

K. BOCHENEK (Warszawa)

ANALIZATOR RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH LINIOWYCH ARAL

W roku 1949 równocześnie z utworzeniem Państwowego Instytutu Matematycznego utworzono w nim Grupę aparatów matematycznych. Organizacją tej grupy kierował dr H. Greniewski. Na pierwszym miejscu postawiono opanowanie techniki elektronowych aparatów matematycznych. Dziedzina ta, szybko się rozwijająca na świecie, u nas w kraju nie była w tym czasie uprawiana.

Postanowiono rozpocząć prace techniczne od równoczesnej budowy trzech aparatów matematycznych. Jednym z nich jest analizator równań algebraicznych liniowych ARAL obecnie już pracujący. Czas poświęcony rozwiązywaniu układów liniowych równań algebraicznych stanowi w zastosowaniach matematyki dość znaczną pozycję, co spowodowało, że aparat taki znalazł się wśród pierwszych trzech aparatów budowanych przez Instytut Matematyczny.

Koncepcja aparatu. Wydaje się słusznym wyjaśnić tylko koncepcję przeze mnie przyjętą, ograniczając zagadnienia techniczne do najogólniejszych zasad realizacji, tym bardziej, że pewnych informacji technicznych dostarczy jeszcze następny rozdział poświęcony opisowi zbudowanego aparatu.

Weźmy pod uwagę⁽¹⁾ układ równań

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^0 + b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

⁽¹⁾ Zależności rozważanego tu rodzaju można napisać w różnych postaciach. Na przykład równanie (4) można napisać w postaci

$$(I) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{il} a_{ik} x_k^0 + \sum_{i=1}^n a_{il} b_i = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

lub w postaci

$$(II) \quad a_{il} a_{ik} x_k^0 + a_{il} b_i = 0,$$

gdzie przyjęto konwencję analogiczną do stosowanej w rachunku tensorowym. Jeśli mianowicie indeks jest dwukrotnie powtórzony w tym samym składniku (w przy-

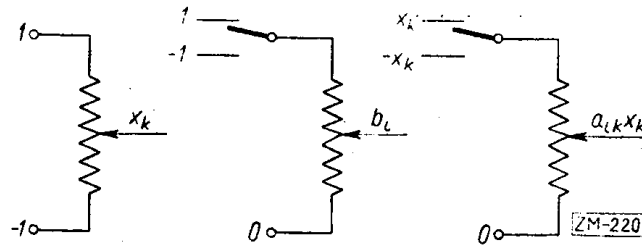
O wyznaczniku tego układu będziemy w dalszym ciągu zakładać, że jest on różny od zera.

Wprowadźmy również od razu następujące oznaczenia:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i = \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Liczby ε_i można zatem interpretować jako błędy w poszczególnych równaniach układu (1), powstające wówczas, gdy za układ liczb x_k^0 , stanowiących rozwiązanie, podstawimy pewien inny układ liczb x_k .

Podstawą koncepcji aparatu jest ustalenie izomorfizmu między interesującym nas systemem matematycznym a zjawiskami zachodzącymi w aparacie. W danym przypadku przyjęto, że liczby będą w aparacie



Rys. 1. Potencjometryczne dzielniki napięć; oznaczone zostały wartości napięć w poszczególnych punktach

realizowane w postaci wartości napięć, a dodawaniu liczb odpowiadać będzie dodawanie napięć. Odpowiednikiem jedynki będzie pewne napięcie wzorcowe w aparacie, a odpowiednikiem zera — napięcie zerowe.

Układy liczb x_k oraz b_i otrzymane zostaną z napięcia jednostkowego za pomocą potencjometrycznych dzielników napięć (rys. 1). Z układu n

padku powyższego równania są to indeksy i oraz k , należy uważać, że do indeksu tego odnosi się znak sumowania od 1 do n . Indeksy niepowtórzone mogą natomiast przybierać każdą z wartości od 1 do n .

Stosowana bywa również postać

$$(III) \quad A^T A x^0 + A^T b = 0.$$

Czcionkami półgrubymi oznaczono tu następujące macierze:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Zdaniem autora artykułu dla zależności rozważanego typu najdogodniejsza jest postać (II). Uwidocznia ona indeksy, co ułatwia rozumienie wzorów i spośród postaci spełniających ten warunek jest najzwężlejsza, a co za tym idzie — najprzejrzystsza. W artykule użyto postaci (I) na wyraźne życzenie Redakcji.

liczb (napięć) x_k otrzymamy w ten sam sposób układ n^2 liczb $a_{11}x_1, \dots, a_{nn}x_n$. Jeśli zbudujemy układy dodające napięcia, to jak wynika ze wzoru (2), będzie można realizować liczby ε_i .

Aparat wykonujący wymienione dotychczas operacje można by już zastosować do układów równań, dla których zbieżna jest metoda Seidla i Gaussa. Należałoby tylko uwidocznic napięcia ε_i za pomocą wskaźników. Przez sukcesywne sprowadzanie do zera

napięcia ε_1 za pomocą obrotu potencjometru dającego napięcie x_1 ,
 napięcia ε_2 za pomocą obrotu potencjometru dającego napięcie x_2 ,

 napięcia ε_n za pomocą obrotu potencjometru dającego napięcie x_n ,
 napięcia ε_1 za pomocą obrotu potencjometru dającego napięcie x_1 ,

doszlibyśmy do układu liczb stanowiącego rozwiązanie przybliżone.

Istotne znaczenie ma jednak usunięcie ograniczenia, jakie stanowi warunek zbieżności metody Seidla i Gaussa dla układu równań, który chcemy rozwiązać. W tym celu tworzymy wyrażenia

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n a_{il} \varepsilon_i \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{il} x_k + \sum_{i=1}^n a_{il} b_i = \delta_l, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Realizacja napięć δ_l następuje za pomocą metod omówionych już poprzednio.

Ponieważ wyznacznik układu (1) jest różny od zera, więc różny od zera będzie również wyznacznik układu

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{il} x_k^0 + \sum_{i=1}^n a_{il} b_i = 0,$$

mającego identyczne rozwiązanie jak układ (1). Dla układu (4) metoda Seidla i Gaussa jest już jednak zbieżna — jak to zaraz zobaczymy — a zatem można ten układ rozwiązać za pomocą poprzednio wskazanej procedury.

Aby udowodnić, że metoda kolejnych przybliżeń, o której mowa, jest zbieżna, rozważmy równanie

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{il} \xi_k \xi_l = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k \right)^2 = 0,$$

równoważne w dziedzinie rzeczywistej z układem równań

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

którego wyznacznik jest różny od zera, a zatem

$$(6) \quad \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0.$$

Stąd wnioskujemy, że symetryczna forma kwadratowa

$$I(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{il} a_{ik} \xi_l \xi_k$$

jest określona dodatnio, co wystarcza do udowodnienia postawionej tezy.

Może warto zwrócić uwagę na to, co daje zastosowanie aparatu matematycznego realizującego powyższą koncepcję:

1° Utworzenie układu równań (4) wymaga dość dużej liczby operacji arytmetycznych (rzędu n^3) i przy obliczeniach metodami klasycznymi jest prawie tak samo uciążliwe, jak ewentualne rozwiązanie układu wyjściowego metodą krakowianów. Przy użyciu natomiast aparatu elektrownego można przejść do nowego układu równań automatycznie i natychmiast.

2° Postępowanie iteracyjne metody Seidla i Gaussa zostaje znacznie przyspieszone. Mianowicie $n-1$ mnożeń, n dodawań i jedno dzielenie zostają zastąpione jednorazowym obrotem potencjometru.

Na niekorzyść aparatu należy zaliczyć potrzebę odpowiedniego przygotowania układu równań przed rozwiązaniem go na analizatorze, do czego jeszcze wrócimy.

Istnieje także możliwość zmechanizowanego i równoczesnego obracania potencjometrów. Należy mianowicie zmieniać x_k , które uważamy teraz za funkcje czasu t , według zależności

$$(7) \quad dx_k/dt = -\lambda \delta_k,$$

gdzie λ jest liczbą dodatnią. Technicznie da się to zrealizować za pomocą sprzężenia mechanicznego osi potencjometrów dostarczających napięć x_k z silniczkami elektrycznymi, tzw. *serwomotorami* — których prędkość obrotu jest proporcjonalna do napięcia zasilającego — zasilając te serwomotory napięciami $-\lambda \delta_k$. Wprawdzie operacje, które można by w ten sposób skrócić, zajmują tylko około 10% czasu poświęconego na rozwiązanie, ale interesujące byłoby zbadanie przy tej okazji pewnych zagadnień związanych z zastosowaniem techniki serwomechanicznej do aparatów matematycznych. Aparat nasz został dostosowany do współpracy z serwomechanizmami, niestety, drugorzędne trudności, związane z wykonywaniem urządzenia serwomechanicznego poza Instytutem, przeszkodziły w realizacji tego zamierzenia.

F. J. Murray udowodnił, że funkcje x_k spełniające układ równań różniczkowych (7) są przy dowolnych warunkach początkowych asym-

ptotycznie zbieżne do rozwiązania x_k^0 układu równań (1). Dowód ten przebiega jak następuje: Weźmy pod uwagę formę kwadratową

$$I_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{il} a_{kl} \varepsilon_i \varepsilon_k.$$

Można udowodnić w sposób podobny jak w przypadku formy I , że jest ona określona dodatnio. Weźmy również pod uwagę formę kwadratową

$$K = \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2.$$

Formę K możemy uważać również za funkcję zmiennych x_1, \dots, x_n uwzględniając układ równań (2). Jasne jest, że $K = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_k = x_k^0$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Równanie $K = 1$ określa w n -wymiarowej przestrzeni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ zbiór domknięty (powierzchnię kuli jednostkowej). Funkcja ciągła, jaką jest forma kwadratowa $I_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, przybiera zatem w tym zbiorze swą wartość minimalną; oznaczmy tę wartość przez c . Z własności formy I_1 wynika, że $c > 0$. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego układu liczb ε_i zachodzi zależność

$$(8) \quad I_1 \geq cK.$$

Założyliśmy, że x_k są funkcjami czasu spełniającymi układ równań różniczkowych (7). Obliczmy teraz pochodną dK/dt uwzględniając równania (2) i (3):

$$(9) \quad \frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n 2\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} = -2\lambda I_1.$$

Z (9), dzięki zależności (8), wynika

$$(10) \quad \frac{dK}{dt} \leq -2\lambda cK.$$

Jeżeli założymy, że w chwili początkowej jest $K = K_0$, to w rezultacie otrzymamy

$$(11) \quad K \leq K_0 e^{-2\lambda ct},$$

a zatem podana metoda jest rzeczywiście zbieżna.

Opis aparatu. Zbudowany aparat ARAL może rozwiązywać układy równań o liczbie niewiadomych nie większej niż siedem. Liczba ta wynika z możliwości materiałowych w chwili przystępowania do budowy aparatu. Przyjęte rozwiązanie techniczne pozwoliłoby na zwiększenie liczby niewiadomych do kilkunastu.

Wartości współczynników i niewiadomych w równaniach rozwiązywanych przez aparat są ograniczone do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$. W zasa-

dzie zatem potrzebna jest transformacja układu równań przed przystąpieniem do rozwiązywania go za pomocą aparatu.

Odpowiednie zredukowanie współczynników da się osiągnąć na przykład przez podzielenie każdego z równań przez największy co do bezwzględnej wartości współczynnik w tym równaniu występujący. Jeżeli chodzi o niewiadome, to jak łatwo zauważyć, transformacja wyrazów wolnych

$$(12) \quad b'_i = \tau b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

zmienia je w tym samym stosunku, to znaczy τ . Nasuwa się jednak od razu pytanie, co ma wskazywać potrzebę redukcji wartości niewiadomych, które zgodnie ze swą nazwą nie są przecież z góry znane. Wskaźnikiem tym jest fakt, że w trakcie rozwiązywania układu równań jeden z potencjometrów odpowiadających niewiadomym dochodzi do położenia krańcowego (1 lub -1).

Wydaje się słuszne scharakteryzować niedokładność aparatu liczbą

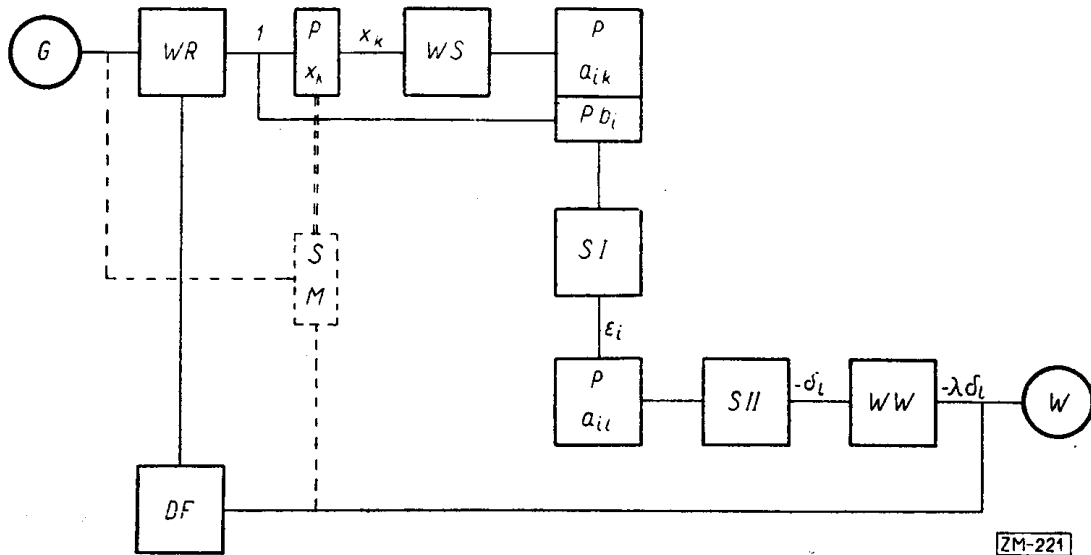
$$\varepsilon = \max |\varepsilon_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie ε_i są, zgodnie z poprzednimi oznaczeniami, błędami w poszczególnych równaniach. Zatem ε jest największą wartością bezwzględną błędów popełnianych w poszczególnych równaniach. Dotychczasowa eksploatacja aparatu wskazuje, że ε wynosi najczęściej około 0,01⁽²⁾. Liczba ta jest skutkiem niedokładności poszczególnych elementów aparatu, a nie niedokładności końcowego ustawienia rozwiązania, rzeczywiście bowiem napięcia ε_i występujące w aparacie można po zakończeniu procesu rozwiązywania uważać praktycznie za równe zero. Elementy aparatu, a więc potencjometry, układy sumujące i inne były w stosunku do krytycznych (wpływających w sposób istotny na dokładność) parametrów projektowane z tolerancją około 2^o/100. Jest ciekawe, że pomimo uzależnienia dokładności od wielu różnych czynników, jak stałość parametrów lamp elektronowych, stałość wartości oporów w zależności od temperatury itd., tolerancje możliwe do utrzymania bez użycia nadzwyczajnych środków okazywały się w różnych przypadkach tego samego rzędu. Odchylenia znalezionych pierwiastków od ich ścisłej wartości, $\Delta x_k = x_k - x_k^0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), w zależności od macierzy współczynników układu równań wypadają różnego rzędu, a co za tym idzie trudno byłoby za ich pomocą określić dokładność aparatu.

Omówmy teraz konstrukcję aparatu, korzystając ze schematu blokowego przedstawionego na rysunku 2.

⁽²⁾ Dokładność rozwiązania można zwiększyć za pomocą postępowania iteracyjnego, o czym będzie mowa w ostatnim rozdziale.

Układ zasilany jest przez generator napięcia sinusoidalnie zmiennego w czasie o częstotliwości 500 okresów, oznaczony na schemacie literą G (częstotliwość ta jest dość dogodna z technicznego punktu widzenia). Napięcie z generatora dostaje się na wzmacniacz regulowany WR , który dostarcza jednostkowego napięcia odniesienia, dodatniego i ujemnego.



Rys. 2. Schemat blokowy aparatu ARAL. Oznaczenia: G — generator; WR — wzmacniacz regulowany; Px_k — potencjometry x_k ; WS — wzmacniacze separatory; Pa_{ik} — potencjometry a_{ik} ; Pb_i — potencjometry b_i ; SI — układy sumujące I ; Pa_{il} — potencjometry a_{il} ; SII — układy sumujące II ; WW — wzmacniacze wyjściowe; W — wskaźniki; DF układ detekcji i filtracji; linia kreskowana pokazuje sposób ewentualnego przyłączenia układu serwomechanicznego SM : pojedyncza — połączenie elektryczne, podwójna — połączenie mechaniczne

Poziom tego napięcia może być regulowany w szerokich granicach w drodze elektrycznej i rzeczywiście zmienia się dość znacznie w trakcie rozwiązywania równań, do czego jeszcze za chwilę wrócimy.

Nie zawsze najważniejszym zadaniem wzmacniacza jest uwidoczniiona w jego nazwie rola wzmacniania napięcia, to znaczy dostarczania napięcia będącego określoną wielokrotnością napięcia danego (w omawianym przed chwilą przypadku napięcia generatora G). Często źródło napięcia zbyt silnie odczuwa wpływ dołączanych do niego układów, zmieniając znacznie dostarczane napięcie; mówimy wtedy, że źródło ma duży opór wewnętrzny. Rola wzmacniacza polega wówczas na dostarczaniu napięcia niewrażliwego na dołączanie do niego układów przy dostatecznie małym wpływie na wrażliwe źródło pierwotne. Gdy ta ostatnia rola jest dominująca, wzmacniacz nazywamy *separator*.

Wzmacniacz regulowany ma dość mały opór wyjściowy, około 1Ω , dzięki czemu przełączenie z napięcia $+1$ na napięcie -1 potencjometrów

dostarczających napięć b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i mających oporność 2000Ω , powoduje zmiany tych napięć mieszczące się w granicach tolerancji. Potencjometry dostarczające napięcie x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) są na stałe włączone między dodatnie a ujemne napięcia jednostkowe (rys. 1). Dzięki temu napięcia x_k można — bez przełączania przy zmianie znaku — zmieniać w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. Dodatnie i ujemne b_i realizujemy przez dołączanie potencjometru odpowiednio do napięcia $+1$ lub -1 .

Każde z siedmiu napięć x_k dostaje się następnie na swój wzmacniacz-separator *WS*. Rola tych wzmacniaczy polega na tym, że mają one dostatecznie mały opór wyjściowy, żeby mogły z kolei zasilać nowe potencjometry, oraz że dostarczają one zarówno napięcie x_i , jak i $-x_i$.

Dodatnie i ujemne napięcia x_i dostają się na sieć potencjometrów oznaczoną na schemacie przez a_{ik} . 49 tych potencjometrów dostarcza takiej samej liczby napięć: $a_{11}x_1, a_{12}x_2, \dots, a_{nn}x_n$. Potencjometry dostarczające napięcie b_i , jak wspominaliśmy, są zasilane napięciem jednostkowym.

Z sieci potencjometrów a_{ik} i b_i 56 przewodów prowadzi otrzymane napięcie do wzmacniaczy sumujących *I*, które na schemacie oznaczono symbolem *SI*. Rozwiązanie konstrukcyjne układów sumujących jest wzorowane na rozwiązaniu zastosowanym w analizatorze równań różniczkowych *ARR*, który już został opisany w tym czasopiśmie [1]. Układy sumujące *I* dostarczają 7 napięć ε_i i 7 napięć $-\varepsilon_i$, przy czym ε_i są nadal określone równaniami (2). Układy sumujące mają dostatecznie mały opór wyjściowy i zasilają wprost następną sieć potencjometrów.

Następna sieć potencjometrów, o której teraz mówimy, jest oznaczona na schemacie symbolem a_{ij} . Sieć ta dostarcza 49 napięć równych $a_{11}\varepsilon_1, a_{21}\varepsilon_2, \dots, a_{nn}\varepsilon_n$.

Otrzymane w ten sposób napięcia są sumowane przez układy sumujące *II*, oznaczone na schemacie symbolem *SII*. Układy sumujące *II* są zbudowane na podobnej zasadzie jak układy *I*. Dostarczają one jednak tylko 7 napięć $-\delta_i$, dzięki czemu mogą zawierać blisko o połowę mniej elementów niż układy poprzednie.

Napięcia $-\delta_i$ są wzmocnione przez wzmacniacze wyjściowe *WW* w jednakowym stosunku λ (około 1000 razy). Napięcia $-\lambda\delta_i$ dawane przez wzmacniacze wyjściowe są następnie uwidoczniane na wskaźnikach *W*.

Dość istotną rolę gra w omawianym układzie elektronicznym automatyczna regulacja napięcia. Wyjaśnijmy jej zasadę działania. Napięcia $-\lambda\delta$ dostają się na układ detekcji i filtracji *DF*, który wytwarza napięcie stałe równe największej z amplitud wymienionych powyżej napięć (sinusoidalnie zmiennych w czasie). Otrzymane napięcie stałe zostaje następnie dostarczone do wzmacniacza regulowanego, którego wzmocnienie

szybko maleje wraz ze wzrostem napięcia stałego dostarczanego przez układ DF . Dzięki temu w trakcie rozwiązywania równań napięcia $-\lambda\delta_i$ utrzymują się stale na poziomie umożliwiającym wygodne odczytywanie wskaźników W . Natomiast, co na pierwszy rzut oka może wydawać się paradoksalne, silnie zmieniają się napięcia jednostkowe $+1$ i -1 . W istocie jednak nie ma w tym nic złego, ponieważ zbieżność rozważanej metody przybliżeń nie ma żadnego związku z wyborem wartości napięcia jednostkowego.

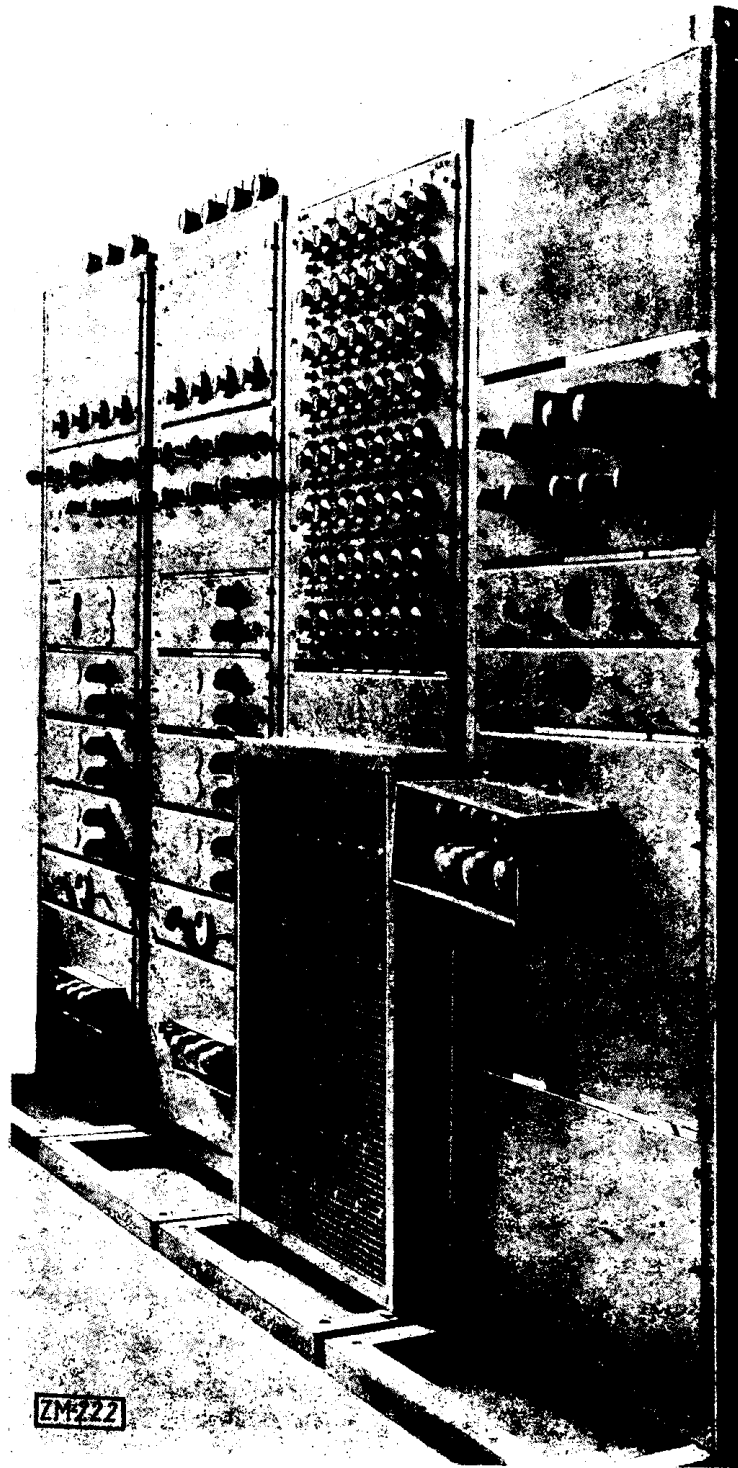
Omówiony tu typ regulacji napięcia nosi nazwę *sprzężenia zwrotnego*. Nazwa ta wiąże się z tym, że napięcia znajdujące się na wyjściu układu wracają i oddziałują na jego wejście. Oprócz zasadniczego sprzężenia zwrotnego, o którym przed chwilą mówiliśmy, w aparacie występuje jeszcze kilkadziesiąt innych, lokalnych sprzężeń zwrotnych. Technika sprzężeń zwrotnych odgrywa zasadniczą rolę w nowoczesnej technice elektronowej, w szczególności w dziedzinie elektronowych aparatów matematycznych. Sprzężenia zwrotne pozwalają między innymi na uniezależnienie w dostatecznym stopniu dokładności aparatu od takich kapryśnych czynników, jak parametry lamp elektronowych lub napięcia sieci.

Sądzę, że mogą być interesujące niektóre szczegóły techniczne. Wzmacniacz regulowany zawiera sześć lamp elektronowych, z których dwie służą do regulacji wzmacnienia, a po dwie użyte są do dostarczania napięć jednostkowych dodatniego i ujemnego z odpowiednio małym oporem wyjściowym.

Układy sumujące I zawierają 28 lamp elektronowych, po 4 na jeden układ sumujący; układy sumujące II —14 lamp elektronowych, po dwie na jeden układ. Razem aparat zawiera 108 lamp, nie licząc lamp prostowniczych w układzie zasilającym.

Wzmocnienie napięć między wejściem a wyjściem aparatu w przypadku, gdy znika napięcie regulacyjne, jakie otrzymuje wzmacniacz regulowany, wynosi około 50000. Gdyby odłączone zostały sprzężenia zwrotne, iloczyn wzmacnień wszystkich układów aparatu następujących kolejno po sobie wyniósłby około 10^{20} .

Fotografię aparatu ARAL pokazano na rysunku 3. Widoczne są na niej cztery segmenty aparatu. Segment skrajny ze strony prawej mieści wzmacniacz regulowany WR oraz układy detekcji i filtracji DF , których 10 lamp elektronowych widocznych jest w górnej części tego segmentu, a ponadto układ zasilający I , którego dziesięć lamp prostowniczych objętych razem siatką ekranującą widać w dolnej części segmentu. Następny z kolei segment zawiera w swej górnej części układ potencjometrów, służący do nastawiania macierzy współczynników rozwiązywanego układu równań. Licząc od góry, pierwsze siedem wierszy są to współczynniki a_{ik} ,



Rys. 3. Aparat ARAL

ostatni wiersz b_i . Pod każdym potencjometrem widoczny jest przełącznik służący do zmiany znaku. W dolnej części tego segmentu mieszczą się układy sumujące I i II . Lampy elektronowe tych układów widoczne są przez siatkę ekranującą. Następne dwa segmenty mają elementy podobnie rozmieszczone. A więc zaczynając od góry: widoczny najpierw jest układ wskaźników W , następnie potencjometry dostarczające napięcie x_k , wzmacniacze separatory WS , wzmacniacze wyjściowe WW i na koniec układ zasilający II , służący do zasilania wzmacniaczy wyjściowych.

Eksplotacja aparatu. Opiszemy przebieg rozwiązywania układu równań za pomocą aparatu ARAL.

Wstępną czynnością jest transformacja układu równań sprowadzająca jego współczynniki do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$. Osiąga się to dzieląc każde z równań przez odpowiednią liczbę. W przypadku jednak, gdy któraś z kolumn współczynników (współczynników przy jednej z niewiadomych) po tej transformacji składa się z liczb o wartościach bezwzględnych znacznie mniejszych od jedności, mnożymy je przez liczbę możliwie dużą, taką jednak, żeby pozostać w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. W tym przypadku niewiadome zmieniają się oczywiście w stosunku odwrotnym. Ta ostatnia transformacja ma na celu uniknięcie kłopotów, jakie związane są z rozwiązywaniem układu bliskiego nieoznaczoności (o małej wartości bezwzględnej wyznacznika).

Przejdźmy obecnie do właściwego procesu rozwiązywania. Najpierw ustawia się współczynniki układu równań za pomocą potencjometrów i przełączników widocznych w drugim segmencie od prawej strony u góry. Ustawianie to trwa około 15 minut. Następłą czynnością jest sukcesywne sprowadzanie do zera wychyleń wskaźników przez obracanie odpowiednich potencjometrów x_k . Wskaźniki są umieszczone na samej górze aparatu z lewej strony, a potencjometry, o których mowa, pod nimi.

Są teraz dwie możliwości: albo otrzymujemy przybliżone rozwiązanie, albo któryś z potencjometrów dochodzi do skrajnego położenia. W drugim przypadku zmniejszamy wyrazy wolne b_i w pewnym stosunku i powtarzamy wspomniane postępowanie, co trwa około 2 minut. Ewentualne zmniejszenie wyrazów wolnych zajmuje mniej więcej tyle samo czasu.

Liniowość rozwiązywanych równań pozwala na iteracyjne polepszenie rozwiązania. Możemy mianowicie za pomocą arytmetru obliczyć, jakie błędy ε_i popełniamy w poszczególnych równaniach przy rozwiązywaniu przybliżonym. Otrzymane błędy są, jak wspomniano, rzędu 0,01. Po pomnożeniu ich przez kilkadziesiąt wstawiamy odpowiednie wartości zamiast wyrazów wolnych b_i , otrzymując w ten sposób poprawki. Prze-

liczenie błędów na arytmetrze zajmuje około 20 minut. Warto przy tym zwrócić uwagę, że przy obliczaniu poprawek cała macierz współczynników a_{ik} pozostaje bez zmiany, a jedynie należy zmienić ustawienie potencjometrów b_i , co zajmuje stosunkowo niewiele czasu.

Zróbmy teraz bilans czasu:

ustawienie współczynników	15 min.
znalezienie przybliżenia I	2 min.
obliczenie błędów	20 min.
ustawienie nowych wyrazów wolnych	2 min.
znalezienie przybliżenia II	2 min.

A więc z zaokrągleniem w górę, otrzymanie pierwszego przybliżenia zajmuje około 20 minut, drugiego około 45. Oczywiście wymaga to pewnego obycia z aparatem. W związku ze wspomnianą możliwością zautomatyzowania ustawienia potencjometrów x_k nasuwa się krytyczna uwaga, że pozycja czasu, która mogłaby w ten sposób ulec częściowemu skróceniu, wynosi zaledwie po dwie minuty na każdy krok przybliżenia. O ile wiem, rozwiązanie układu 7 równań z 7 niewiadomymi metodą krakowianów przy użyciu arytmetru zajmuje bez mała cały dzień pracy.

W przypadku, gdy wyznacznik układu równań jest bliski zera, występują komplikacje.

Jakie objawy w zachowaniu aparatu wskazują, że układ równań jest bliski nieoznaczonego? Zauważmy najpierw, że w przypadku układu nieoznaczonego wektory, które stanowią wiersze czy kolumny macierzy a_{ik} , są liniowo zależne (w praktyce sprowadza się to najczęściej do przybliżonej liniowej zależności niewielkiej liczby kolumn albo wierszy). Teraz można przewidywać dwa charakterystyczne objawy, które rzeczywiście występują, a mianowicie:

1° W trakcie rozwiązywania układu równań wychylenia wskaźników zostają z początku zredukowane do poziomu dość bliskiego zera, ale następnie, przy dość dużych zmianach położenia potencjometrów odpowiadających niewiadomym, wychylenia te praktycznie się nie zmniejszają. W tym przypadku przyrosty x_k są proporcjonalne do współczynników liniowej zależności między kolumnami, zresztą z dość grubym przybliżeniem.

2° Po zredukowaniu do zera wychyleń wskaźników, błędy w poszczególnych równaniach (które za pośrednictwem odpowiednich napięć dają się uwidocznić na oscylografie) są dość duże, wyraźnie większe od 0,01. W tym przypadku błędy te są proporcjonalne w przybliżeniu do współczynników liniowej zależności między wierszami.

Objawy te mają istotne znaczenie, jeżeli postanowiliśmy rozwiązać za pomocą aparatu układ bliski nieoznaczonego. Można wtedy posłużyć

się transformacją układu równań, którą omówimy. Można by tu jeszcze postawić pytanie, jakie układy równań należy uważać za bliskie nieoznaczoności z punktu widzenia użycia aparatu. Odpowiedź na to pytanie miałyby małe znaczenie praktyczne, gdyż najprostszym i ostatecznym sprawdzeniem w każdym konkretnym przypadku jest zbadanie zachowania się aparatu przy tym układzie równań. Jeżeli chodzi o wartość wyznacznika, to jedynie z grubsza określa ona zachowanie się aparatu. Pewne doświadczenia wskazują, że trudności zaczynają występować przy wyznacznikach rzędu setnych części jedności.

Powiedzmy teraz dla przykładu, że pragniemy rozwiązać układ równań bliski nieoznaczonego, w którym pierwsze trzy kolumny współczynników są w przybliżeniu liniowo zależne. Dowiemy się o tym z zachowania się aparatu. Dobieramy teraz dwie liczby rzeczywiste r i s , takie żeby maksymalna wartość bezwzględna układu liczb

$$\bar{a}_{i1} = a_{i1} + ra_{i2} + sa_{i3}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

była jak najmniejsza. Wtedy zastępując pierwszą kolumnę współczynników przez układ liczb $\gamma\bar{a}_{i1}$, powiększamy γ -krotnie wyznacznik układu równań. Oznaczając rozwiązanie nowego układu równań przez \bar{x}_k^0 , otrzymujemy związki

$$x_1^0 = \gamma\bar{x}_1^0, \quad x_2^0 = \bar{x}_2^0 + rx_1^0, \quad x_3^0 = \bar{x}_3^0 + sx_1^0, \quad x_{k'}^0 = \bar{x}_{k'}^0, \quad (k' \geq 4),$$

wyznaczające rozwiązanie układu pierwotnego. W przypadku, gdy transformacja odnosi się do wierszy, a nie do kolumn, sprawa się upraszcza, gdyż nie trzeba później transformować niewiadomych, nie ulegają one bowiem zmianie.

W pewnym doświadczeniu rozwiązano układ równań, który po omawianym sprowadzeniu współczynników do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ miał wyznacznik równy około 0,0001. W tym przypadku parokrotnie trzeba było zastosować transformację powiększającą wyznacznik i rozwiązać otrzymany układ równań z odpowiednio większą dokładnością niż dokładność żądana od rozwiązania układu pierwotnego. Poza tym jednak nie napotkano innych komplikacji.

Prace cytowane

- [1] L. Łukaszewicz, *Elektronowy analizator równań różniczkowych „ABR” i niektóre jego zastosowania*, *Zastosowania Matematyki* 2 (1954), str. 83-98.
 [2] F. J. Murray, *The theory of mathematical machines*, New York 1947.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 9. 7. 1956

K. БОХЕНЕК (Варшава)

АНАЛИЗАТОР ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ARAL**РЕЗЮМЕ**

Построенный анализатор линейных алгебраических уравнений является полуавтоматическим электронным аппаратом. Автоматически производится преобразование системы уравнений, обеспечивающее сходимость метода Зайделя-Гаусса. Это преобразование линейно и имеет матрицу равную транспонированной матрице системы уравнений (4). Автоматически производится также суммирование левых сторон уравнений. Специальный указатель позволяет установить, когда это последнее выражение равно нулю. Установка значений неизвестных проводится от руки. Аппарат приспособлен к автоматизации при помощи сервомеханизмов также и этого процесса по принципу описанному Меррейем [2], но это не имеет существенного значения с точки зрения ускорения процесса отыскания решения. Наибольшее число неизвестных равно семи. Точность, определенная отношением наибольшей ошибки в уравнениях к максимальному значению неизвестных и коэффициентов, имеет порядок 1%. Точность можно улучшить итерационным процессом с применением арифмометра для вычисления ошибки, допущенной при последовательных решениях.

K. BOCHENEK (Warszawa)

THE ARAL ANALYSER OF LINEAR ALGEBRAICAL EQUATIONS**SUMMARY**

The analyser of linear algebraical equations which has been constructed is a semi-automatic electronic apparatus. It performs automatically the transformation of a system of equations ensuring the convergence of the Seidel-Gauss method. It is a linear transformation with a matrix that is inverted with respect to the matrix of the system of equations (4). The summing of the left sides of the equations is also performed automatically. A suitable index enables us to find out when the last expression is equal to zero. Setting the values of the unknowns is done by hand. The apparatus can be adapted to automatize this operation as well by the use of servomechanisms on the principle described by Murray [2], but this is of no real practical importance with regard to speeding up the total process of solution. The maximal number of unknowns is 7. The accuracy of the apparatus, defined by the ratio of the maximal error committed in the equations to the maximal value of the unknowns and the coefficients, is of order 1%. This accuracy can be increased by an iterative procedure with the use of an arithmometer, to find the error committed in the successive solutions.