ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIX (1988)

Endomorphismes de l'espace des germes de fonctions holomorphes en un point et opérateurs différentiels d'ordre infini

par RYUICHI ISHIMURA (Chiba, Japon)

Abstract. In the present paper, we prove that every continuous linear endomorphism of the space of germs of holomorphic functions at a point is characterized by a differential operator of infinite order which is not necessarily a local operator.

Introduction. Dans l'article précédent [2], on a introduit les opérateurs différentiels d'ordre infini non locaux et on a étudié la relation avec les endomorphismes continus de l'espace $\mathcal{O}_0$ des germes de fonctions holomorphes en l'origine 0 de $\boldsymbol{C}^n$. Dans présent article, on se propose de compléter ces résultats en établissant un théorème qui donne l'équivalence de deux notions.

1. Notations et rappels des résultats précédents. Dans cet article on suit aux notations de l'article précédent [2]. Soit $\mathcal{O}_0$ la fibre des germes de fonctions holomorphes dans un voisinage de l'origine 0 de $\boldsymbol{C}^n$. $\mathcal{O}_0$ est un espace (DFS) munissant d'une topologie canonique. On désigne par $\mathcal{O}(U)$ l'espace de Fréchet des fonctions holomorphes sur U pour U ouvert de $\boldsymbol{C}^n$ et par $\Delta(r)$ le polydisque $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n \mid |x_1| < r_1, |x_2| < r_2, \ldots, |x_n| < r_n\}$ pour $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \boldsymbol{R}_+^n$ où $\boldsymbol{R}_+ = \{r \in \boldsymbol{R} \mid r > 0\}$. On introduit l'espace de Banach

$$H_r^\infty = \{f \in \mathcal{O}(\Delta(r)) \mid \|f\|_r < \infty\}$$

avec la norme $\|f\|_r = \sup_{x \in \Delta(r)} |f(x)|$. On désigne pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n$ par $|x|$ le vecteur $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ et posons $l = (1, 1, \ldots, 1)$. Pour $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ et $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ on écrit $r \ll s$ lorsqu'on a $r_1 < s_1$, $r_2 < s_2, \ldots, r_n < s_n$, tendis que on écrit $r \leqslant s$ ou $r < s$ au sens de l'ordre produit. Pour tous $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in \boldsymbol{C}^n$, on pose

$$\xi \cdot \eta = (\xi_1 \cdot \eta_1, \xi_1 \cdot \eta_2, \ldots, \xi_n \cdot \eta_n).$$

Donc on pose aussi $\xi^{-1} = (\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \ldots, \xi_n^{-1})$. On pose

$$|\xi| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_n|^2}, \quad |\vec{\xi}| = (|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|).$$

Dans cet article on désigne par P: $\mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ une application linéaire continue et on pose pour tout $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \boldsymbol{Z}_+^n$

(1) $$b_\mu(x) := (\mu!)^{-1} P(x^\mu) \in \mathcal{O}_0.$$

On peut supposer que $b_\mu \in \mathcal{O}(\Delta(s_0))$ avec $s_0 \gg 0$. On definit deux fonctions holomorphes en $(x, \xi) \in \Delta(s_0) \times \boldsymbol{C}^n$:

(2) $$Q(x, \xi) := \sum b_\mu(x) \xi^\mu,$$

(3) $$P(x, \xi) := Q(x, \xi) \exp(-\langle x, \xi \rangle),$$

et développons P en ξ:

$$P(x, \xi) = \sum a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Rappelons un des théorèmes principaux de [2].

Théorème 0. *Supposons que pour tout* $x \in \Delta(s_0)$, *la fonction entière* $Q(x, \xi)$ *ait une catégorie associée* $\leqslant (l, \sigma(x))$ *avec* $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots$ $\ldots, \sigma_n(x))$ *où chaque* $\sigma_j(x)$ *est semi-continu supérieurement en* x. *Alors pour tout* $r \gg 0$, P: $\mathcal{O}(\Delta(r)) \to \mathcal{O}(\{x \in \Delta(s_0) | \ \sigma(x) \ll r\})$ *est continu et de la forme d'un opérateur différentiel* $P(x, D_x) = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha$ *comme un opérateur*: $\mathcal{O}(\Delta(r)) \to \mathcal{O}(\{x \in \Delta(s_0) | \ \sigma(x) + 2|x| \ll r\})$ *pour tout* $r \gg 0$.

2. Caractérisation de P: $\mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$. Désignons par $B(\varrho)$ le boule à centre 0 et de rayon ϱ dans $\boldsymbol{C}^n$ pour tout $\varrho \in \boldsymbol{R}_+$. Posons pour tout $x \in \boldsymbol{C}^n$ assez petit

(4) $$\omega(x) = \limsup \sqrt[|\mu|]{|P(x^\mu)|}.$$

D'après le lemme 2 de [2] et de (3), on sait déjà que $0 \leqslant \omega(x) < +\infty$.

Proposition. $Q(x, \xi)$ *est de* $B(1)$-*type exponentiel* $\leqslant \sqrt{n}\, \omega(x)$, *et* $= \omega(x)$ *lorsque* $n = 1$.

Démonstration. Par définition de (4), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M = M_{x,\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $|\mu| \geqslant M$, on ait

$$|b_\mu(x)|\, \mu! = |P(x^\mu)| \leqslant (\varepsilon + \omega(x))^{|\mu|}.$$

Par suite, il existe $C = C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\xi \in \boldsymbol{C}^n$ on ait

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_\mu b_\mu(x) \xi^\mu\Big| &\leqslant \sum_{|\mu| < M} |b_\mu(x) \xi^\mu| + \sum_{|\mu| \geqslant M} |b_\mu(x) \xi^\mu| \\
&\leqslant \sum_{|\mu| < M} |b_\mu(x)|\, |\vec{\xi}|^\mu + \sum_\mu (\varepsilon + \omega(x))^{|\mu|} |\vec{\xi}|^\mu (\mu!)^{-1} \\
&= \sum_{|\mu| < M} |b_\mu(x)|\, |\vec{\xi}|^\mu + \exp\big((\varepsilon + \omega(x))(|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|)\big) \\
&\leqslant C \exp\big((\varepsilon + \omega(x))(|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|)\big) \\
&\leqslant C \exp\big(\sqrt{n}(\varepsilon + \omega(x))|\xi|\big).
\end{aligned}$$

Si $n = 1$, réciproquement en supposant que pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in C^n$ assez petit il existe $C > 0$ tel que l'on ait

$$|Q(x, \xi)| \leqslant C_\varepsilon e^{(\varepsilon + \sigma(x))|\xi|},$$

c'est-à-dire que $Q(x, \cdot)$ est de type exponentiel $\sigma(x)$. Donc on a pout tout $R > 0$

$$|b_\mu(x)| \leqslant \sup_{|\xi| = R} |Q(x, \xi)| R^{-\mu} \leqslant Ce^{(\varepsilon + \sigma(x))R} R^{-\mu}.$$

En prenant $R = \mu/(\varepsilon + \sigma(x))$, d'après la formule de Stirling on a avec $B_\varepsilon > 0$

$$|b_\mu(x)| \mu! \leqslant C_\varepsilon (\mu!)^{-1} \mu^\mu e^\mu (\varepsilon + \sigma(x))^\mu \leqslant B_\varepsilon (\varepsilon + \sigma(x))^\mu,$$

d'où on a

$$\omega(x) = \limsup \sqrt[\mu]{|b_\mu(x)| \mu!} \leqslant \varepsilon + \sigma(x).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\omega(x) \leqslant \sigma(x).$$

Rappelons une estimation sur $(b_\mu(x))$ (démonstration du lemme 2 de [2]): pour tout $r \gg 0$, il existe $s(r) \gg 0$ tel que

$$\|b_\mu\|_{s(r)} \leqslant C_r (\mu!)^{-1} r^{|\mu|}. \tag{5}$$

Donc pour tout $x \in \Delta(s(r))$, on a pour tout $\xi \in C^n$ avec $|\vec{\xi}| \ll r^{-1}$

$$\sum |b_\mu(x) \xi^\mu \mu!| \leqslant \sum \|b_\mu\|_{s(r)} |\vec{\xi}|^\mu \mu! \leqslant C_r \sum (r |\vec{\xi}|)^\mu < +\infty,$$

par conséquent on a $\sum b_\mu(x) \xi^\mu \mu! \in \mathcal{O}(\Delta(s(r)) \times \Delta(r^{-1}))$. Par suite pour tout $x \in \Delta(s(r))$, on a pour tout $R \ll r^{-1}$

$$|b_\mu(x)| \mu! \leqslant \sup_{|\vec{\xi}| = R} \Big|\sum_\lambda b_\lambda(x) \xi^\lambda \lambda!\Big| R^{-\mu},$$

donc si $R_1 \ll R$, on a

$$\sum |b_\mu(x)| \mu! R_1^\mu \leqslant \sup_{|\vec{\xi}| = R} \Big|\sum_\lambda b_\lambda(x) \xi^\lambda \lambda!\Big| \sum_\mu (R_1 R^{-1})^\mu \tag{6}$$
$$= (1 - R^{-1} R_1)^{-l} \sup_{|\vec{\xi}| = R} \Big|\sum b_\lambda(x) \xi^\lambda \lambda!\Big|.$$

On montre le lemme clef suivant:

LEMME. *$\omega(x)$ tends vers 0 lorsque x tends vers 0.*

Démonstration. Si $\omega(x)$ ne tendrait pas vers 0 quand x l'est, il existe une suite $(x_k)_{k \in N} \subset C^n$ tendant vers 0 tel qu'il existe $\delta > 0$ on ait

$$\omega(x_k) > \delta > 0 \quad \text{(pour tout } k).$$

Alors on a

$$\delta < \omega(x_k) = \limsup \sqrt[|\mu|]{|b_\mu(x_k)| \mu!},$$

et il existe donc une suite $(\mu(k))_{k\in N} \subset Z_+^n$ tendant vers $+\infty$ tel que

$$\delta^{|\mu(k)|} \leqslant \mu(k)!\,|b_{\mu(k)}(x_k)|. \tag{7}$$

Prenons $R_1 \gg \vec{\delta}^{-1} = (\delta^{-1}, \delta^{-1}, \dots, \delta^{-1})$, $R \gg R_1$ et $r \ll R^{-1}$. N'oublions pas alors que $r^{-1} \gg R \gg R_1$ $(\gg \delta^{-1})$. Pour $\xi \in C^n$ tel que $|\vec{\xi}| = R$, posons $f_\xi(x) := \sum_\mu (\xi \cdot x)^\mu \in \mathcal{O}(\Delta(R^{-1}))$. Alors puisque $r \ll R^{-1}$, on a $f_\xi \in H_r^\infty$ et par suite on a $Pf_\xi \in H_{s(r)}^\infty$. Pour tout $x \in \Delta(s(r))$, on a en notant que $r^{-1} \gg R$ d'après (6)

$$\begin{aligned}\sup_{|\xi|=R} |Pf_\xi(x)| &= \sup_{|\xi|=R} \left|\sum b_\mu(x)\, D_x^\mu f(0)\right| \\ &= \sup_{|\xi|=R} \left|\sum b_\mu(x)\, \xi^\mu \mu!\right| \\ &\geqslant (1-R^{-1}R_1)^l \sum |b_\mu(x)|\, \mu!\, R_1^\mu.\end{aligned}$$

Il existe $k_r \in Z_+$ tel que l'on ait pour tout $k \geqslant k_r$, on a $x_k \in \Delta(s(r))$. On a alors d'après (7) pour tout k

$$\begin{aligned}\sup_{|\xi|=R} |Pf_\xi(x_k)| &\geqslant (1-R_1R^{-1})^l \sum_k |b_{\mu(k)}(x_k)|\, \mu(k)!\, R_1^{\mu(k)} \\ &\geqslant (1-R_1R^{-1})^l \sum_k \vec{\delta}^{\mu(k)} R_1^{\mu(k)} \\ &= (1-R_1R^{-1})^l \sum_k (\vec{\delta} R_1)^{\mu(k)},\end{aligned}$$

et puisque $R_1\vec{\delta} \gg 1$, ce dérnier est égale à $+\infty$. Par contre pour tout $r \ll R^{-1}$ et tout $x \in \Delta(s(r))$, d'après l'inégalité (5), on a

$$\sum |b_\mu(x)|\, R^\mu \mu! \leqslant \sum \|b_\mu\|_{s(r)} R^\mu \mu! \leqslant C_r \sum (rR)^\mu < +\infty,$$

car $rR \ll 1$. En particulier on a $\sup_{|\xi|=R} |Pf_\xi(x_k)| < +\infty$ pour tout x_k tel que $x_k \in \Delta(s(r))$, ce qui contredit à ce qu'on vient de montrer.

Enfin on a le théorème suivant qui est plus précis que le théorème 0:

THÉORÈME 1. *Pour que P soit une application linéaire continue de $\mathcal{O}_0$ dans $\mathcal{O}_0$, il est nécessaire et suffisant que P soit un opérateur différentiel d'ordre infini défini dans un voisinage U de $0 \in C^n$ dont pour tout $x \in U$ comme une fonction entière en ξ, le symbole total $p(x, \xi)$ est de type exponentiel tendant vers 0 avec x.*

Démonstration. La partie suffisante est évidente. On suppose que P: $\mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ soit continue linéaire. Alors en comptant la proposition, on suppose que pour tout $x \in \Delta(s_0)$ le symbole total $p(x, \xi)$ soit de $B(1)$-type exponentiel $\sigma^0(x) \leqslant \sqrt{n}\,\omega(x)$. D'après le lemme, $\sigma^0(x)$ tends vers 0 lorsque x tends vers 0. D'après le théorème 0, on sait que pout tout $\varrho \in R_+$,

$$P(x, D_x) = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha\colon\ \mathcal{O}(\Delta(\varrho)) \to \mathcal{O}(\{x \in \Delta(s_0) \mid \sigma^0(x) + 2|x| < \varrho\}).$$

Ici, puisque $\sigma^0(x)$ tends vers 0 lorsque x l'est, l'ensemble $\{x \in \Delta(s_0) | \sigma^0(x) + 2|x| < \varrho\}$ est un voisinage de 0.

Remarque. Dans la démonstration, on peut montrer que $\{x \in \Delta(s_0) | \sigma^0(x) < \varrho\}$ est un voisinage de 0 en utilisant seulement (5): en effet pour tout $\varrho \in \boldsymbol{R}_+$, en prenant $\varrho_1 \in \boldsymbol{R}_+$ avec $\varrho_1 < (\varrho - \varepsilon)/\sqrt{n}$ on a pour tout $x \in \Delta(\min(s(\varrho_1), \varepsilon))$

$$|b_\mu(x)| \leqslant C(\mu!)^{-1} \varrho_1^{|\mu|}$$

donc on a

$$|Q(x, \xi)| \leqslant C \sum (\mu!)^{-1} (\varrho_1 |\xi|)^{|\mu|} = C \exp(\sqrt{n} \varrho_1 |\xi|)$$

et par suite $\sigma^0(x) \leqslant (\sqrt{n} \varrho_1 + 2|x|)$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\sigma^0(x) \leqslant \varrho$. Donc $\Delta(\min(s(\varrho_1), \varepsilon)) \subset \{x \in \Delta(s_0) | \sigma^0(x) + 2|x| < \varrho\}$. Bien que ce soit vrai on ne peut pas en déduire le lemme.

Exemple 1. $P(x, \xi) = 1$; $Q(x, \xi) = \exp(\langle x, \xi \rangle) = \sum (x, \xi)^\mu / \mu!$. Alors on a pour tout $f \in \mathcal{O}_0$,

$$Pf(x) = \sum (\mu!)^{-1} x^\mu D_x^\mu f(0) = f(x),$$

et on a $\omega(x) = |x|$.

2. $P(x, \xi) = \exp(\langle x, \xi \rangle)$; $Q(x, \xi) = \exp(\langle 2x, \xi \rangle)$. Alors on a

$$Pf(x) = \sum (\mu!)^{-1} (2x)^\mu D_x^\mu f(0) = f(2x).$$

Par ailleurs on a

$$P(x, D_x) f(x) = \sum (\mu!)^{-1} x^\mu D_x^\mu f(x) = f(2x).$$

Dans ce cas on a $\omega(x) = 2|x|$.

3. $P(x, \xi) = \exp(\langle x^2, \xi \rangle)$; $Q(x, \xi) = \exp(\langle x^2 + x, \xi \rangle)$. On a

$$Pf(x) = \sum (\mu!)^{-1} (x^2 + x)^\mu D_x^\mu f(0) = f(x^2 + x),$$

$$P(x, D_x) f(x) = \sum (\mu!)^{-1} (x^2)^\mu D_x^\mu f(x) = f(x^2 + x).$$

Et on a $\omega(x) \leqslant |x|^2 + |x|$.

Références

[1] R. Ishimura, *Homomorphismes du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui-même et opérateurs différentiels*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 32 (1978), 301–312.

[2] —, *Opérateurs différentiels d'ordre infini définis en un point*, ibidem 40 (1986), 31–39.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES ARTS LIBERAUX
UNIVERSITÉ DE CHIBA
CHIBA, JAPON

Reçu par la Rédaction le 18.07.1986