ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur la condensation des masses

par W. Kleiner (Kraków)

1. La méthode des points extrémaux de M. Leja peut être considérée comme une méthode variationnelle — du genre de celle de Ritz — pour approximer les mesures inconnues jouissant de propriétés extrémales par des mesures discrètes (portant la masse $1/n$ en chacun de n points distincts), définies par des propriétés analogues [1], [2]. Dans l'étude du degré de convergence de cette méthode il est utile de savoir approximer une mesure continue donnée par une mesure discrète que l'on obtient par „condensation" — et ce n'est pas cette mesure seule, mais surtout la valeur correspondante d'une fonctionelle discontinue (11) qui est à approximer. La mesure condensée est alors employée comme mesure de comparaison. Or, il semble utile de formuler dans cet ordre d'idées un lemme qui fait l'objet de cette note.

2. Soit C une courbe plane (ou bien un arc plan) de courbure bornée et de longueur $|C| \leqslant 1$, φ et σ deux mesures portées par C, dont φ est à potentiel (1) continu sur C et σ est positive, de masse totale unité: $\sigma(C) = 1$ et de densité bornée; nous entendons par cela que $\sigma(E) \leqslant K|E|$ pour tout sous-ensemble borelien E de C, où $|E|$ désigne la mesure linéaire de Lebesgue et K une constante numérique.

3. Le potentiel, par exemple celui de φ, est défini comme l'intégrale

$$U^{\varphi}(z) = \int \log|z-\zeta|^{-1} d\varphi(\zeta)\,, \tag{1}$$

le produit scalaire (énergie mutuelle), par exemple de φ et σ, par

$$(\varphi, \sigma) = \int U^{\varphi} d\sigma\,, \tag{2}$$

et $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$ est appelée énergie de φ. L'énergie est positive sauf pour la mesure identiquement nulle. Pour $\|\alpha\|^2$, $\|\beta\|^2 < \infty$ on a $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.

4. Soit s le paramètre naturel sur C; C est alors représentée par l'équation

$$z = z(s)\,, \quad z(s+|C|) = z(s)\,. \tag{3}$$

Nous aurons besoin du module de continuité:

$$\omega(\delta) = \max\left\{\left|U^{\varphi}\big(z(s_1)\big) - U^{\varphi}\big(z(s_2)\big)\right|,\quad |s_1 - s_2| \leqslant \delta\right\}. \tag{4}$$

5. Pour un s_0 fixe, soit

$$r = |z(s) - z(s_0)|, \qquad g = \log(1/r).$$

On a pour $r \neq 0$ (la différentiation entendue par rapport à s), $g'' = r^{-2}r'^2 - r^{-1}r''$. Comme la courbure de C est bornée, r'' l'est aussi; d'autre part, $|r'| \to 1$ $(s \to s_0)$, uniformément pour s_0. Il existe donc un $\delta > 0$ — qui ne dépend pas de s_0 — tel que g soit une fonction convexe de s dans $(s_0 - \delta, s_0)$ et dans $(s_0, s_0 + \delta)$.

6. Soit $\theta \geqslant |C|$ un nombre positif fixe. Pour tout n naturel, partageons C en n arcs $C_i = z(\langle s_{i-1}, s_i \rangle)$ de façon que

$$|C_i| \leqslant \theta/n, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Posons (voir (4))

$$\omega_n = \omega(\theta/n). \tag{6}$$

Soit z_i le centre de C_i: $z_i = z_i\big(\frac{1}{2}(s_{i-1} + s_i)\big)$, et τ_n une mesure discrète, portant la masse $m_i = \sigma(C_i)$ au point z_i:

$$\int f(z)\,d\tau_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)m_i, \qquad m_i = \sigma(C_i). \tag{7}$$

Le lemme que nous avons en vue est le suivant:

7. Lemme I. *Sous les conditions du n*^{0} 2,

$$\|\tau_n - \varphi\|_0^2 \leqslant \|\sigma - \varphi\|^2 + a_n, \qquad a_n = cn^{-1}\log n + 4\omega_n \to 0 \tag{8}$$

(voir (11), (6)), *où c dépend de C, φ, σ et θ.*

8. Démonstration. Soit σ_i^* la mesure sur C_i, de densité constante, avec $\sigma_i^*(C_i) = m_i = \sigma(C_i)$, et $\sigma^* = \sum \sigma_i^*$.

Limitons $\|\sigma^*\|^2 = \sum (\sigma_i^*, \sigma_k^*)$. Fixons un N de façon que $|C_i| \leqslant \delta/3$ pour $n \geqslant N$ (δ du n^0 5). Pour $i = k$, nous nous contentons de l'inégalité $(\sigma_i^*, \sigma_i^*) \geqslant 0$. Pour $i \neq k$, deux cas sont à distinguer:

9. Si C_i peut être joint à C_k par un arc de C de longueur $< \delta/3$, les intégrandes ci-dessous sont convexes pour $z \in C_i$ (n^0 5). Or, pour une fonction convexe la valeur moyenne dans un intervalle n'est pas plus petite que la valeur au milieu de cet intervalle, donc

$$u_k(z) = \int_{C_k} \log|z - \zeta|^{-1} d\sigma_k^*(\zeta) \geqslant m_k \log|z - z_k|^{-1}, \qquad z \in C_i.$$

Nous intégrons cette inégalité:

(9) $$(\sigma_k^*, \sigma_i^*) = \int_{C_i} u_k(z)\,d\sigma_i^* \geqslant m_i m_k \log|z_i - z_k|^{-1}.$$

10. Dans le cas contraire à celui du n⁰ 8, la distance minimale $\varrho(C_i, C_k) \geqslant c_2\delta/3 = c_3 > 0$, où c_3 dépend de C seulement. Alors, pour $z \in C_k$,

$$\begin{aligned} u_k(z) &= \int \log|z-\zeta|^{-1} d\sigma_k^*(\zeta) \\ &= m_k \log|z - z_k|^{-1} + \int \{\log|z-\zeta|^{-1} - \log|z - z_k|^{-1}\}\, d\sigma_k^*(\zeta). \end{aligned}$$

La valeur absolue du dernier intégrande ne dépasse pas $c_3^{-1}\theta/n$, ce que l'on voit de la formule de Lagrange. En intégrant, on obtient:

(10) $$(\sigma_i^*, \sigma_k^*) \geqslant m_i m_k (\log|z_i - z_k|^{-1} + \varepsilon_{ik}), \qquad |\varepsilon_{ik}| \leqslant 2\theta/c_3 n.$$

11. Désignons, pour une mesure τ continue ou non,

(11) $$\|\tau\|_0^2 = \iint \log_0 |z - \zeta|^{-1} d\tau\, d\tau,$$

où

(12) $$\log_0 r^{-1} = \begin{cases} \log r^{-1} & \text{pour} \quad r > 0, \\ 0 & \text{pour} \quad r = 0; \end{cases}$$

cf. [2]. Pour τ continue, $\|\tau\|_0 = \|\tau\|$; pour $\tau = \tau_n$:

(13) $$\|\tau_n\|_0^2 = \sum_{i \neq k} m_i m_k \log|z_i - z_k|^{-1}.$$

Les inégalités (9) et (10) nous donnent (voir n⁰ 7)

(14) $$\|\sigma^*\|^2 \geqslant \|\tau_n\|_0^2 - 2\,\theta/c_3 n.$$

Pour passer par les inégalités (20), mettrons-nous aux calculs suivants.

12. Par (2), (5), (6) on a:

(15) $$|(\varphi, \sigma^*) - (\varphi, \tau_n)| = \left|\sum \int \{U^\varphi(z) - U^\varphi(z_i)\}\, d\sigma_i^*\right| \leqslant \omega_n.$$

13. Lemme II. *L'inégalite* $0 \leqslant d\sigma^*/ds \leqslant K$ *entraîne, pour tout* s_1, s_2,

(16) $$\left|U^{\sigma^*}(z(s_1)) - U^{\sigma^*}(z(s_2))\right| \leqslant c_4 |s_1 - s_2| \log|s_1 - s_2|^{-1}, \qquad c_4 = c_4(C, K).$$

En effet, soit $d \geqslant 0$ tel que la direction de la tangente ne change que de $\pi/8$ au plus sur un arc quelconque de C de diamètre $\leqslant d$. Soient $z_1 = z(s_1)$, $z_2 = z(s_2)$, où $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{2}d$, et L_1, L_2, L_3 trois arcs consécutifs de C de diamètres $\leqslant d$, dont L_2 contient z_1 et z_2 (fig. 1). La numération de ces points est choisie de manière que la différence $\Delta(\sigma_L)$ ci-dessous soit positive. Soit σ_L la restriction de σ^* à $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. On a sur L_2

(17) $$|\partial U^{\sigma^*-\sigma_L}/\partial s| \leqslant M = M(C, d, K),$$

il suffit alors de considérer la différence

(18) $$0 \leqslant \Delta(\sigma_L) = U^{\sigma_L}(z_2) - U^{\sigma_L}(z_1) = \int \log\left|\frac{\zeta - z_2}{\zeta - z_1}\right| d\sigma_L.$$

L'intégrande est nul sur une droite qui n'a qu'un seul point z_0 commun avec L. L est ainsi partagé en deux arcs: L^+ où notre intégrande est positif et L^- où il se trouve négatif. Remplaçons notre mesure par une me-

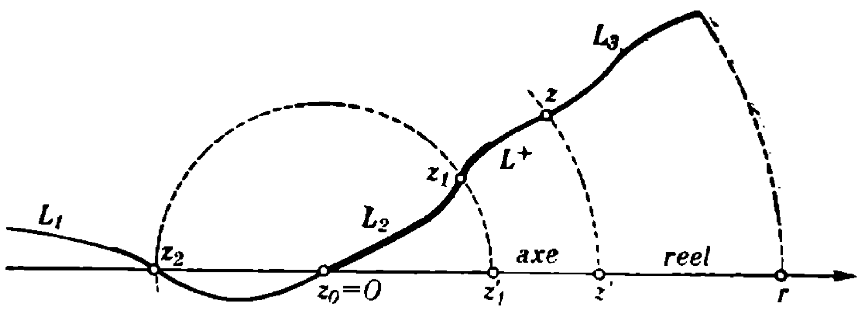

Fig. 1

sure τ: $d\tau(z) = K\,ds(z)$ pour $z \in L^+$, $\tau = 0$ hors de L^+. On a $\sigma \leqslant \tau$ sur L^+, $\tau \leqslant \sigma$ sur L^-, donc $0 \leqslant \Delta(\sigma_L) \leqslant \Delta(\tau)$.

Prenons z_0 pour origine et menons le demi-axe réel négatif par z_2. Pour tout $z \in L^+$ soit z' le point du demi-axe positif avec $z' = |z|$. Cette correspondance est biunivoque et — comme $\arg dz$ s'annule une fois sur L_2 — on a $|\arg dz| \leqslant \pi/4$, $dz' \leqslant |dz| \leqslant \sqrt{2}\,dz'$. Définissons τ' par $0 \leqslant d\tau'(z') = d\tau(z) \leqslant K\sqrt{2}\,dz'$. On a

$$|z_2 - z| \leqslant |z_2 - z'|, \qquad |z_1 - z| \geqslant |z'_1 - z'|,$$

donc

$$\Delta(\tau) \leqslant \Delta'(\tau') = \int \log\left|\frac{z_2 - z'}{z'_1 - z'}\right| d\tau'.$$

Comme $-z_2 = z'_1 > 0$ et $z' \geqslant 0$, l'intégrande est positif et l'intégrale augmente quand on remplace $d\tau'$ par $K\sqrt{2}\,dz'$:

$$\Delta(\tau) \leqslant K\sqrt{2}\int_0^r \left\{\log\frac{1}{|z'_1 - z'|} - \log\frac{1}{|z_2 - z'|}\right\} dz'$$

(pour r, voir la fig. 1). C'est une intégrale facile à calculer explicitement. En tenant compte des inégalités

$$r > d/\sqrt{2}, \qquad \tfrac{1}{2}|z_2 - z_1| < |z'_1| = |z_2| < |z_1 - z_2| \leqslant \tfrac{1}{2}d$$

(qui résultent de la condition relative aux changements de la tangente) on obtient

$$0 \leqslant \Delta(\sigma_L) \leqslant \Delta(\tau) \leqslant q|z_2 - z_1| \log |z_2 - z_1|^{-1} \leqslant q'|s_2 - s_1| \log |s_2 - s_1|^{-1}$$

où q' dépend de d, C, et K, mais est indépendant de σ^*, z_1, z_2. En rapprochant cette inégalité á (17) on a (16) pour $|s_2 - s_1| \leqslant \frac{1}{2}d$, donc pour tous les s_1, s_2.

14. Posons $U(s) = U^{\sigma^*}(z(s)) - U^{\varphi}(z(s))$ et — pour un i fixe (voir (3)) et $q > 0$ arbitraire —

$$h(s) = \sigma(z\langle s_{i-1}, s\rangle) + q(s - s_{i-1}) ,$$
$$h^*(s) = \sigma^*(z\langle s_{i-1}, s\rangle) + q(s - s_{i-1}) , \qquad q > 0 , \ s \in \langle s_{i-1}, s_i\rangle .$$

Ces fonctions sont strictement croissantes; le siqne $^{-1}$ désignant les fonctions inverses, nous avons par (16), (5), (6)

$$\begin{aligned}\Big|\int_{C_i} U(s)\,d(\sigma - \sigma^*)\Big| &= \Big|\int_{s_{i-1}}^{s_i} U(s)\,dh(s) - U(s)\,dh^*(s)\Big| \\ &= \Big|\int_0^{m_i+q|C_i|} \big\{U\big(h^{-1}(t)\big) - U\big(h^{*-1}(t)\big)\big\}\,dt\Big| \leqslant \int_0^{m_i+q|C_i|} |\{\ldots\}|\,dt \\ &\leqslant (m_i + q|C_i|)\{c_4|C_i|\log|C_i|^{-1} + \omega_n\}\end{aligned}$$

car $h^{-1}(t)$ et $h^{*-1}(t)$ sont contenus dans l'intervalle $\langle s_{i-1}, s_i\rangle$ de longueur $|C_i|$. Nous faisons tendre $q \to 0$ et nous avons par (5)

$$(19)\quad |(\sigma^* - \varphi, \sigma - \sigma^*)| = \int U(s)\,d(\sigma - \sigma^*) \leqslant \sum m_i \varepsilon_n = \varepsilon_n = c_4 \theta n^{-1} \log \theta^{-1} n + \omega_n .$$

15. On peut maintenant estimer:

$$\begin{aligned}(20)\qquad \|\sigma - \varphi\|^2 &= \|\sigma^* - \varphi + (\sigma - \sigma^*)\|^2 \\ &= \|\sigma^*\|^2 - 2(\varphi, \sigma^*) + \|\varphi\|^2 + 2(\sigma^* - \varphi, \sigma - \sigma^*) + \|\sigma - \sigma^*\|^2 \\ &\geqslant \|\tau_n\|_0^2 - 2\theta c_3^{-1} n^{-1} - 2(\varphi, \tau_n) - 2\omega_n + \|\varphi\|^2 - 2\varepsilon_n + 0 \\ &= \|\tau_n - \varphi\|_0^2 - b_n , \qquad b_n = 2\theta c_3^{-1} n^{-1} + 2\omega_n + 2\varepsilon_n\end{aligned}$$

(voir (14), (15), (19), (6)). $(b_n - 4\omega_n)/n^{-1}\log n$ est borné, donc nous avons le résultat final (8) pour $n \geqslant N$; avec un c plus grand convenable (8) est alors vérifié pour tout n.

16. Remarque. $U^{-\varphi}(z) \geqslant M > -\infty$ $(z \in C)$, ce qui nous permet d'appliquer le lemme de Fatou:

$$\|\sigma - \varphi\|^2 \leqslant \underline{\lim}\, \|\tau_n - \varphi\|_0^2 ;$$

donc, par notre lemme, on a:

$$\|\tau_n - \varphi\|_0^2 \to \|\sigma - \varphi\|^2 .$$

Travaux cités

[1] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 418-429.

[2] A. Szybiak, *Some properties of plane sets with positive transfinite diameter*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 19-28.

UNIVERSITÉ JAGELLONNE
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1962