ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Une remarque sur les inégalités différentielles à paramètre retardé

by Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Zwerkin (1) a énoncé le théorème suivant sur les inégalités différentielles:

THÉORÈME 1 (Zwerkin). *Supposons qu'il existe une solution positive de l'inégalité*

(1) $$z'(x) \geqslant a(x)z(x) + |b(x)|\, z\big(x-\tau(x)\big)$$

pour $A \leqslant x < \infty$. *Envisageons l'inégalité*

(2) $$v'(x) \leqslant a(x)v(x) + b(x)v\big(x-\tau(x)\big)$$

avec la condition

(3) $$|v(x)| = |\varphi(x)| \leqslant z(x) \quad \textit{pour } x \in E_A.$$

où E_A *est un ensemble tel que* $x-\tau(x) \in E_A$ *pour* $x \geqslant A$. *Dans le cas envisagé la solution* $v(x)$ *de l'inégalité* (2) *avec la condition* (3) *satisfait à l'inégalité*

(4) $$|v(x)| \leqslant z(x) \quad \textit{pour } A \leqslant x < \infty.$$

Remarque 1. Le théorème ainsi formulé n'est pas correct, comme le montre l'exemple donné à la fin de la présente note. Mais dans les applications du théorème de Zwerkin la fonction $v(x)$ est non négative et, par suite, dans ce cas l'inégalité (4) est satisfaite. Dans le théorème sur la stabilité donné par Zwerkin le théorème 1 doit être remplacé par le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Envisageons deux fonctions* $v(x)$ *et* $z(x)$ *de classe* C^1 *et supposons que*

(1′) $$z'(x) \geqslant a(x)z(x) + |b(x)|\, z(x), \quad h > 0 \textit{ pour } x \geqslant 0,$$

(2′) $$v'(x) \leqslant a(x)v(x) + b(x)z(x-h) \quad \textit{pour } x \geqslant 0,$$

(3′) $$|v(x)| < z(x) \quad \textit{pour } -h \leqslant x \leqslant 0,$$

(4′) $$-z(x) \leqslant v(x) \quad \textit{pour } x \geqslant 0.$$

(1) А. М. Зверкин, *Применение теорем сравнения к исследованию устойчивости уравнений с запаздыванием*, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Том VII, Москва 1969, p. 3.

Les hypothèses (1′), (2′), (3′) *et* (4′) *étant admises on a*

$$v(x) < z(x) \quad \textit{pour}\ 0 \leqslant x. \tag{4''}$$

On vérifie facilement que le théorème ainsi corrigé est vrai. On démontre aussi facilement le théorème plus général que nous établirons maintenant.

1. Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H. 1° La fonction $f(x, y, z)$ est continue par rapport à (x, y, z) pour $x \geqslant 0$, y, z quelconques.

2° La fonction $z(x)$ de classe c^1 pour $x \geqslant 0$, continue pour $-h \leqslant x$, satisfait à l'inégalité

$$z'(x) \geqslant f\big(x, z(x), z(x-h)\big) \quad \text{pour } x \geqslant 0. \tag{1.1}$$

3° La fonction $v(x)$ est de classe C^1 pour $x \geqslant 0$ et continue pour $x \geqslant -h$. Il existe une fonction $w(x)$ telle que

$$v'(x) < f\big(x, v(x), u\big) \quad \text{pour } x \geqslant 0 \text{ tel que } v(x) = z(x), \quad z(x-h) \geqslant u \geqslant w(x-h). \tag{1.2}$$

4° Nous avons

$$v(x) \geqslant w(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x, \tag{1.3}$$

$$z(x) > v(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0. \tag{1.4}$$

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* H *étant admises on a*

$$z(x) > v(x) \quad \textit{pour}\ -h \leqslant x. \tag{1.5}$$

Le théorème 2 est presque évident. Pour la démonstration par l'impossible supposons qu'il existe un $x_0 \in (0, \infty)$ tel que

$$z(x) > v(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x < x_0, \tag{1.6}$$

$$z(x_0) = v(x_0). \tag{1.7}$$

En vertu de (1.2) on a

$$v'(x_0) < f\big(x_0, v(x_0), u\big) = f\big(x_0, z(x_0), u\big) \tag{1.8}$$

pour tout u tel que $z(x_0 - h) \geqslant u \geqslant x(x_0 - h)$.

En vertu de (1.6) et (1.3) on a

$$z(x_0 - h) > v(x_0 - h) \geqslant w(x_0 - h)$$

et, par suite, en vertu de (1.8) et (1.1), il vient

$$v'(x_0) < f\big(x_0, z(x_0), z(x_0 - h)\big) \leqslant z'(x_0), \tag{1.9}$$

d'où il résulte que pour $\delta > 0$ suffisamment petit on a

$$v(x) > z(x) \quad \text{pour } x_0 - \delta \leqslant x < x_0,$$

ce qui est incompatible avec (1.6). Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

2. Remarque 2. D'une façon analogue on obtient le théorème suivant

HYPOTHÈSES H. 1° La fonction $f(x, y, z)$ est continue par rapport à (x, y, z) pour $x \geqslant 0, y, z$ quelconques.

2° Il existe une fonction $w(x)$ définie pour $-h \leqslant x$ telle que la fonction $z(x)$, de classe C^1 pour $0 \leqslant x$ et continue pour $-h \leqslant x$, satisfait à l'inégalité

$$z'(x) \geqslant f\big(x, z(x), u\big) \quad \text{pour } x \geqslant 0 \text{ et } w(x-h) \leqslant u \leqslant z(x-h). \tag{2.1}$$

3° La fonction $v(x)$, de classe C^1 pour $0 \leqslant x$ et continue pour $-h \leqslant x$, satisfait à l'inégalité

$$v'(x) < f\big(x, v(x), v(x-h)\big) \quad \text{pour } x \geqslant 0. \tag{2.2}$$

4° Nous avons

$$v(x) \geqslant w(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x, \tag{2.3}$$

$$z(x) > v(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0. \tag{2.4}$$

THÉORÈME 2*. *Les hypotheses* H* *étant admises on a*

$$z(x) > v(x) \quad \textit{pour } -h \leqslant x. \tag{2.5}$$

Démonstration. De l'hypothèse que

$$z(x_0) = v(x_0), \quad x_0 > 0,$$
$$z(x) > v(x) \geqslant w(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant x_0$$

il vient

$$z'(x_0) \geqslant f\big(x_0, v(x_0), v(x_0 - h)\big) > v'(x_0)$$

d'où il s'ensuit que

$$z(x) < v(x) \quad \text{pour } x_0 - \delta \leqslant x < x_0$$

où δ est une constante positive convenablement choisie, ce qui est incompatible avec la définition de x_0.

Remarque 3. Dans le cas où l'équation

$$y'(x) = f\big(x, y(x), y(x-h)\big)$$

satisfait à la condition d'unicité des solutions on peut remplacer l'inégalité (2.2) par une inégalité faible. Du théorème ainsi modifié on obtient comme cas particulier le théorème 1. Il suffit de poser

$$w(x) = -z(x), \quad f(x, y, z) = a(x)y + b(x)z.$$

3. Remarque 4. Du théorème 2^* on obtient comme cas particulier le théorème connu sur les inégalités différentielles à paramètre retardé, dans lequel on suppose que $f(x, y, z)$ est croissante par rapport à z, $v(x)$ satisfait aux inégalités (2.2) et (2.4) et la fonction $z(x)$ satisfait à l'inégalité

$$z'(x) \geqslant f\big(x, z(x), z(x-h)\big). \tag{3.1}$$

Il suffit de poser $w(x) = \min\big(v(x), z(x)\big)$. De la croissance de $f(x, y, z)$ et de l'inégalité (3.1) on obtient l'inégalité (2.1) pour $w(x-h) \leqslant u \leqslant z(x-h)$. L'inégalité (2.3) résulte immédiatement de la definition de la fonction $w(x)$.

Remarque 5. Dans la note citée de Zwerkin on trouve un théorème analogue à 2^*, où l'inégalité (2.1) est admise pour $|u| \leqslant z(x-h)$ et où l'inégalité (2.3) ne figure pas. Une telle modification des hypothèses H^* ne suffit cependant pas pour obtenir l'inégalité (2.5).

Remarque 6. Dans l'hypothèse H^* on peut remplacer l'inégalité (2.3) par la suivante:

$$w'(x) \geqslant f\big(x, w(x), u\big) \quad \text{pour } u \leqslant z(x-h). \tag{3.2}$$

On obtinent ainsi les hypothèses H^{**}.

Hypothèses H^{**}. 1° La fonction $f(x, y, z)$ est continue par rapport à (x, y, z) pour $x \geqslant 0$, y, z quelconques.

2° Il existe une fonction $w(x)$ définie pour $-h \leqslant x$ telle que la fonction $z(x)$, de classe C^1 pour $0 \leqslant x$ et continue pour $-h \leqslant x$, satisfait à l'inégalité (2.1) et $w(x)$ satisfait à l'inégalité (3.2),

$$\begin{array}{lll} (3.1) & z'(x) \geqslant f\big(x, z(x), u\big) & \text{pour } x \geqslant 0,\, w(x-h) \leqslant u \leqslant z(x-h), \\ (3.2) & w'(x) \geqslant f\big(x, w(x), u\big) & \text{pour } x \geqslant 0,\, u \leqslant z(x-h), \\ (3.3) & w(x) < z(x) & \text{pour } x \geqslant -h. \end{array}$$

3° La fonction $v(x)$, de classe C^1 pour $0 \leqslant x$ et continue pour $-h \leqslant x$, satisfait à l'inégalité

$$v'(x) < f\big(x, v(x), v(x-h)\big) \quad \text{pour } x \geqslant 0 \tag{2.2}$$

et

$$z(x) > v(x) \geqslant w(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0. \tag{2.4}$$

Théorème 2^{**}. *Les hypothèses* H^{**} *étant admises on a*

$$z(x) > v(x) \quad \textit{pour } -h \leqslant x.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un $x_0 > 0$ tel que

$$v(x_0) = z(x_0), \tag{3.3}$$

$$v(x) < z(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x < x_0. \tag{3.4}$$

Dans le cas où $v(x) \geqslant w(x)$ dans tout l'intervalle $-h \leqslant x < x_0$ on obtient du théorème 2*

$$v(x_0) < z(x_0)$$

et, par suite, en vertu de (3.3) il existe un nombre $\bar{x}$ tel que

$$v(\bar{x}) = w(\bar{x}), \tag{3.5}$$

$$v(x) < w(x) \quad \text{pour } \bar{x} < x \leqslant x_0. \tag{3.6}$$

En vertu de (3.4), (3.2), (2.2) et (3.5) on obtient

$$w'(\bar{x}) \geqslant f(\bar{x}, v(\bar{x}), v(\bar{x}-h)) > v'(\bar{x}),$$

d'où il vient que

$$w(x) > v(x) \quad \text{pour } \bar{x} < x \leqslant \bar{x}+\delta. \tag{3.7}$$

L'inégalité (3.7) est incompatible avec (3.6) et par suite $w(x) < v(x)$ dans tout l'intervalle $[0, x_0]$, d'où en vertu du théorème 2*

$$v(x_0) < z(x_0) \quad \text{pour chaque } x_0 \in [-h, \infty).$$

4. Une autre modification du théorème 2 est fournie par le théorème suivant:

Envisageons deux fonctions de classe C^1 pour $x \geqslant -h$, $v(x)$ et $z(x)$ et admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES A. Il existe une fonction $w(x)$ de classe C^1 pour $x \geqslant -h$ et une constante positive $\varepsilon > 0$ telles que

$$v'(x) < z'(x) \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } x \geqslant 0,\ z(x) = v(x) \text{ et } z(x-h) > v(x-h) \geqslant w(x-h), \tag{4.1}$$

$$v'(x) < w'(x) \quad \text{pour } x \geqslant 0 \text{ tel que } w(x)-\varepsilon \leqslant v(x) < w(x),\ v(x-h) \leqslant z(x-h), \tag{4.2}$$

$$w(x) \leqslant v(x) < z(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0. \tag{4.3}$$

THÉORÈME T. *Les hypothèses* A *étant admises on a pour tout* $x \geqslant -h$ *l'inégalité*

$$v(x) < z(x) \quad \textit{pour } x \geqslant -h.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un x_0 tel que

$$v(x_0) = z(x_0), \tag{4.4}$$

$$v(x) < z(x) \quad \text{pour } x \in [-h, x_0). \tag{4.5}$$

Envisageons deux cas possibles:

(a) $w(x) \leqslant v(x) < z(x)$ pour $x \in [-h, x_0)$.

(b) Il existe un $x_1 \in (0, x_0)$ et un $\delta > 0$ tels que

$$\begin{aligned} v(x) &< w(x) \quad \text{pour } x \in [x_1-\delta, x_1), \\ v(x_1) &= w(x_1). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Considérons le cas (a). En vertu de (4.1) on a donc

$$v'(x_0) < z'(x_0)$$

et par suite

$$v(x) > z(x) \qquad \text{pour } x_0 - \bar{\delta} \leqslant x < x_0.$$

De la définition de x_0 on obtient

$$z(x) > z(x) \qquad \text{pour } x_0 - \bar{\delta} \leqslant x < x_0,$$

et par suite le cas (a) n'est pas possible. Envisageons le cas (b). Il existe un $\tilde{\delta} \leqslant \delta, \tilde{\delta} > 0$ tel que

$$w(x) - \varepsilon < v(x) < w(x) \qquad \text{pour } x \in [x_1 - \tilde{\delta}, x_1)$$

d'où, en vertu de (4.5) et (4.2), on obtient

$$v'(x) < w'(x) \qquad \text{pour } x \in [x_1 - \tilde{\delta}, x_1)$$

et par suite

$$w(x) - v(x) > w(x_1 - \tilde{\delta}) - v(x_1 - \tilde{\delta}) \qquad \text{pour } x \in (x_1 - \tilde{\delta}, x_1)$$

d'où, en vertu de la continuité de $w(x) - v(x)$, il vient

$$w(x_1) - v(x_1) \geqslant w(x_1 - \tilde{\delta}) - v(x_1 - \tilde{\delta}) > 0$$

et enfin, en vertu de (4.6),

$$w(x_1) > v(x_1) = w(x_1).$$

Ainsi nous avons démontré que ni le cas (a) ni le cas (b) ne peuvent avoir lieu et que, par suite, il n'existe aucun point $x_0 > 0$ tel qu'on ait (4.4) et (4.5). Le théorème T se trouve ainsi démontré. Du théorème T on obtient comme cas particulier le théorème suivent: Admettons les hypothèses $\tilde{\mathrm{H}}$:

HYPOTHÈSES $\tilde{\mathrm{H}}$. 1° La fonction $f(x, y, z)$ est continue par rapport à (x, y, z) pour $x \geqslant 0$, y, z quelconques.

2° Il existe des fonctions $z(x), w(x)$ de classe C^1 pour $x \geqslant -h$ et une constante $\varepsilon > 0$ telles que

$$z'(x) \geqslant f\big(x, z(x), z(x-h)\big) \qquad \text{pour } x \geqslant 0, \tag{5.1}$$

$$w'(x) \geqslant f\big(x, w(x), w(x-h)\big) \qquad \text{pour } x \geqslant 0, \tag{5.2}$$

$$f\big(x, z(x), u\big) < f\big(x, z(x), z(x-h)\big) \qquad \text{pour } x \geqslant 0, \quad w(x-h) \leqslant u < z(x-h), \tag{5.3}$$

$$f(x, y, u) < f\big(x, w(x), w(x-h)\big) \qquad \text{pour } x \geqslant 0, \text{ tel que } u \leqslant z(x-h), w(x) - \varepsilon < y < w(x), \tag{5.4}$$

$$v'(x) \leqslant f\big(x, v(x), v(x-h)\big) \qquad \text{pour } x \geqslant 0 \tag{5.5}$$

tel que

$$v(x) = z(x) \quad \text{et} \quad w(x-h) \leqslant v(x-h) < z(x-h), \tag{5.6}$$

ou

$$w(x)-\varepsilon \leqslant v(x) < w(x),\ v(x-h) \leqslant z(x-h), \tag{5.7}$$

$$w(x) \leqslant v(x) < z(x) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant x \leqslant 0. \tag{5.8}$$

THÉORÈME $\tilde{\mathrm{T}}$. *Les hypothèses* $\tilde{\mathrm{H}}$ *étant admises on a*

$$v(x) < z(x) \quad \textit{pour} \quad x > 0. \tag{5.9}$$

Démonstration. Pour démontrer le théorème $\tilde{\mathrm{T}}$ il suffit de prouver que sont satisfaites les hypothèses A. Pour obtenir (4.1) envisageons $v'(x)$ dans l'ensemble

$$\{x \mid v(x) = z(x),\ w(x-h) \leqslant v(x-h) < z(x-h)\}.$$

On a (en vertu de (5.5))

$$v'(x) \leqslant f\big(x, v(x), v(x-h)\big) = f\big(x, z(x), v(x-h)\big)$$

pour $x \geqslant 0$ tel que $v(x) = z(x)$, $w(x-h) \leqslant v(x-h) < z(x-h)$ et en vertu de (5.3) et (5.1)

$$v'(x) < f\big(x, z(x), z(x-h)\big) \leqslant z'(x)$$

pour $x \geqslant 0$ tel que $v(x) = z(x)$, $w(x-h) \leqslant v(x-h) < z(x-h)$, c'est-à-dire $v(x)$ satisfait à (4.1). D'une façon analogue on obtient (4.2),

$$v'(x) \leqslant f\big(x, v(x), v(x-h)\big) < f\big(x, w(x), w(x-h)\big) \leqslant w'(x)$$

pour $x \geqslant 0$ tel que $w(x)-\varepsilon \leqslant v(x) < w(x)$, $v(x-h) \leqslant z(x-h)$. Ainsi en appliquant le théorème T, on obtient le théorème $\tilde{\mathrm{T}}$.

6. Comme exemple d'application du théorème $\tilde{\mathrm{T}}$ on peut envisager le cas où la fonction $f(x, y, u)$ satisfait aux hypothèses suivantes:

L'équation

$$f(x, c, c) = 0 \tag{6.1}$$

admet deux solutions (au moins) $c_1 < c_2$ telles que

$$f(x, y, u) < 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0,\ c_1-\varepsilon \leqslant y < c_1,\ u \leqslant c_2, \tag{6.2}$$

$$f(x, c_2, u) < 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0,\ c_1 \leqslant u < c_2. \tag{6.3}$$

THÉORÈME $\tilde{\mathrm{T}}_0$. *Les hypothèses* (6.1), (6.2), (6.3) *étant admises chaque solution* $v(x)$ *de l'inégalité*

$$v'(x) \leqslant f\big(x, v(x), v(x-h)\big)$$

telle que

$$c_1 < v(x) < c_2 \quad \textit{pour} \quad -h \leqslant x \leqslant 0$$

satisfait à l'inégalité

$$v(x) < c_2 \quad \textit{pour} \quad -h < x < \infty.$$

Le théorème $\tilde{\mathrm{T}}_0$ est une conséquence du théorème $\tilde{\mathrm{T}}$. Il suffit de poser $z(x) = c_2$, $w(x) = c_1$. (5.1) et (5.2) résultent de (6.1) pour $c = c_i$ $(i = 1, 2)$. $f\big(x, z(x), z(x-h)\big) = f(x, c_2, c_2) = 0 = f(x, c_1, c_1) = f\big(x, w(x), w(x-h)\big)$, d'où en vertu de (6.2) on obtient (5.4) et enfin (6.3) entraîne (5.3). Les hypothèses $\tilde{\mathrm{H}}$ sont donc satisfaites.

7. Dans la suite nous allons donner un exemple dont il résulte que les hypothèses (5.1), (5.5), (5.8) (sans (5.2) et (5.4)) ne sont pas suffisantes pour obtenir l'inégalité (5.9) (dans tout l'intervalle $[0, \infty)$). Envisageons l'inégalité différentielle

$$z'(x) \geqslant a(x)z(x) + |b(x)|z(x-h) \tag{7.1}$$

et

$$v'(x) \leqslant a(x)v(x) + b(x)v(x-h), \tag{7.5}$$

$$-z(x) < \varphi(x) < z(x), \qquad v(x) = \varphi(x) \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0, \tag{7.8}$$

où les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $z(x)$ sont définies de la façon suivante: $b(x)$ est une fonction quelconque, continue pour $x \geqslant 0$ et non positive

$$b(x) \leqslant 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant x < \infty, \tag{7.9}$$

$b(x)$ est une fonction continue pour $x \geqslant 0$, quelconques tels que

$$-\int_0^{h/2} b(s)\,ds = \tfrac{1}{2}\ln 3, \tag{7.10}$$

$$\int_{h/2}^{h} b(s)\,ds = -p < -2 \tag{7.11}$$

et la fonction $a(x)$ est donné par l'égalité

$$a(x) = b(x) \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 2h. \tag{7.12}$$

Dans le cas envisagé l'inégalité (7.1) admet (en vertu de (7.9)) la solution positive

$$z(x) = c > 0 \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 2h \tag{7.13}$$

où c est une constante quelconque positive. Envisageons la fonction $v(x)$ telle que

$$v'(x) = b(x)\big(v(x) + |v(x)|\big) + b(x)v(x-h) \quad \text{pour } x \geqslant 0,\ x \leqslant 2h, \tag{7.14}$$

$$v(x) = \tfrac{1}{2}c \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0. \tag{7.15}$$

En vertu de (7.9) on a

$$v'(x) \leqslant b(x)v(x) + b(x)v(x-h) \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 2h, \tag{7.16}$$

$$|v(x)| = \tfrac{1}{2}c < z(x) = c \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0, \tag{7.17}$$

c'est-à-dire nos fonctions $v(x)$ et $z(x)$ satisfont aux hypothèses du théorème de Zwerkin. Envisageons la fonction $v(x)$. De l'égalité (7.14) il vient que pour x, $x \in [0, h]$, tel que $v(x) > 0$ on a

$$v'(x) = 2b(x)v(x) + b(x)c/2$$

et par suite

$$v(x) = \tfrac{1}{2}ce^{2\int_0^x b(s)ds}\Big\{\int_0^x e^{-2\int_0^s b(\tau)d\tau} b(s)ds + 1\Big\} = \tfrac{1}{2}ce^{2\int_0^x b(s)ds}\Big\{\tfrac{1}{2}(1 - e^{-2\int_0^x b(s)ds}) + 1\Big\}$$
$$= \tfrac{1}{2}ce^{2\int_0^x b(s)ds}\{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-2\int_0^x b(s)ds}\}$$

pour tous les x tels que $v(x) \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant h$. Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}h$ on a $-2\int_0^x b(s)ds \leqslant -2\int_0^{h/2} b(s)ds$, d'où

$$v(x) > \tfrac{1}{2}ce^{2\int_0^x b(s)ds}\{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-2\int_0^{h/2} b(s)ds}\}$$
$$= \tfrac{1}{2}ce^{2\int_0^x b(s)ds}\{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}e^{\ln 3}\} = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}h,$$

en vertu de (7.10)

$$v(\tfrac{1}{2}h) = 0 \quad \text{et} \quad v(x) > 0 \quad \text{pour } x < \tfrac{1}{2}h$$

et par suite $v(\frac{1}{2}h) = 0$ et $v(x) \leqslant 0$ pour $\frac{1}{2}h \leqslant x \leqslant h$,

$$v'(x) = b(x)\cdot\tfrac{1}{2}c \quad \text{pour } \tfrac{1}{2}h \leqslant x \leqslant h,$$

d'où on obtient

$$v(x) = \tfrac{1}{2}c\int_{h/2}^x b(s)ds \quad \text{pour } \tfrac{1}{2}h \leqslant x \leqslant h$$

et pour $x = h$ on a

$$v(h) = \frac{c}{2}\int_{h/2}^h b(s)ds < \frac{-2c}{2} = -c = -z(h),$$

c'est-à-dire

$$|v(h)| > z(h),$$

et par suite (4) n'a pas lieu pour $x = h$.

En posant $b(x) \equiv 0$ dans l'intervalle $[h, 2h]$ on obtient $v(x) = v(h) < -c$ pour $h \leqslant x \leqslant 2h$. Pour $x \geqslant 2h$ on peut poser $a(x) \equiv 0$ et

$$z(x) = c + c\int_{2h}^x |b(x)|ds \quad \text{pour } x \geqslant 2h,$$

$$v'(x) = b(x)v(h) \geqslant -b(x)c = |b|c$$

d'où

$$z'(x)-v'(x) = |b(x)|\big(c-|v(h)|\big) = |b(x)|a < 0,$$

$$z(x)-v(x) = z(2h)-v(2h)+a\int_{2h}^{x}|b(s)|ds = c-v(h)+a\int_{2h}^{x}|b(s)|ds.$$

Dans l'intervalle $[2h, 3h]$ on peut définir $b(x)$ de telle façon que

$$\int_{2h}^{3h}|b(s)|ds > -\frac{c-v(h)}{a}$$

et par suite

$$z(3h) < v(3h).$$

Ainsi, dans notre exemple l'inégalité (5.9) n'a pas lieu pour $x = 3h$. La fonction $f(x, y, u) = a(x)y+|b(x)|u$ satisfait au hypothèses (5.1), (5.5) et (5.3) les fonctions $w = -z(x)$, v et z satisfont aussi à l'hypothèse (5.8). Il ne manque que l'inégalité (5.2) pour la fonction $w(x) = -z(x)$ et la condition (5.4).

8. Remarque 7. De la démonstration du théorème T il est évident que l'inégalité (4.1) peut être admise seulement dans l'ensemble

$$(\omega) \qquad \{x|\, x\geqslant 0, z(x) = v(x), z(\xi)\geqslant v(\xi)\geqslant w(\xi) \text{ pour } x\geqslant\xi\geqslant x-h\}.$$

Du théorème envisagé il vient que l'ensemble (ω) est vide.

Remarque 8. L'inégalité (4.2) peut être admise dans l'ensemble suivant:

$$(\omega_1) \qquad \{x|\, x\geqslant 0, v(x) = w(x), v(x-h)\leqslant z(x-h)\}.$$

Du théorème T ainsi modifié on obtient le théorème suivant.

Hypothèses H_0. Les fonctions $f(x, y, u)$, $z(x)$, $w(x)$ et $v(x)$ satisfont aux hypothèses 1°, (5.1), (5.2), (5.3), et à (5.5) dans l'ensemble défini par (5.6) et dans l'ensemble (ω_1). Au lieu de (5.4) supposons que

$$f\big(x, w(x), u\big)\leqslant f\big(x, w(x), w(x-h)\big) \quad \text{pour } x\geqslant 0 \text{ tel que } u\leqslant z(x-h).$$

Théorème T_0. *Les hypothèses* H_0 *étant admises on a*

$$v(x) < z(x) \quad \textit{pour } x\geqslant 0.$$

Comme exemple d'application du théorème T_0 envisageons l'inégalité suivante

$$v'(x)\leqslant g\big(x, v(x)\, v(x-h)\big)+r\big(x, v(x), v(x-h)\big),$$

où $g(x, y, u)$ et $r(x, y, u)$ sont continues pour $x \geqslant 0, y, u$ quelconques

$$g(x, a, u) = 0 \text{ pour } x \geqslant 0, \quad r(x, b, u) = 0 \text{ pour } x \geqslant 0,$$
$$r(x, a, u) < (b-a)(a-u)(u-b) \quad \text{pour } b \leqslant u \leqslant a, x \geqslant 0.$$
$$g(x, b, u) < (b-a)(u-b)^2(a-u) \quad \text{pour } u \leqslant a,$$
$$b \leqslant v(x) \leqslant a \quad \text{pour } -h \leqslant x \leqslant 0.$$

Dans les hypothèses envisagées on a

$$\text{(N)} \qquad v(x) < a \quad \text{pour } x \geqslant 0.$$

Pour démontrer l'inégalité (N) il suffit de poser

$$f(x, y, u) = (y-a)(u-b)^2(a-u) + (b-y)(a-u)(u-b),$$
$$z(x) = a, \quad w(x) = b.$$

On obtient ainsi, pour x satisfaisant à (5.6),

$$\begin{aligned} v'(x) &\leqslant g\big(x, a, v(x-h)\big) + r\big(x, a, v(x-h)\big) = r\big(x, a, v(x-h)\big) \\ &< (b-a)\big(a-v(x-h)\big)\big(v(x-h)-b\big) = f\big(x, a, v(x-h)\big) \leqslant 0 \\ &= f(x, a, a) = z'(x). \end{aligned}$$

D'une façon analogue on obtient pour $x \in \omega_1$

$$v'(x) = g\big(x, b, v(x-h)\big) < (b-a)(u-b)^2(a-u),$$
$$w'(x) = 0 = f(x, b, b) = z'(x).$$

On vérifie facilement que

$$f(x, a, u) = (b-a)(a-u)(u-b),$$
$$f(x, b, u) = (b-a)\big(v(x-h)-b\big)^2\big(a-v(x-h)\big),$$

d'où on obtient

$$f(x, a, u) \leqslant 0 = f(x, a, a) \text{ pour } b \leqslant u \leqslant a,$$
$$f(x, b, u) \leqslant 0 = f(x, b, b) \text{ pour } u \leqslant a.$$

Les hypothèses H_0 sont donc satisfaites et par suite

$$v(x) < a \quad \text{pour } x \geqslant 0.$$

Dans l'exemple envisagé il n'est pas possible d'appliquer le théorème bien connu sur les inégalités différentielles à paramètre retardé dans lequel on suppose que $f(x, y, u)$ est croissante par rapport à u.

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1970