ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

L'extension d'une équation fonctionnelle de D. Pompeiu à l'aide d'une formule de dérivation numérique *

par D. V. IONESCU (Cluj)

1. On peut étendre l'équation fonctionnelle de Pompeiu [2]

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) \tag{1}$$

de manière convenable, à l'aide d'une formule de dérivation numérique. Remarquons qu'on peut écrire l'équation (1) sous la forme

$$[x_0, x_1; f] = f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) \tag{2}$$

et considérons la différence divisée

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] \tag{3}$$

de la fonction $f \in C^n[a, b]$ sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ où $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$.

Tchakaloff [3] a donné la représentation de la différence divisée (3) par une intégrale définie

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) f^{(n)}(s)\, ds \tag{4}$$

et nous avons retrouvé cette formule en déterminant la fonction φ par un problème aux limites [1]. Nous avons démontré que la fonction φ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n) et que

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(s)\, ds = 1/n!\,. \tag{5}$$

2. Cela étant rappelé, considérons l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) g(s)\, ds \tag{6}$$

---

* Communication au Colloque sur les équations fonctionnelles de Zakopane 9-13 Octobre 1967.

avec le poids $\varphi(s)$ de la formule (4) et la fonction $g \in C^1[x_0, x_n]$. En prenant un noeud $x \in (x_0, x_n)$, nous avons la formule de quadrature

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) g(s) ds = \frac{g(x)}{n!} - \int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) g'(s) ds , \tag{7}$$

où pour le noeud donné x, le noyau $\psi(x, s)$ coïncide sur les intervalles $[x_0, x]$, $[x, x_n]$, avec les fonctions

$$\psi_1(x, s) = \int_{x_0}^{s} \varphi(t) dt , \qquad \psi_2(x, s) = \int_{x_n}^{s} \varphi(t) dt .$$

Ce noyau a le point $s = x$, pour point de discontinuité et l'on a

$$\psi_1(x, x) - \psi_2(x, x) = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) ds = \frac{1}{n!};$$

la fonction $\psi_1(x, s)$ est négative sur l'intervalle $(x_0, x]$ et la fonction $\psi_2(x, s)$ est positive sur l'intervalle $[x, x_n)$.

3. Si l'on suppose que $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$ et si dans la formule (7) on remplace la fonction g, par $f^{(n)}$, nous aurons d'après la formale (4), une formule de dérivation numérique

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(n)}{n!} - \int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) f^{(n+1)}(s) ds . \tag{8}$$

Cette formule a la degré d'exactitude, au moins égal à n, car si l'on remplace la fonction f par $1, x, \ldots, x^n$ le reste est nul. Le degré d'exactitude de la formule (8), dépend de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) ds .$$

Si l'on remplaçe dans la formule (8) la fonction $f(s)$ par

$$(s - x_0)(s - x_1) \ldots (s - x_n) = s^{n+1} - (x_0 + x_1 + \ldots + x_n) s^n + \ldots$$

on en déduit que

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) = \frac{1}{n!} \left(x - \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1} \right) . \tag{9}$$

Donc si

$$x \neq \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1},$$

la formule de dérivation numérique (8), *a le degré d'exactitude égal à* n.

Mais si

$$x = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1},$$

alors dans la formule de dérivation numérique (8), le reste R est nul aussi lorsque la fonction f est remplacée par x^{n+1}. Nous dirons que le noeud

$$\xi = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$$

est un noeud exceptionnel et que la formule de dérivation numérique (8), correspondante, est une *formule exceptionnelle.*

Nous détérminerons le reste de la formule exceptionnelle

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + R \tag{10}$$

en supposant que $f \in C^{n+2}[x_0, x_n]$.

Posons pour abréger l'écriture $f^{(n)}(s) = g(s)$ et considérons de nouveau la formule de quadrature (7), pour $x = \xi$. On démontre que dans ce cas on la formule de quadrature

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) g(s) ds = \frac{g(\xi)}{n!} + \int_{x_0}^{x_n} \psi(s) g''(s) ds \tag{11}$$

où la fonction $\psi(s)$ coïncide sur les intervalles $[x_0, \xi]$, $[\xi, x_n]$ avec les fonctions

$$\psi_1(s) = \int_{x_0}^{s} (s-t)\varphi(t) dt, \quad \psi_2(s) = \int_{x_n}^{s} (s-t)\varphi(t) dt. \tag{12}$$

En remplaçant dans la formule (11), la fonction $g(s)$ par $f^{(n)}(s)$, et en tenant compte de la formule (4), nous sommes conduits à la formule exceptionnelle de dérivation numérique

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + \int_{x_0}^{x_n} \psi(s) f^{(n+2)}(s) ds. \tag{13}$$

On démontre que la fonction $\psi(s)$ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n), d'où il résulte que la *formule de dérivation numérique* (13), *a le degré d'exactitude égal à* $n+1$.

4. Cela étant, considérons l'équation fonctionnelle

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}\right) \tag{14}$$

qui est une extension de l'équation fonctionnelle de D. Pompeiu; pour $n = 1$, cette équation se réduit bien à l'équation (2).

Il est évident que *l'équation* (14) *est vérifiée par tout polynome de degré* $n+1$, quels que soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ où $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, puisque la formule de dérivation numérique (13) a le degré d'exactitude égal à $n+1$.

Inversement, *toute solution* $f \in C^{n+2}[x_0, x_n]$ *de l'équation fonctionnelle* (14), *quels que soient les noeuds* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *tels que* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ *est un polynome quelconque de degré* $n+1$.

En effet en remplaçant dans la formule de dérivation numérique la fonction f par la solution f de l'équation fonctionnelle on doit avoir

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(s) f^{(n+2)}(s)\, ds = 0$$

et la fonction $\psi(s)$ étant positive sur l'intervalle (x_0, x_n) quels que soient x_0, x_n, il résulte que $f^{(n+2)}(s) = 0$, ce qui veut dire que f est un polynome quelconque de degré $n+1$. Ainsi la solution f in plus générale de l'équation fonctionnelle (14) telle que $f \in C^{n+2}[x_0, x_n]$, quels que soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ est un polynome de degré $n+1$.

Travaux cités

[1] D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Editura Tehnica, Bucuresti 1957.

[2] D. Pompeiu, *Sur une équation fonctionnelle*, C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris, Tome 190 (1930), p. 1107.

[3] L. Tchakaloff, *Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendung*, Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936.

Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1968