ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIII (1970)

Über die Eindeutigkeitsbedingung von Krasnosel'skii-Kreĭn bei hyperbolischen Differentialgleichungen

von WOLFGANG WALTER (Karlsruhe)

1. Einleitung. Die klassischen Eindeutigkeitskriterien für das Anfangswertproblem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \quad \text{in } J := [0, T],\ y(0) = y_0$$

gehen aus von einer Abschätzung der Form

$$(2) \qquad |f(t, \bar{z}) - f(t, z)| \leqslant \omega(t, |\bar{z} - z|).$$

Im Jahre 1956 haben Krasnosel'skii und Kreĭn [2] eine neue Eindeutigkeitsbedingung in Form zweier Abschätzungen

$$(3) \qquad |f(t, \bar{z}) - f(t, z)| \leqslant \begin{cases} C|\bar{z} - z|^{a} & (C > 0,\ 0 < a < 1), \\ \dfrac{k}{t}|\bar{z} - z| & (k > 0) \end{cases}$$

gegeben: Ist

$$(3') \qquad k(1-a) < 1,$$

so folgt aus den beiden Abschätzungen (3) die Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem (1). Brauer [1] und andere Autoren haben diese Gedanken weiterverfolgt und dabei allgemeinere Eindeutigkeitsbedingungen der Form

$$(4) \qquad |f(t, y) - f(t, z)| \leqslant \begin{cases} \omega_1(t, |y - z|), \\ \omega_2(t, |y - z|) \end{cases}$$

angegeben. Es wurde außerdem gezeigt, daß aus dem Bestehen einer solchen Doppelabschätzung mit geeigneten Funktionen ω_1, ω_2 auch die Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximation folgt.

Der Verfasser hat in einer 1964 erschienen Arbeit [10] nachgewiesen, daß alle diese neuen Kriterien in Wahrheit Spezialfälle (nota bene: bisher nicht bekannte, neue Spezialfälle) klassischer Eindeutigkeitskriterien sind. Genauer soll das heißen: Die Abschätzung (4) ist, wenn man

$$\omega(t, z) := \min\{\omega_1(t, z), \omega_2(t, z)\}$$

definiert, identisch mit (2). Diese Funktion ω ist — das gilt sowohl für das Kriterium von Krasnosel'skii und Kreĭn (3) als auch für die erwähnten allgemeineren Kriterien von der Form (4) — ein Spezialfall etwa des wohlbekannten Eindeutigkeitskriteriums von Kamke.

Betrachten wir nun das Darboux-Problem (charakteristisches Anfangswertproblem) für hyperbolische Differentialgleichungen in zwei Variablen

$$u_{xy} = f(x, y, u) \text{ in } R: = [0, a] \times [0, b], \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \sigma(x) \text{ in } [0, a], \qquad u(0, y) = \tau(y) \text{ in } [0, b]$$

$(a, b > 0)$. Hier sind Eindeutigkeitsbedingungen von der folgenden, zu (2) analogen Form

$$|f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqslant \omega(x, y, |z - \bar{z}|) \tag{6}$$

ebenfalls wohlbekannt; vgl. etwa Walter [11], §§ 20, 21. Eine Eindeutigkeitsbedingung von der Art der Bedingung von Krasnosel'skii und Kreĭn wurde von Palczewski und Pawelski [6], [4] angegeben. Sie lautet

$$|f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqslant \begin{cases} C|z - \bar{z}|^\alpha & (C > 0, 0 < \alpha < 1), \\ \dfrac{k}{xy}|z - \bar{z}| & (k > 0). \end{cases} \tag{7}$$

In den zitierten Arbeiten wurde bewiesen, daß unter der Bedingung (7) mit

$$k(1 - \alpha)^2 < 1 \tag{7'}$$

für das Anfangswertproblem (5) sowohl Eindeutigkeit als auch Konvergenz des (in der üblichen Weise durch Übergang zur Integralgleichung gewonnenen) Verfahrens der sukzessiven Approximation herrscht. Weiter bewies Wong [12], daß dasselbe auch unter den allgemeineren Bedingungen

$$|f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C|z - \bar{z}|^\alpha}{(xy)^\beta} & (C > 0, 0 \leqslant \beta < \alpha < 1), \\ \dfrac{k|z - \bar{z}|}{xy} & (k > 0), \end{cases} \tag{8}$$

$$k(1 - \alpha)^2 < (1 - \beta)^2 \tag{8'}$$

richtig ist. Auf weitere Untersuchungen ähnlicher Art werden wir am Schluß der Arbeit eingehen.

In dieser Arbeit wird nachgewiesen, daß auch für hyperbolische Differentialgleichungen Doppelbedingungen, wie sie in (7) und (8) auftreten, Spezialfälle (auch hier wieder: neue Spezialfälle) bekannter Bedingungen von der Form (6) sind. Es liegen demnach dieselben Verhältnisse wie beim eingangs geschilderten eindimensionalen Fall vor. Dies betrifft die Tatsache, nicht jedoch die Beweise. Die vom Verfasser in [10] benutzten Beweisschritte machen wesentlich von spezifischen Eigenschaften gewöhnlicher Differentialgleichungen Gebrauch und lassen sich nicht auf hyperbolische Differentialgleichungen übertragen. Das hier verwandte Beweisverfahren lehnt sich dagegen an die äquivalente Integralgleichung an; es ist ohne Schwierigkeit auch für höherdimensionale Probleme anwendbar.

2. Zurückführung auf bekannte Eindeutigkeitsbedingungen. Es sei B ein reeller Banachraum mit der Norm $|\cdot|$ und R das Rechteck $[0, a]\times\times[0, b]$ $(a, b > 0)$. Die Funktionen $g(x, y)$ und $k(x, y, \zeta, \eta, z)$ seien in R bzw. in der durch $0 \leqslant \zeta \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant b$, $z \in B$ abgegrenzten Punktmenge stetig mit Werten in B.

Über die Integralgleichung

$$u(x, y) = g(x, y) + \int_0^x \int_0^y k\big(x, y, \zeta, \eta, u(\zeta, \eta)\big)\, d\zeta\, d\eta \tag{9}$$

besteht der folgende

Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Die Funktionen g und k mögen den genannten Voraussetzungen genügen; k sei außerdem beschränkt und genüge einer Abschätzung

$$|k(x, y, \zeta, \eta, z) - k(x, y, \zeta, \eta, \bar{z})| \leqslant \omega(\zeta, \eta, |z - \bar{z}|) \tag{10}$$

mit $\omega \in \mathscr{G}$. Dann hat die Integralgleichung (9) genau eine stetige Lösung u, und die durch sukzessive Approximation, ausgehend von einer beliebigen stetigen Anfangsnäherung u_0, gewonnene Folge (u_n) konvergiert gleichmäßig in R gegen u.

Dabei ist $\mathscr{G}$ die Klasse der reellwertigen Funktionen $\omega(x, y, z)$ mit den Eigenschaften

(a) ω ist in $(0, a]\times(0, b]\times[0, \infty)$ stetig sowie monoton wachsend in z;

(b) $\omega(x, y, 0) = 0$;

(c) die Integralgleichung

$$\sigma = \Omega\sigma \text{ mit } (\Omega\sigma)(x, y) = \int_0^x \int_0^y \omega\big(\zeta, \eta, \sigma(\zeta, \eta)\big)\, d\zeta\, d\eta \tag{11}$$

besitzt nur eine in R stetige, nichtnegative Lösung, nämlich die Funktion $\sigma \equiv 0$;

(d) zu jeder Konstante C gibt es eine in R stetige Funktion ϱ mit den Eigenschaften $\varrho \geqslant \Omega\varrho$ und $\varrho \geqslant C$ in R.

Die Bedingung (d) stellt in Wirklichkeit keine Einschränkung dar, denn wegen $|k| \leqslant M$ kann man in (10) ω durch die Funktion $\omega^*(x, y, z) = \min(\omega(x, y, z), 2M)$ ersetzen, welche die Eigenschaft (d) sowie die übrigen Eigenschaften von ω besitzt.

Dieser Satz ist ein Sonderfall eines vom Verfasser [9] bewiesenen Satzes über Volterra-Integralgleichungen in mehreren Variablen. Die Klasse $\mathscr{G}$ entspricht der in [9], S. 23, definierten Klasse $\mathscr{G}^n$ für $n = 1$, $m = 2$, mit dem Unterschied, daß dort — anstelle der Bedingung (d) — Beschränktheit von ω gefordert wird. Man sieht sofort, daß der dortige Beweis auch unter den jetzigen Voraussetzungen funktioniert. Es sei darauf hingewiesen, daß der oben formulierte, auf die Integralgleichung (9) bezogene Satz auch unter "Carathéodory-Voraussetzungen" gültig bleibt. In dieser Form ist er in [9] bewiesen.

Das wesentliche Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz. *Die Funktion*

$$\omega(x, y, z) = \min\left\{\frac{Cz^\alpha}{x^\beta y^\gamma}, \frac{kz}{xy}\right\} \tag{12}$$

ist, wenn die auftretenden Konstanten den Ungleichungen $C, k > 0, 0 \leqslant \beta, \gamma < 1, 0 < \alpha < 1$ *sowie*

$$k(1-\alpha)^2 < (1-\beta)(1-\gamma) \tag{12'}$$

genügen aus der Klasse $\mathscr{G}$.

Beweis. Offenbar hat ω die Eigenschaften (a) und (b). Zum Beweis von (c) und (d) führen wir die Abkürzungen

$$\omega_1(x, y, z) = \frac{Cz^\alpha}{x^\beta y^\gamma}, \qquad \omega_2(x, y, z) = \frac{kz}{xy},$$

$$(\Omega_i\varphi)(x, y) = \int_0^x \int_0^y \omega_i(\zeta, \eta, \varphi(\zeta, \eta))\, d\zeta\, d\eta \qquad (i = 1, 2)$$

ein; Ω sei der in (11) definierte Operator, wobei ω durch (12) gegeben ist.

Für $A > 0$ ist

$$\Omega(Ae^x) \leqslant \Omega_1(Ae^x) \leqslant CA^\alpha e^{\alpha x} \int_0^x \int_0^y \frac{d\xi\, d\eta}{\xi^\beta \eta^\gamma} \leqslant CA^\alpha \frac{a^{1-\beta} b^{1-\gamma}}{(1-\beta)(1-\gamma)} e^{\alpha x},$$

also $\Omega(Ae^x) \leqslant Ae^x$ für große A. Damit ist (d) nachgewiesen.

Zum Beweis von (c) betrachten wir eine Lösung σ der Gleichung $\sigma = \Omega\sigma$ und eine stetige Funktion ϱ_0 mit $\sigma \leqslant \varrho_0$. Offenbar ist dann $\Omega\sigma \leqslant \Omega_1\sigma \leqslant \Omega_1\varrho_0$, also $\sigma \leqslant \Omega_1\varrho_0$.

Definiert man die Folge (ϱ_n) durch $\varrho_{n+1} = \Omega_1\varrho_n$ $(n \geqslant 0)$, so erhält man durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses die Ungleichungen $\sigma \leqslant \varrho_n$ in R für $n \geqslant 1$.

Eine einfache Rechnung ergibt, wenn man $\varrho_0 = A_0$ konstant wählt,

$$\varrho_n(x, y) = A_n x^{(1-\beta)a_n} y^{(1-\gamma)a_n}$$

mit

$$a_{n+1} = \alpha a_n + 1 \quad (n \geqslant 0), \quad a_0 = 0, \quad A_{n+1} = \frac{CA_n^\alpha}{(1-\beta)(1-\gamma)a_{n+1}^2}.$$

Also ist $\lim a_n = (1-\alpha)^{-1}$ und damit wegen (12')

$$A_{n+1} \leqslant \frac{C}{k} A_n^\alpha$$

ür große n, d.h. $A_n \leqslant B$ für alle n bei geeignetem B.

Insgesamt folgt

$$\sigma \leqslant \limsup_{n\to\infty} \varrho_n \leqslant B x^a y^b \quad \text{mit } a = \frac{1-\beta}{1-\alpha}, \; b = \frac{1-\gamma}{1-\alpha}.$$

Wir führen jetzt eine analoge Abschätzung mit dem Operator Ω_2 durch. Es ist

$$\Omega_2(x^a y^b) = \frac{k}{ab} x^a y^b.$$

Definiert man die Folge (σ_n) durch

$$\sigma_0 = B x^a y^b \quad \text{mit } a = \frac{1-\beta}{1-\alpha}, \; b = \frac{1-\gamma}{1-\alpha}, \; \sigma_{n+1} = \Omega_2\sigma_n,$$

so folgt

$$\sigma_n(s) = Bq^n x^a y^b \quad \text{mit } q = k\frac{1-\alpha}{1-\beta}\,\frac{1-\alpha}{1-\gamma}.$$

Nach Voraussetzung ist $q < 1$. Durch dieselbe Überlegung wie oben erhält man also

$$\sigma \leqslant \limsup \sigma_n = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß $\sigma = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $\sigma = \Omega\sigma$ und $\omega \in \mathcal{G}$ ist.

3. Bemerkungen. Aus dem eben bewiesenen Satz ergibt sich im Zusammenwirken mit dem zitierten Existenz- und Eindeutigkeitssatz, daß die beiden Abschätzungen

$$|k(x, y, \zeta, \eta, z) - k(x, y, \zeta, \eta, \bar{z})| \leqslant \begin{cases} C|z-\bar{z}|^\alpha/\zeta^\beta\eta^\gamma, \\ k|z-\bar{z}|/\zeta\eta \end{cases}$$

unter den angegebenen Einschränkungen hinreichend für die Eindeutigkeit und für die Konvergenz der sukzessiven Approximationen sind.

Diese Bedingung geht für $\beta = \gamma = 0$ in die Bedingung von Palczewski und Pawelski [6], [4], für $0 \leqslant \beta = \gamma < \alpha$ in die Bedingung von Wong [12], Theorem 3 und [13], Theorem 1, über.

Wong gibt in [12], Theorem 4 und [13], Theorem 2, eine verallgemeinerte Nagumo-Perron-van-Kampen-Bedingung

$$|f(x, y, z)| \leqslant A(xy)^p, \quad p > -1,$$

$$|f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqslant \frac{C|z-\bar{z}|^q}{(xy)^r}, \quad q \geqslant 1$$

mit

$$q(1+p) - r = p, \quad \varrho = \frac{C(2A)^{q-1}}{(p+1)^q} < 1$$

an. Es sei bemerkt, daß hier nur der Fall $q = 1$ interessant ist, da sich für $q > 1$ die Gleichung $\partial f/\partial z \equiv 0$ ergibt. In dieser Bedingung ist also $q = r = 1$. Es ist dann $\varrho < 1$ identisch mit $C < p+1$. Es muß aber wohl $C < (p+1)^2$ heißen (in der Gleichung (14) auf S. 333 in der Arbeit von Wong steht im Nenner $p+1$, was wohl $(p+1)^2$ lauten muß). In dieser Form ist die Bedingung in der Klasse $\mathscr{G}$ enthalten:

$$\min\left\{\frac{Cz}{xy}, B(xy)^p\right\} \in \mathscr{G} \quad \text{für } C < (p+1)^2, p > -1, B > 0.$$

Der Beweis ist sehr einfach. Zunächst folgt aus $\sigma = \Omega\sigma$ und $\omega \leqslant B(xy)^p$

$$\sigma \leqslant \sigma_0 \quad \text{mit } \sigma_0 = \frac{B}{(p+1)^2}(xy)^{p+1}.$$

Ist $\omega_1 = Cz/xy$ und Ω_1 der entsprechende Integraloperator, so folgt

$$\sigma_1 = \Omega_1\sigma_0 = q\sigma_0 \quad \text{mit } q = \frac{C}{(p+1)^2} < 1.$$

Daraus folgt genau wie beim früheren Beweis $\sigma \leqslant \lim q^n \sigma_0 = 0$.

Es sei erwähnt, daß man auch die (zweidimensionale) Nagumo-Bedingung

$$(13) \qquad |f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqslant \frac{|z-\bar{z}|}{xy}$$

auf die Klasse $\mathscr{G}$ zurückführen kann, und zwar in folgendem Sinne: Genügt die stetige Funktion f der Nagumo-Bedingung (13), so ist die Funktion

$$\omega(x, y, z) = \sup\{|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| : \ |z_1 - z_2| \leqslant z, |z_1| + |z_2| \leqslant M\}$$

aus der Klasse $\mathscr{G}$ für jedes $M > 0$. Im eindimensionalen Fall, d.h für gewöhnliche Differentialgleichungen, wurde das zuerst von Olech [3] gezeigt; vgl. auch Walter [10], Satz 4 (B). Daß die Nagumo-Bedingung (13) eine Eindeutigkeitsbedingung für das Problem (5) ist, hat der Verfasser 1959 in der Arbeit [7], Satz 5, bewiesen. Da sie zur Klasse $\mathscr{G}$ gehört, ist auch die Konvergenzfrage beim Verfahren der sukzessiven Approximation positiv beantwortet. Ein direkter Beweis der zuletzt genannten Tatsache wurde von Wong [12], Theorem 5, gegeben.

In der Arbeit [5] hat Palczewski ein allgemeineres Darboux-Problem für die Integro-Differentialgleichung

$$u_{xy} = f\left(x, y, u, u_x, u_y, \int_0^x \int_0^y g\big(x, y, s, t, u(s, t), u_s(s, t), u_t(s, t)\big) ds\, dt\right)$$

behandelt und bei der Untersuchung von Eindeutigkeit und Konvergenz der sukzessiven Approximation ebenfalls Doppel-Ungleichungen zugrundegelegt. Ausgangspunkt sind dabei Eindeutigkeitskriterien für gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form (4), wie sie von Brauer [1] in Verallgemeinerung der Krasnosel'skii-Kreĭn-Bedingung angegeben wurden. Diese Bedingungen ordnen sich, wie in der Einleitung erwähnt, den Eindeutigkeitsbedingungen der Form (2) unter; vgl. Walter [10], Satz 4 (C) und (C*). Entsprechendes gilt dann auch für die daraus abgeleiteten Bedingungen für den zweidimensionalen Fall, d.h. für die Bedingungen (6_f) und (6_g) von [5]. Das bedeutet also, daß man diese Doppelabschätzungen durch die üblichen Abschätzungen ersetzen kann.

Auf einen Punkt sei in diesem Zusammenhang noch hingewiesen. Bei der Übertragung von Eindeutigkeitskriterien für gewöhnliche Differentialgleichungen auf hyperbolische Differentialgleichungen besteht der folgende Sachverhalt (wobei wir Einzelheiten unterdrücken): Ist $\overline{\omega}(t, z)$ eine Eindeutigkeitsbedingung für gewöhnliche Differentialgleichungen, so ist $\omega(x, y, z) = \overline{\omega}(x \cdot y, z)$ eine Eindeutigkeitsbedingung für hyperbolische Differentialgleichungen; vgl. Walter [8], Beispiel 4. Wendet man dieses Prinzip auf die Krasnosel'skii-Kreĭn-Bedingung (3) an, so erhält man die entsprechende Bedingung (7), jedoch mit der Einschränkung $k(1-a) < 1$, während in (7') sogar $k(1-a)^2 < 1$ zugelassen ist. Im wesentlichen war es dieser Tatbestand, der den neuen, von der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen unabhängigen Beweis des Satzes von Nr. 2 notwendig gemacht hat. Vgl. dazu auch den Schluß von Nr. 2 in der Arbeit von Palczewski [5].

Literaturverzeichnis

[1] F. Brauer, *Some results on uniqueness and successive approximations*, Canadian J. Math. 11 (1959), S. 527-533.

[2] M. A. Krasnosel'skii and S. G. Kreĭn, *On a class of uniqueness theorems for the equation $y' = f(x, y)$*, Uspehi Mat. Nauk (N. S.) 11 (1956), S. 209-213.

[3] C. Olech, *Remarks concerning criteria for uniqueness of solutions of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 8 (1960), S. 661-666.

[4] B. Palczewski, *On the uniqueness of solutions and the convergence of successive approximations in the Darboux problem under the conditions of the Krasnosel'skii and Krein type*, Ann. Polon. Math. 14 (1963-1964), S. 183-190.

[5] — *On uniqueness and successive approximations in the Darboux problem for the equation* $u_{xy} = f\left(x, y, u, u_x, u_y, \int_0^x \int_0^y g(x, y, s, t, u(s, t), u_s(s, t), u_t(s, t))\,ds\,dt\right)$, ibidem 17 (1965), S. 1-11.

[6] — and W. Pawelski, *Some remarks on the uniqueness of solutions of the Darboux problem with conditions of the Krasnosel'skii-Krein type*, ibidem 14 (1963-1964), S. 97-100.

[7] W. Walter, *Über die Differentialgleichung* $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$, Math. Z. 71, S. 308-324.

[8] — *Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen*, ibidem 74 (1960), S. 191-208.

[9] — *Über sukzessive Approximation bei Volterra-Integralgleichungen in mehreren Veränderlichen*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 1, 345 (1965), S. 1-32.

[10] — *Bemerkungen zu verschiedenen Eindeutigkeitskriterien für gewöhnliche Differentialgleichungen*, Math. Z. 84 (1964), S. 222-227.

[11] — *Differential- und Integral-Ungleichungen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1964.

[12] J. S. W. Wong, *On the convergence of successive approximations in the Darboux problem*, Ann. Polon. Math. 17 (1966), S. 329-336.

[13] — *Remarks on the uniqueness theorem of solutions of the Darboux problem*, Canadian Math. Bull. 8 (1965), S. 791-796.

Reçu par la Rédaction le 3. 1. 1969