{\alpha]\varrho} S_{\beta\gamma} - 2 A_{\varrho}^{\delta} P_{[\omega\alpha]} S_{\beta\gamma}{}^{\varrho}.\end{aligned}$$

Darus folgt

$$\begin{aligned}R_{[\omega\alpha|\varrho|}{}^{\delta} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} &= 2(\nabla_{[\omega} S_{\alpha|\varrho|}{}^{\delta}) S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} + 2 S_{[\omega\alpha}{}^{\varkappa} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} S_{\varkappa\varrho}{}^{\delta} - \\ &- 2 S_{[\omega|\varkappa|}{}^{\delta} S_{\alpha|\varrho|}{}^{\varkappa} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} + 2 A_{[\omega}^{\delta} P_{\alpha|\varrho|} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho} - 2 A_{\varrho}^{\delta} P_{[\omega\alpha} S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho}.\end{aligned} \tag{45}$$

In ähnlicher Weise haben wir

$$\begin{aligned}-R_{[\omega\alpha\beta]}{}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} &= -2\nabla_{[\omega} S_{\alpha\beta]}{}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} - 2 S_{[\omega\alpha}{}^{\varkappa} S_{|\varkappa|\beta]}{}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} + \\ &+ 2 S_{[\omega|\varkappa|}{}^{\varrho} S_{\alpha\beta]}{}^{\varkappa} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} - 2 A_{[\omega}^{\varrho} P_{\alpha\beta]} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta} + 2 A_{[\beta}^{\varrho} P_{\omega\alpha]} S_{\varrho\gamma}{}^{\delta}.\end{aligned} \tag{46}$$

Stellt man in der Formel (46) die Indizes δ und p, p und γ um, so erhält man

$$\begin{aligned}-R_{[\omega\alpha|\gamma|}{}^{\varrho} S_{\beta]\varrho}{}^{\delta} &= -2(\nabla_{[\omega} S_{\alpha|\gamma|}{}^{\varrho}) S_{\beta]\varrho}{}^{\delta} - 2 S_{[\omega\alpha}{}^{\varkappa} S_{\beta]\varrho}{}^{\delta} S_{\varkappa\gamma}{}^{\varrho} + \\ &+ 2 S_{[\omega|\varkappa|}{}^{\varrho} S_{\alpha|\gamma|}{}^{\varkappa} S_{\beta]\varrho}{}^{\delta} - 2 A_{[\omega}^{\varrho} P_{\alpha|\gamma|} S_{\beta]\varrho}{}^{\delta} + 2 A_{\gamma}^{\varrho} P_{[\omega\alpha} S_{\beta]\varrho}{}^{\delta}.\end{aligned} \tag{47}$$

Setzt man die rechten Seiten der Formeln (45), (46) und (47) in die rechte Seite von (44) ein, erhält man:

$$
\begin{aligned}
(48)\qquad 2\nabla_{[\omega}\nabla_{a}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \delta} = {} & 2(\nabla_{[\omega}S_{a|\varrho|}^{\ \ \delta})S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho}+2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varkappa}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho}S_{\varkappa\varrho}^{\ \ \delta}- \\
& -2S_{[\omega|\varkappa|}^{\ \ \ \ \delta}S_{a|\varrho|}^{\ \ \varkappa}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho}+2A_{[\omega}^{\delta}P_{a|\varrho|}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho}- \\
& -2A_{\varrho}^{\delta}P_{[\omega a}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho}-2\nabla_{[\omega}S_{a\beta]}^{\ \ \ \varrho}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}-2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varkappa}S_{|\varkappa|\beta]}^{\ \ \ \ \varrho}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}+ \\
& +2S_{[\omega|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho}S_{a\beta]}^{\ \ \ \varkappa}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}-2A_{[\omega}^{\varrho}P_{a\beta]}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}+ \\
& +2A_{[\beta}^{\varrho}P_{\omega a]}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}-2(\nabla_{[\omega}S_{a|\gamma|}^{\ \ \varrho})S_{\beta]\varrho}^{\ \ \delta}- \\
& -2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varkappa}S_{\beta]\varrho}^{\ \ \delta}S_{\varkappa\gamma}^{\ \ \varrho}+2S_{[\omega|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho}S_{a|\gamma|}^{\ \ \varkappa}S_{\beta]\varrho}^{\ \ \delta}- \\
& -2A_{[\omega}^{\varrho}P_{a|\gamma|}S_{\beta]\varrho}^{\ \ \delta}+2A_{\gamma}^{\varrho}P_{[\omega a}S_{\beta]\varrho}^{\ \ \delta}- \\
& -2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}\nabla_{|\varrho|}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \delta}.
\end{aligned}
$$

Setzt man endlich die rechte Seite von (48) in die Formel (43) ein, erhält man nach einigen Umrechnungen und Reduktion

$$
\begin{aligned}
(49)\qquad \nabla_{[\omega}R_{a\beta]\gamma}^{\ \ \ \ \delta} = {} & 2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varkappa}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho}S_{\varkappa\varrho}^{\ \ \delta}+2A_{[\omega}^{\delta}P_{a|\varrho|}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varrho}- \\
& -2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varkappa}S_{|\varkappa|\beta]}^{\ \ \ \ \varrho}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}+2S_{[\omega|\varkappa|}^{\ \ \ \ \varrho}S_{a\beta]}^{\ \ \ \varkappa}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}- \\
& -2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varkappa}S_{\beta]\varrho}^{\ \ \delta}S_{\varkappa\gamma}^{\ \ \varrho}-2P_{[a|\gamma|}S_{\beta\omega]}^{\ \ \ \delta}- \\
& -2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}\nabla_{|\varrho|}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \delta}+2S_{[a\beta}^{\ \ \ \varrho}\nabla_{\omega]}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}+ \\
& +2A_{[a}^{\delta}\nabla_{\omega}P_{\beta]\gamma}-2A_{\gamma}^{\delta}\nabla_{[\omega}P_{a\beta]}.
\end{aligned}
$$

Jetzt berechnen wir den Wert der rechten Seite von (41), indem wir $R_{a\beta\gamma}^{\ \ \ \ \delta}$ aus (42) einsetzen.

Wir berechnen zuerst

$$
\begin{aligned}
(50)\qquad 2S_{\omega a}^{\ \ \ \varrho}R_{\beta\varrho\gamma}^{\ \ \ \ \delta} = {} & 4S_{\omega a}^{\ \ \ \varrho}\nabla_{[\beta}S_{\varrho]\gamma}^{\ \ \delta}+4S_{\omega a}^{\ \ \ \varrho}S_{\beta\varrho}^{\ \ \varkappa}S_{\varkappa\gamma}^{\ \ \delta}-4S_{\omega a}^{\ \ \ \varrho}S_{[\beta|\varkappa|}^{\ \ \ \ \delta}S_{\varrho]\gamma}^{\ \ \varkappa}+ \\
& +4S_{\omega a}^{\ \ \ \varrho}A_{[\beta}^{\delta}P_{\varrho]\gamma}-4S_{\omega a}^{\ \ \ \varrho}A_{\gamma}^{\delta}P_{[\beta\varrho]},
\end{aligned}
$$

woraus nach der Alternation

$$
\begin{aligned}
(51)\qquad 2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}R_{\beta]\varrho\gamma}^{\ \ \ \ \delta} = {} & 2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}\nabla_{\beta]}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \delta}-2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}\nabla_{|\varrho|}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \delta}+4S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}S_{\beta]\varrho}^{\ \ \varkappa}S_{\varkappa\gamma}^{\ \ \delta}- \\
& -2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}S_{\beta]\varkappa}^{\ \ \delta}S_{\varrho\gamma}^{\ \ \varkappa}+2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}S_{\beta]\gamma}^{\ \ \varkappa}S_{\varrho\varkappa}^{\ \ \delta}+ \\
& +2S_{[\omega a}A_{\beta]}^{\delta}P_{\varrho\gamma}-2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}P_{\beta]\gamma}A_{\varrho}^{\delta}- \\
& -2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}P_{\beta]\varrho}A_{\gamma}^{\delta}+2S_{[\omega a}^{\ \ \ \varrho}P_{|\varrho|\beta]}A_{\gamma}^{\delta}
\end{aligned}
$$

ist.

Vergleicht man auf Grund der Bianchischen Identität (41) die rechten Seiten der Formeln (49) und (51), so erhält man

$$
\begin{aligned}
(52)\qquad & 2S_{[\omega\alpha}{}^{\varkappa}S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho}S_{\varkappa\varrho}{}^{\delta}+2A_{[\omega}{}^{\delta}P_{\alpha|\varrho|}S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho}-2S_{[\omega\alpha}{}^{\varkappa}S_{|\varkappa|\beta]}{}^{\varrho}S_{\varrho\gamma}{}^{\delta}+2S_{[\omega|\varkappa|}{}^{\varrho}S_{\alpha\beta]}{}^{\varkappa}S_{\varrho\gamma}{}^{\delta}- \\
& -2S_{[\omega\alpha}{}^{\varkappa}S_{\beta]\varrho}{}^{\delta}S_{\varkappa\gamma}{}^{\varrho}-2P_{[\alpha|\gamma|}S_{\beta\omega]}{}^{\delta}-2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}\nabla_{|\varrho|}S_{\beta]\gamma}{}^{\delta}+2S_{[\alpha\beta}{}^{\varrho}\nabla_{\omega]}S_{\varrho\gamma}{}^{\delta}+ \\
& +2A_{[\alpha}{}^{\delta}\nabla_{\omega}P_{\beta]\gamma}-2A_{\gamma}^{\delta}\nabla_{[\omega}P_{\alpha\beta]} = 2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}\nabla_{\beta]}S_{\varrho\gamma}{}^{\delta}-2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}\nabla_{|\varrho|}S_{\beta]\gamma}{}^{\delta}+ \\
& +4S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}S_{\beta]\varrho}{}^{\varkappa}S_{\varkappa\gamma}{}^{\delta}-2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}S_{\beta]\varkappa}{}^{\delta}S_{\varrho\gamma}{}^{\varkappa}+2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}S_{\beta]\gamma}{}^{\varkappa}S_{\varrho\varkappa}{}^{\delta}+2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}A_{\beta]}^{\delta}P_{\varrho\gamma}- \\
& -2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}P_{\beta]\gamma}A_{\varrho}^{\delta}-2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}P_{\beta]\varrho}A_{\gamma}^{\delta}+2S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}P_{|\varrho|\beta]}A_{\gamma}^{\delta}.
\end{aligned}
$$

Nach weiteren Reduktionen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(53)\qquad & A_{[\omega}{}^{\delta}P_{\alpha|\varrho|}S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho}+A_{[\alpha}{}^{\delta}\nabla_{\omega}P_{\beta]\gamma}-A_{\gamma}^{\delta}\nabla_{[\omega}P_{\alpha\beta]}+S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}P_{\beta]\varrho}A_{\gamma}^{\delta}- \\
& -S_{[\omega\alpha}A_{\beta]}^{\delta}P_{\varrho\gamma}-S_{[\omega\alpha}{}^{\varrho}P_{|\varrho|\beta]}A_{\gamma}^{\delta} = 0.
\end{aligned}
$$

Durch Faltung der Indizes γ und δ erhalten wir nach einigen Rechnungen

$$\nabla_{[\omega}P_{\beta]\gamma}+S_{[\omega|\gamma|}{}^{\varrho}P_{\beta]\varrho}+S_{\omega\beta}{}^{\varrho}S_{\varrho\gamma} = 0,$$

also (34), was zu beweisen war.

Hilfssatz 3 stellt eine Verallgemeinerung des analogen Hilfssatzes für die symmetrische Konnexion dar (s. [4], S. 449).

Definition 3. Auf Grund der Formeln (24) und (26) definieren wir den *verallgemeinerten Weylschen Krümmungstensor* $B_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ folgendermassen:

$$
(54)\qquad B_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} \overset{\mathrm{df}}{=} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}-2\nabla_{[\alpha}S_{\beta]\gamma}{}^{\delta}+2S_{[\alpha|\varrho|}{}^{\delta}S_{\beta]\gamma}{}^{\varrho}-2S_{\alpha\beta}{}^{\varrho}S_{\varrho\gamma}{}^{\delta}-2A_{[\alpha}{}^{\delta}B_{\beta]\gamma}+2A_{\gamma}^{\delta}B_{[\alpha\beta]},
$$

wo

$$
\begin{aligned}
(55)\qquad B_{\alpha\beta} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{n^2-1}\,[& nR_{\alpha\beta}+R_{\beta\alpha}-2n\nabla_{[\varrho}S_{\alpha]\beta}{}^{\varrho}+2nS_{[\varkappa|\varrho|}{}^{\varkappa}S_{\alpha]\beta}{}^{\varrho}- \\
& -2nS_{\varrho\alpha}{}^{\varkappa}S_{\varkappa\beta}{}^{\varrho}-2\nabla_{[\varrho}S_{\beta]\alpha}{}^{\varrho}+2S_{[\varrho|\varkappa|}{}^{\varrho}S_{\beta]\alpha}{}^{\varkappa}-2S_{\varrho\beta}{}^{\varkappa}S_{\varkappa\alpha}{}^{\varrho}].
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2. *Für $n > 2$ ist der Raum L_n dann und nur dann ein verallgemeinerter projektiv-euklidischer Raum, wenn der Tensor $B_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ identisch verschwindet.*

Für $n = 2$ ist L_2 dann und nur dann ein verallgemeinerter projektiv-euklidischer Raum, wenn der Tensor $B_{\alpha\beta}$ der Bedingung

$$
(56)\qquad \nabla_{[\alpha}B_{\gamma]\beta}+S_{[\alpha|\beta|}{}^{\varrho}B_{\gamma]\varrho}+S_{\alpha\gamma}{}^{\varrho}B_{\varrho\beta} = 0
$$

genügt.

2. Eigenschaften der verallgemeinerten projektiven Transformation der Konnexion und des verallgemeinerten Weylschen Krümmungstensors.

Satz 3. *Für $n = 2$ haben wir die Identität*: 1° $B_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = 0$, *dagegen für $n > 2$ haben wir die Identitäten*: 2° $B_{(\alpha\beta)\gamma}^{\ \ \ \ \ \delta} = 0$, 3° $B_{[\alpha\beta\gamma]}^{\ \ \ \ \ \delta} = 0$, 4° $B_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \alpha} = 0$, 5° $B_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \gamma} = 0$ (¹).

Rein rechnerische Beweise lassen wir beiseite.

Der durch die Formel (55) bestimmte Tensor $B_{\alpha\beta}$ bildet eine algebraische Komitante des Krümmungstensors $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ und des Zusammenhanges $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$.

Hilfssatz 4. *Bei einer verallgemeinerten projektiven Transformation der Konnexion* (16) *verändert sich der Tensor $B_{\alpha\beta}$ nach dem Gesetz*

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta}, \tag{57}$$

wo $P_{\alpha\beta}$ durch die Formel (22) *bestimmt ist.*

Tatsächlich, da die Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ symmetrisch ist, haben wir also auf Grund der Formel (55):

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{n^2-1}[n\tilde{R}_{\alpha\beta} + \tilde{R}_{\beta\alpha}]. \tag{58}$$

Aber laut (23) haben wir

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - 2\nabla_{[\varrho} S_{\alpha]\beta}^{\ \ \ \varrho} - 2S_{\varkappa\alpha}^{\ \ \ \varrho} S_{\varrho\beta}^{\ \ \ \varkappa} + 2S_{[\varkappa|\varrho|}^{\ \ \ \ \ \varkappa} S_{\alpha]\beta}^{\ \ \ \varrho} - A_{\varrho}^{\varrho} P_{\alpha\beta} + A_{\alpha}^{\varrho} P_{\varrho\beta} + \\ + A_{\beta}^{\varrho}(P_{\varrho\alpha} - P_{\alpha\varrho}),$$

woraus

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - 2\nabla_{[\varrho} S_{\alpha]\beta}^{\ \ \ \varrho} - 2S_{\varkappa\alpha}^{\ \ \ \varrho} S_{\varrho\beta}^{\ \ \ \varkappa} + 2S_{[\varkappa|\varrho|}^{\ \ \ \ \ \varkappa} S_{\alpha]\beta}^{\ \ \ \varrho} - nP_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha} \tag{59}$$

folgt.

Auf Grund von (58) und (59) erhalten wir das Ergebnis (57).

Satz 4. *Der verallgemeinerte Weylsche Krümmungstensor $B_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta}$ ist eine Invariante der durch die Formel* (16) *bestimmten verallgemeinerten projektiven Transformation der Konnexion.*

Beweis. Da die Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ symmetrisch ist ($\tilde{S}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = 0$), haben wir also auf Grund der Formel (54):

$$\tilde{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} - 2A_{[\alpha}^{\delta}\tilde{B}_{\beta]\gamma} + 2A_{\gamma}^{\delta}\tilde{B}_{[\alpha\beta]}, \tag{60}$$

woraus mit Hilfe der Formeln (23) und (57) erhalten wir

$$\tilde{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta} - 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \ \delta} + 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\ \ \ \ \ \delta} S_{\beta]\gamma}^{\ \ \ \varrho} - 2S_{\alpha\beta}^{\ \ \ \varrho} S_{\varrho\beta}^{\ \ \ \delta} - \\ - 2A_{[\alpha}^{\delta} P_{\beta]\gamma} + 2A_{\gamma}^{\delta} P_{[\alpha\beta]} - 2A_{[\alpha}^{\delta} B_{\beta]\gamma} + 2A_{[\alpha}^{\delta} P_{\beta]\gamma} + \\ + 2A_{\gamma}^{\delta} B_{[\alpha\beta]} - 2A_{\gamma}^{\delta} P_{[\alpha\beta]} = B_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \delta},$$

(¹) Das Analogon der Formel (8) des Satzes 3 in der Seite 2 ist zur Zeit noch nicht bekannt.

also

$$\tilde{B}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = B_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}, \qquad \text{w.z.b.w.} \tag{61}$$

SATZ 5. *Jede Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ kann man mit Hilfe einer verallgemeinerten projektiven Transformation* (16) *in volumentreue Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ transformieren.*

Beweis. Wir werden die Existenz eines solchen Vektorfeldes P_α zeigen, dass die Komitante $\tilde{V}_{\alpha\beta}$ des Krümmungstensors $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ der Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ die Bedingung erfüllt:

$$\tilde{V}_{\alpha\beta} = 0. \tag{62}$$

Auf Grund der Formeln (8), (23) und (62) haben wir

$$V_{\alpha\beta} - 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 2S_{\alpha\beta}^{\varrho} S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\varkappa} S_{\beta]\varkappa}^{\varrho} - A_\alpha^\varrho P_{\beta\varrho} +$$
$$+ A_\beta^\varrho P_{\alpha\varrho} - A_\varrho^\varrho (P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}) = 0,$$

woraus bei Berücksichtigung der Identität $S_{[\alpha|\varrho|}^{\varkappa} S_{\beta]\varkappa}^{\varrho} = 0$,

$$V_{\alpha\beta} - 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 2S_{\alpha\beta}^{\varrho} S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + (n+1)(P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}) = 0 \tag{63}$$

folgt.

Auf Grund von (22) und (63) erhalten wir weiter

$$V_{\alpha\beta} - 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 2S_{\alpha\beta}^{\varrho} S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + 2(n+1)(\nabla_{[\alpha} P_{\beta]} + S_{\alpha\beta}^{\varrho} P_\varrho) = 0. \tag{64}$$

(64) stellt nun ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit den unbekannten Funktionen P_α dar.

Wir werden zeigen, dass die Integrabilitätsbedingungen des Gleichungssystems (64) folgende Gestalt annehmen

$$\nabla_{[\omega} V_{\alpha\beta]} = 2S_{[\omega\alpha}^{\varrho} V_{\beta]\varrho}, \tag{65}$$

also laut (13) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, was den Beweis für die Existenz eines Vektorfeldes P_α erbringt.

Tatsächlich, differenzieren wir kovariant ∇_ω die Gleichung (64):

$$\nabla_\omega V_{\alpha\beta} - 2\nabla_\omega \nabla_{[\alpha} S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 2\nabla_\omega S_{\alpha\beta}^{\varrho} \cdot S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} - 2S_{\alpha\beta}^{\varrho} \nabla_\omega S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} +$$
$$+ 2(n+1)[\nabla_\omega \nabla_{[\alpha} P_{\beta]} + \nabla_\omega S_{\alpha\beta}^{\varrho} \cdot P_\varrho + S_{\alpha\beta}^{\varrho} \nabla_\omega P_\varrho] = 0,$$

so erhalten wir daraus durch Alternation der Indizes ω, α, β:

$$\nabla_{[\omega} V_{\alpha\beta]} - 2\nabla_{[\omega} \nabla_\alpha S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 2S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} \nabla_{[\omega} S_{\alpha\beta]}^{\varrho} - 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho} \nabla_{\omega]} S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + \tag{66}$$
$$+ 2(n+1)[\nabla_{[\omega} \nabla_\alpha P_{\beta]} + P_\varrho \nabla_{[\omega} S_{\alpha\beta]}^{\varrho} + S_{[\alpha\beta}^{\varrho} \nabla_{\omega]} P_\varrho] = 0.$$

Auf Grund der Formel (15) haben wir

$$\nabla_{[\omega} \nabla_{\alpha]} S_{\beta\varrho}^{\varrho} = \tfrac{1}{2} R_{\omega\alpha\varkappa}{}^{\varrho} S_{\beta\varrho}^{\varkappa} - \tfrac{1}{2} R_{\omega\alpha\beta}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\varrho}^{\varrho} - \tfrac{1}{2} R_{\omega\alpha\varrho}{}^{\varkappa} S_{\beta\varkappa}^{\varrho} - S_{\omega\alpha}^{\varkappa} \nabla_\varkappa S_{\beta\varrho}^{\varrho},$$
$$\nabla_{[\omega} \nabla_{\alpha]} P_\beta = -\tfrac{1}{2} R_{\omega\alpha\beta}{}^{\varkappa} P_\varkappa - S_{\omega\alpha}^{\varkappa} \nabla_\varkappa P_\beta,$$

woraus

$$(67) \qquad 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\alpha}S_{\beta]\varrho}^{\varrho} = -R_{[\omega\alpha\beta]}^{\varkappa}S_{\varkappa\varrho}^{\varrho} - 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}S_{\beta]\varrho}^{\varrho},$$

$$(68) \qquad 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\alpha}P_{\beta]} = -R_{[\omega\alpha\beta]}^{\varkappa}P_{\varkappa} - 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}P_{\beta]}$$

ist.

Also auf Grund der Formel (66), (67) und (68) haben wir:

$$(69) \qquad \nabla_{[\omega}V_{\alpha\beta]} + R_{[\omega\alpha\beta]}^{\varkappa}S_{\varkappa\varrho}^{\varrho} + 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 2S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varrho} - \\ - 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho}\nabla_{\omega]}S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + (n+1)[-R_{[\omega\alpha\beta]}^{\varkappa}P_{\varkappa} - 2S_{[\varrho\alpha}\nabla_{|\varkappa|}P_{\beta]} + \\ + 2P_{\varrho}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varrho} + 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho}\nabla_{\omega]}P_{\varrho}] = 0.$$

Auf Grund der Formel (10) erhalten wir

$$(70) \qquad R_{[\omega\alpha\beta]}^{\varkappa}P_{\varkappa} = 2P_{\varkappa}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varkappa} - 4P_{\varkappa}S_{[\omega\alpha}^{\varrho}S_{\beta]\varrho}^{\varkappa},$$

$$(71) \qquad R_{[\omega\alpha\beta]}^{\varkappa}S_{\varkappa\varrho}^{\varrho} = 2S_{\varkappa\varrho}^{\varrho}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varkappa} - 4S_{\varkappa\varrho}^{\varrho}S_{[\omega\alpha}^{\varphi}S_{\beta]\varphi}^{\varkappa}.$$

Wir haben nun auf Grund (70), (71) und (69)

$$\nabla_{[\omega}V_{\alpha\beta]} + 2S_{\varkappa\varrho}^{\varrho}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varkappa} - 4S_{\varkappa\varrho}^{\varrho}S_{[\omega\alpha}^{\varphi}S_{\beta]\varphi}^{\varkappa} + 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - \\ - 2S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varrho} - 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho}\nabla_{\omega]}S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + (n-1)[-2P_{\varkappa}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varkappa} + \\ + 4P_{\varkappa}S_{[\omega\alpha}^{\varrho}S_{\beta]\varrho}^{\varkappa} - 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}P_{\beta]} + 2P_{\varrho}\nabla_{[\omega}S_{\alpha\beta]}^{\varrho} + 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho}\nabla_{\omega]}P_{\varrho}] = 0,$$

woraus sich nach der Reduktion folgendes ergibt:

$$(72) \qquad \nabla_{[\omega}V_{\alpha\beta]} - 4S_{\varkappa\varrho}^{\varrho}S_{[\omega\alpha}^{\varphi}S_{\beta]\varphi}^{\varkappa} + 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho}\nabla_{\omega]}S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + \\ + (n+1)[4P_{\varkappa}S_{[\omega\alpha}S_{\beta]\varrho}^{\varkappa} - 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}P_{\beta]} + 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho}\nabla_{\omega]}P_{\varrho}] = 0.$$

Um $\nabla_{\omega}P_{\alpha}$ aus der Gleichung (72) zu eliminieren, wenden wir die Ausgangsgleichung (64) an, die für $\beta = \gamma$ folgende Gestalt hat:

$$(73) \qquad V_{\alpha\beta} - 2\nabla_{[\alpha}S_{\gamma]\varrho}^{\varrho} - 2S_{\alpha\gamma}^{\varrho}S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + (n+1)[2\nabla_{[\alpha}P_{\gamma]} + 2S_{\alpha\gamma}^{\varrho}P_{\varrho}] = 0.$$

Durch Multiplizieren der Gleichung (73) mit $2S_{\beta\omega}^{\gamma}$ und durch Alternation der Indizes α, β, ω ergibt sich folgendes:

$$(74) \qquad 2V_{[\alpha|\gamma|}S_{\beta\omega]}^{\gamma} - 2S_{[\beta\omega}^{\gamma}\nabla_{\alpha]}S_{\gamma\varrho}^{\varrho} + 2S_{[\beta\omega}\nabla_{|\gamma|}S_{\alpha]\varrho}^{\varrho} - 4S_{[\beta\omega}^{\gamma}S_{\alpha]\gamma}^{\varrho}S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa} + \\ + (n+1)[4S_{[\beta\omega}^{\gamma}S_{\alpha]\gamma}^{\varrho}P_{\varrho} + 2S_{[\beta\omega}^{\gamma}\nabla_{\alpha]}P_{\gamma} - 2S_{[\beta\omega}^{\gamma}\nabla_{|\gamma|}P_{\alpha}] = 0.$$

Wenn wir in der Gleichung (74) eine gerade Permutation der Indizes (z.B. $\beta\omega\alpha \to \omega\alpha\beta$) durchführen, so können wir letzhin folgende Gleichung schreiben:

$$2V_{[\omega|\varrho|}S_{\alpha\beta]}^{\varrho} - 2S_{[\alpha\beta}^{\varkappa}\nabla_{\omega]}S_{\varkappa\varrho}^{\varrho} + 2S_{[\omega\alpha}^{\varkappa}\nabla_{|\varkappa|}S_{\beta]\varrho}^{\varrho} - 4S_{\varrho\varkappa}^{\varkappa}S_{[\omega\alpha}^{\gamma}S_{\beta]\gamma}^{\varrho} + \\ + (n+1)[+4S_{[\omega\alpha}^{\varrho}S_{\beta]\varrho}^{\gamma}P_{\gamma} + 2S_{[\alpha\beta}^{\varrho}\nabla_{\omega]}P_{\varrho} - 2S_{[\omega\alpha}^{\varrho}\nabla_{|\varrho|}P_{\beta]}] = 0.$$

Substrahiert man die Seiten der letzten Gleichung von der Gleichung (72), so erhält man

$$\nabla_{[\omega} V_{\alpha\beta]} - 2V_{[\omega|\varrho|} S_{\alpha\beta]}^{\varrho} = 0$$

oder

$$\nabla_{[\omega} V_{\alpha\beta]} = 2S_{[\omega\alpha}^{\varrho} V_{\beta]\varrho},$$

also die Identität (13).

Auf diese Weise wurde der Satz 5 bewiesen.

Im spezielle Fall, wenn die Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ symmetrisch ist ($S_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$), findet man den Satz 5 in der Arbeit ([6], S. 288).

Hilfssatz 5. *Wenn der Raum L_n $(n > 2)$ ein verallgemeinerter projektiv-euklidischer Raum ist und die Konnexion symmetrisch* (2) *bzw. halbsymmetrisch* (3) *ist, dann bestehen die Relationen*:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = 0 \quad \textit{für } \delta \neq \alpha, \beta, \gamma. \tag{75}$$

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung, des Satzes 1 und Hilfssatzes 3 haben wir:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = 2\nabla_{[\alpha} S_{\beta]\gamma}^{\delta} + 2S_{\alpha\beta}^{\varrho} S_{\varrho\gamma}^{\delta} - 2S_{[\alpha|\varrho|}^{\delta} S_{\beta]\gamma}^{\varrho}. \tag{76}$$

Es ist aber nicht schwer nachprüfen, dass die rechte Seite der Formel (76) für die symmetrische oder halbsymmetrische Konnexion identisch verschwindet, was zu beweisen war.

Die Aufgabe VI. 1, 3_a in der Arbeit ([6], S. 292), in der die drei Vektorfelder P_α, $2P_\alpha$ und $3P_\alpha$ vorkommen und die Konnexion symmetrisch ist ($S_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$), kann zweifach verallgemeinert werden, d.h. für m Felder P_α, $2P_\alpha, \ldots, Pm_\alpha$ und für beliebige Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, die nicht gerade symmetrisch ist.

Definition 4. Wir werden sagen, dass die Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$, die durch die Formel (16) bestimmt ist, durch die Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ und das Vektorfeld P_α generiert wird.

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} \overset{\mathrm{df}}{=} R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}; \tag{77}$$

$\overset{m}{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ sei der Krümmungstensor der Konnexion $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$, die durch das Vektorfeld mP_α generiert wird.

Auf Grund der Formel (40) haben wir die Formel:

$$\begin{aligned}\overset{m}{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} &= R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} + Q_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} - A_{\alpha}^{\delta}(m\nabla_\beta P_\gamma - m^2 P_\beta P_\gamma + mS_{\beta\gamma}^{\varrho} P_\varrho) + \\ &+ A_{\beta}^{\delta}(m\nabla_\alpha P_\gamma - m^2 P_\alpha P_\gamma + mS_{\alpha\gamma}^{\varrho} P_\varrho) + A_{\gamma}^{\delta}(m\nabla_\alpha P_\beta - m\nabla_\beta P_\alpha + 2mS_{\alpha\beta}^{\varrho} P_\varrho),\end{aligned} \tag{78}$$

wo $Q_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ durch (31) bestimmt ist.

Hilfssatz 6. *Es gilt die Relation*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\overset{k}{R}{}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = -Q_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}. \tag{79}$$

Beweis. Im Beweis werden wir einige Kombinatorische Formel ausnützen ([2], Kap. 1) und zwar:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} = 0, \tag{80}$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k\binom{m}{k} = 0, \tag{81}$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k^2\binom{m}{k} = 0. \tag{82}$$

Schreiben wir die linke Seite der Formel (79) in extenso aus:

$$L_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} - \binom{m}{1}\overset{1}{R}{}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + \binom{m}{2}\overset{2}{R}{}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + \ldots + (-1)^m\binom{m}{m}\overset{m}{R}{}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}. \tag{83}$$

Um (83) zu berechnen berücksichtigen wir (78), wo durch die Glieder $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$, $Q_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$, $A_{\alpha}^{\delta}\nabla_{\beta}P_{\gamma}$, $A_{\alpha}^{\delta}P_{\beta}P_{\gamma}$, $A_{\alpha}^{\delta}S_{\beta\gamma}^{\varrho}P_{\varrho}$ reduziert werden. Auf Grund der Identitäten (80), (81) und (82) erhalten wir die gewünschte Relation

$$L_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = -Q_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Thomas [7] hat in den Räumen A_n das sogenannte Objekt der projektiven Konnexion definiert:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\gamma} \overset{\text{df}}{=} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \frac{2}{n+1}A^{\gamma}_{(\alpha}\Gamma_{\beta)}, \tag{84}$$

wo

$$\Gamma_{\beta} \overset{\text{df}}{=} \Gamma_{\beta\varrho}^{\varrho} \quad \text{ist}. \tag{85}$$

Objekt $\Pi_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ist eine Invariante der projektiven Transformation der Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ([1], S. 265).

Wir wollen nun das Thomassche Objekt $\Pi_{\alpha\beta}^{\gamma}$ verallgemeinern für L_n und für verallgemeinerte projektive Transformation der Konnexion (16).

Definition 5. In den Räumen L_n definieren wir das verallgemeinerte Objekt der projektiven Konnexion wie folgt:

$$\overset{*}{\Pi}{}_{\alpha\beta}^{\gamma} \overset{\text{df}}{=} \Gamma_{(\alpha\beta)}^{\gamma} - \frac{2}{n+1}A^{\gamma}_{(\alpha}\overset{*}{\Gamma}_{\beta)}, \tag{86}$$

wo

$$\overset{*}{\Gamma}_{\beta} \overset{\text{df}}{=} \Gamma_{(\beta\varrho)}^{\varrho} \quad \text{ist}. \tag{87}$$

Für $S_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$ reduzieren sich die Formeln (86) und (87) entsprechend zu den Formeln (84) und (85).

SATZ 6. *Das verallgemeinerte Objekt der projektiven Konnexion* $\overset{*}{\Pi}{}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ *des Raumes* L_n *ist eine Invariante der verallgemeinerten projektiven Transformation der Konnexion* $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ (16).

Der Beweis ist leicht.

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb, *Tensorrechnung*, Staatlische Verlag d. Wiss. Warschau (1966) (Poln.).

[2] L. Jeśmanowicz und J. Łoś, *Aufgabensammlung zur Algebra*, Staatlische Verlag d. Wiss. Warschau (1959) (Poln.).

[3] A. P. Norden, *Affinzusammenhängende Räume*, Gostechisdat, Moskau–Leningrad (1950) (Russ.).

[4] P. K. Rachevsky, *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*, Moskau (1964) (Russ.).

[5] P. K. Rachevsky, *Geometrische Theorie der Partiellen Differentialgleichungen*, Gostechisdat, Moskau–Leningrad (1947) (Russ.).

[6] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, Springer-Verlag, Berlin-Götingen-Heidelberg (1954).

[7] T. Y. Thomas, *On the projective and equi-projective geometries of paths*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. (1925), S. 198–203.

[8] H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung*, Göting. Nachr. (1921), S. 99–112.

Reçu par la Rédaction le 30. 9. 1971