COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXII 1970 FASC. 1

ИНЪЕКТИВНЫЕ И СЮРЪЕКТИВНЫЕ МОРФИЗМЫ В АБСТРАКТНЫХ КАТЕГОРИЯХ

В. С. ГАРВАЦКИЙ и Б. М. ШАЙН (САРАТОВ)

Понятие категории явилось естественной абстракцией понятия класса математических структур и морфизмов между структурами. Среди всевозможных морфизмов выделяются два важных класса: сюръективные морфизмы (т.е. отображения на) и инъективные морфизмы (т.е. взаимно однозначные отображения в). В первых же работах по теории категорий были сделаны попытки формализировать эти понятия, вводя в качестве их абстрактного аналога понятия эпиморфизма и мономорфизма, т.е. морфизмов, на которые можно сокращать справа или слева. Было замечено, что сюръективные (инъективные) морфизмы суть эпиморфизмы (мономорфизмы). Во многих „хороших" категориях (например, в категориях множеств или групп) оказалось верным и обратное. К сожалению, нашлись не менее „хорошие" категории, в которых не всякий мономорфизм инъективен, а эпиморфизм сюръективен (см., например, [5]). Таким образом, концепции мономорфизма и эпиморфизма не вполне адекватны понятиям инъективного или сюръективного морфизма. Отыскание точных формальных аналогов понятий сюръективности и инъективиости есть одна из задач, рассмотренных в настоящей статье.

Попытки формализации этих понятий (или близких понятий) сделаны в работах МакЛейна [6] и Исбелла [4], рассматривавших так называемые бикатегории. Однако и в этих работах не была найдена полная формальная характеристика инъективности и сюръективности: авторы ограничились лишь рядом необходимых условий.

Общеизвестно значение принципа двойственности в теории категорий. В частности, двойственны понятия эпиморфизма и мономорфизма. В тех категориях, где эпиморфизмы сюръективны, а мономорфизмы инъективны, получается двойственность между сюръективными и инъективными морфизмами. Однако в общем случае весьма важная с различных (в частности, с эвристической) точек зрения двойственность между инъективными и сюръективными морфизмами до сих пор не была установлена в каком-либо точном смысле. Доказательство двойственности понятий сюръективности и инъективности — вторая из задач, решённых далее.

Идейным истоком настоящей статьи являются исследования одного из авторов по алгебрам отношений, которые до сих пор проводились преимущественно в рамках теории полугрупп преобразований [7]. Будучи применённой к категориям, концепция алгебры отношений позволяет поставить много естественных проблем, у которых гарантировано существование решения, могущего быть записанным на простейшем логическом языке — исчисления предикатов первой ступени. Задача о характеризации понятий инъективности и сюръективности — одна из типичных задач теории алгебр отношений.

В связи с существующим большим разнобоем в формулировке основных понятий мы приведём некоторые определения.

Мы будем использовать теорию множеств в том виде, как она использована в монографиях [2] и [3], т.е. будем пользоваться понятием „универсума", принадлежащим Гротендику и Зоннеру [9] (это понятие тесно связано с более ранними исследованиями Тарского и других математиков о недостижимых кардинальных числах). С этой точки зрения исчезает разница между понятиями „класса" и „множества". Отдавая дань традиции, мы будем использовать термин „класс", который мы, однако, не фетишизируем.

Пусть (K, π) — класс K с частичной бинарной операцией π. Добавляя к K новый элемент 0 и доопределяя операцию π на новом классе $K_0 = K \cup \{0\}$ (все ранее не определённые произведения полагаются равными 0), получаем алгебру (K_0, π_0). Если (K_0, π_0) — полугруппа, то (K, π) называется *полугруппоидом*. *Категорией* называется система вида $\mathfrak{K} = (K, \alpha, \beta, \pi)$, где α, β — унарные, а π — частичная бинарная операциа на классе K, причём выполняются следующие условия (в них запись xy означает, что произведение элементов x и y из K относительно π существует и равно xy):

1. (K, π) есть полугруппоид.
2. $\alpha(x)x = x = x\beta(x)$, $\alpha(xy) = \alpha(x)$, $\beta(xy) = \beta(y)$.
3. Произведение xy существует тогда и только тогда, когда $\beta(x) = \alpha(y)$.

$\alpha(x)$ называется *левой*, а $\beta(x)$ — *правой единицами* элемента x. Совокупность всех единиц (т.е. элементов вида $\alpha(x)$) категории $\mathfrak{K}$ обозначается через $\mathfrak{K}_0$.

Это определение (Эресман [2]) удобнее обычно даваемого определения в терминах одной лишь операции π. С нашей точки зрения подкатегория есть не что иное как подалгебра, а морфизм — обычный гомоморфизм категорий (в обычном смысле теории частичных алгебр, — см., например, [7]).

Обозначая через π^* операцию, двойственную к операции π (т.е. $\pi^*(x, y) = \pi(y, x)$ для любых $x, y \in K$, причём обе части равенства определены одновременно), получаем, что $\mathfrak{K}^* = (K, \beta, \alpha, \pi^*)$ также есть категория (называемая „двойственной” к категории $\mathfrak{K}$). Очевидно, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{**}$.

Элемент a категории $\mathfrak{K}$ называется *мономорфизмом* (*эпиморфизмом*), если для любых $x, y \in \mathfrak{K}$, для которых ax и ay определены (xa и ya определены) из равенства $ax = ay$ (равенства $xa = ya$) следует $x = y$. Класс всех мономорфизмов (эпиморфизмов) категории $\mathfrak{K}$ обозначим через Mono $\mathfrak{K}$ (Epi $\mathfrak{K}$).

Если L и M — подклассы категории $\mathfrak{K}$, то LM обозначает подкласс, состоящий из всевозможных произведений вида xy, где $x \in L$ и $y \in M$. Подкласс L называется *правым* (*левым*) *идеалом*, если $LK \subset L$ (если $KL \subset L$). Подкласс, дополнение которого является правым (левым) идеалом, называется *правым* (*левым*) *коидеалом*.

Функтор $\square$ из категории $\mathfrak{K}$ называется *истинным*, если из $\square(x) = \square(y)$, $\alpha(x) = \alpha(y)$ и $\beta(x) = \beta(y)$ следует $x = y$ для любых $x, y \in K$. Ясно, что изоморфизм (т.е. взаимно однозначный функтор) истинен.

Конкретной категорией будем называть пару ($\mathfrak{K}$, $\square$), состоящую из категории $\mathfrak{K}$ и истинного функтора $\square$ из $\mathfrak{K}$ в некоторую категорию множеств. Заметим, что в литературе понятие „конкретной категории” употребляется в различных смыслах. Типичным примером конкретной категории является категория структур (в смысле Бурбаки) вместе с морфизмами между ними и „забывающий” функтор, т.е. функтор, сопоставляющий каждому морфизму соответствующее ему отображение между базисными множествами рассматриваемых структур.

Пусть ($\mathfrak{K}$, $\square$) — конкретная категория. Элемент $a \in K$ называется $\square$-*инъективным* ($\square$-*сюръективным*), если $\square(a)$ есть инъективное (сюръективное) отображение. Класс всех $\square$-инъективных ($\square$-сюръективных) элементов обозначим через $I_\square$ (через $S_\square$) и назовём *классом инъекций* (*сюръекций*) *для функтора* $\square$.

Теорема об инъекциях. *Для того чтобы подкласс I категории $\mathfrak{K}$ был классом инъекций для некоторого истинного функтора $\square$ из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств (т.е. $I = I_\square$), необходимо и достаточно, чтобы класс I был подкатегорией, левым коидеалом и $\mathfrak{K}_0 \subset I$* $\subset$ Mono $\mathfrak{K}$.

Теорема о сюръекциях. *Для того чтобы подкласс S категории $\mathfrak{K}$ был классом сюръекций для некоторого истинного функтора $\square$ из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств (т.е. $S = S_\square$), необходимо и достаточно, чтобы класс S был подкатегорией, правым коидеалом и $\mathfrak{K}_0 \subset S \subset$* Epi $\mathfrak{K}$.

Поскольку формулировки двух теорем, как нетрудно видеть, двойственны друг другу, в качестве простого следствия получаем

Принцип двойственности. *Для того чтобы подкласс категории $\mathfrak{K}$ был классом инъекций (сюръекций) для некоторого истинного функтора из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств, необходимо и достаточно, чтобы этот подкласс был классом сюръекций (инъекций) для некоторого истинного функтора из двойственной категории $\mathfrak{K}^*$ в категорию множеств.*

Принцип двойственности и обе теоремы сохраняют свою силу, если вместо „истинных функторов" рассматривать „изоморфизмы".

Доказательство. Необходимость. Пусть $(\mathfrak{K}, \square)$ — конкретная категория. Если $a, b \in I_\square$, то $\square(a)$ и $\square(b)$ инъективны, поэтому $\square(ab) = \square(a)\,\square(b)$ инъективно, т.е. $ab \in I_\square$. Если $e \in \mathfrak{K}_0$, то $\square(e)$ инъективно, т.е. $\mathfrak{K}_0 \subset I_\square$. Поэтому $I_\square$ — подкатегория. Если $ab \in I_\square$, т.е. $\square(ab) = \square(a)\,\square(b)$ инъективно, то отсюда, как легко видеть, следует инъективность $\square(b)$, т.е. $b \in I_\square$. Поэтому $I_\square$ — левый коидеал. Включение $I_\square \subset \mathrm{Mono}\ \mathfrak{K}$ известно.

Необходимость условий теоремы о сюръекциях проверяется столь же просто.

Достаточность. Пусть I — подкласс категории $\mathfrak{K}$, являющийся подкатегорией и левым коидеалом и $\mathfrak{K}_0 \subset I \subset \mathrm{Mono}\ \mathfrak{K}$. Покажем, что $I = I_\square$ для некоторой конкретной категории $(\mathfrak{K}, \square)$.

Рассмотрим на K отношение эквивалентности $\varepsilon = \Delta_K \cup (I' \times I')$, где I' есть дополнение I, а Δ_K — тождественное отношение на K. Каждому $a \in K$ поставим в соответствие отображение $\varphi_a\colon A_a \to B_a$, где $A_a, B_a \subset K/\varepsilon$, $\{x\} \in A_a \leftrightarrow \beta(a) = \alpha(x) \wedge x \in I$, $I' \in A_a$, $\{x\} \in B_a \leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(x) \wedge$ $\wedge\ x \in I$, $I' \in B_a$, $\varphi_a(I') = I'$, если же $\{x\} \in A_a$, то $\varphi_a(\{x\})$ равно либо $\{ax\}$, либо I' в зависимости от того, попадает или не попадает ax в I. Покажем, что $\overline{\square}(a) = (A_a, \varphi_a, B_a)$ есть функтор из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств. Действительно, $\{x\} \in A_{ab} \leftrightarrow \beta(ab) = \alpha(x) \leftrightarrow \beta(b) = \alpha(x) \leftrightarrow \{x\} \in A_b$, откуда $A_{ab} = A_b$. Точно так же $B_{ab} = B_a$. Если $\varphi_{ab}(\{x\}) = I'$, т.е. $abx \in I'$, то, очевидно, $\varphi_a\big(\varphi_b(\{x\})\big) = I'$. Если же $\varphi_{ab}(\{x\}) = \{abx\}$, то $abx \in I$, откуда $bx \in I$, т.е. $\varphi_a\big(\varphi_b(\{x\})\big) = \varphi_a(\{bx\}) = \{abx\}$. Поэтому $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$. Замечая, что $B_b = A_a \leftrightarrow \beta(a) = \alpha(b)$, получаем: $\overline{\square}(ab) = (A_{ab}, \varphi_{ab}, B_{ab}) =$ $= (A_a, \varphi_a, B_a)(A_b, \varphi_b, B_b) = \overline{\square}(a)\,\overline{\square}(b)$. Нетрудно видеть, что $A_{\alpha(a)} =$ $= B_{\alpha(a)}$ и $\varphi_{\alpha(a)} = \Delta_{A_{\alpha(a)}}$, поэтому $\overline{\square}\big(\alpha(a)\big)$ есть тождественное отображение $A_{\alpha(a)}$ на себя. Следовательно, $\overline{\square}$ — функтор.

Если бы в качестве I мы взяли весь класс K, то точно таким же способом получили бы функтор $\square_0$, такой, что $\square_0(a) = (A_a^0, \varphi_a^0, B_a^0)$. Всегда можно считать, что множества A_a и A_a^0 не пересекаются и множества B_a и B_a^0 также не пересекаются (этого можно добиться, заменив, например, множества A_a и B_a множествами $A_a \times \{1\}$ и $B_a \times \{1\}$ и продолжив отображение φ_a соответствующим образом;

множества же A_a^0 и B_a^0 заменяются на $A_a^0\times\{2\}$ и $B_a^0\times\{2\}$ с соответствующим распространением отображения φ_a^0). Определим теперь $\square(a)=(A_a\cup A_a^0, \varphi_a\cup\varphi_a^0, B_a\cup B_a^0)$. Ясно, что $\square$ — также функтор из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств.

Пусть $\square(a)=\square(b)$. Тогда $\square_0(a)=\square_0(b)$. Поскольку $\{\beta(a)\}\in A_a^0$ и $\varphi_a^0(\{\beta(a)\})=\{a\beta(a)\}=\{a\}$, получаем, что $\{\beta(a)\}\in A_b^0$, т.е. $\beta(b)=$ $=a(\beta(a))=\beta(a)$ и $\{a\}=\varphi_b^0(\{\beta(a)\})=\{b\beta(a)\}=\{b\}$, т.е. $a=b$. Поэтому $\square$ — изоморфизм (¹).

Покажем, что $I=I_\square$. Для этого прежде всего заметим, что $\square(a)$ инъективно тогда и только тогда, когда $\overline{\square}(a)$ и $\square_0(a)$ инъективны, т.е. $I_\square=I_{\overline{\square}}\cap I_{\square_0}$. Замечая, что $\square_0(a)$ инъективно тогда и только тогда, когда $\varphi_a^0(\{x\})=\varphi_a^0(\{y\})\to\{x\}=\{y\}$ для любых $x,y\in K$, для которых $\beta(a)=a(x)=a(y)$, получаем, что инъективность $\square_0(a)$ означает: $ax=ay\to x=y$, т.е. $a\in\operatorname{Mono}\mathfrak{K}$. Следовательно, $I_{\square_0}=$ $=\operatorname{Mono}\mathfrak{K}$.

Если $a\in I$ и $\{x\},\{y\}\in A_a$, то поскольку I подкатегория, получаем, что $ax, ay\in I$, т.е. $\{ax\}=\varphi_a(\{x\})=\varphi_a(\{y\})=\{ay\}\to\{ax\}=\{ay\}$. Так как $I\subset\operatorname{Mono}\mathfrak{K}$, получаем, что $\{x\}=\{y\}$, откуда следует инъективность $\overline{\square}(a)$. Следовательно $a\in I_{\overline{\square}}$ и $I\subset I_{\overline{\square}}$.

Пусть теперь $a\in I'$. Тогда $\{\beta(a)\}\in A_a$ и $\{a\beta(a)\}=\{a\}$, откуда $\varphi_a(\{\beta(a)\})=I'=\varphi_a(I')$, т.е. $\overline{\square}(a)$ не инъективно и $a\notin I_{\overline{\square}}$. Следовательно, $I=I_{\overline{\square}}$, а значит, $I=I_{\overline{\square}}\cap I_{\square_0}=I_\square$.

Теорема об инъекциях доказана.

Для доказательства достаточности условия в теореме о сюръекциях, предположим, что S — подкатегория и правый коидеал $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}_0\subset S\subset\operatorname{Epi}\mathfrak{K}$. Переходя к двойственной категории $\mathfrak{K}^*$ и используя теорему об инъекциях, получаем, что $S=I_\Delta$ для некоторого изоморфизма Δ категории $\mathfrak{K}^*$ в категорию множеств. Пусть для определённости $\Delta(a)=(X_a,\psi_a,Y_a)$, где $\psi_a\colon X_a\to Y_a$. Пусть $\mathfrak{P}(X)$ обозначает класс всех подмножеств X и χ_a есть отображение $\mathfrak{P}(Y_a)$ в $\mathfrak{P}(X_a)$, которое каждому подмножеству $A\subset Y_a$ ставит в соответствие полный прообраз этого подмножества в X_a относительно отображения ψ_a. Очевидно, что $\square(a)=(\mathfrak{P}(Y_a),\chi_a,\mathfrak{P}(X_a))$ есть функтор из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств. Поскольку Δ — изоморфизм, без труда проверяем, что и $\square$ — изоморфизм. Покажем, что $S=S_\square$.

Действительно, $a\in S_\square$ означает, что область значений χ_a совпадает с $\mathfrak{P}(X_a)$, т.е. любое подмножество X_a есть полный прообраз относительно ψ_a некоторого подмножества Y_a. Последнее, очевидно, выполняется в точности тогда, когда ψ_a взаимно однозначно, т.е. $\Delta(a)$ инъективно. Поэтому $S_\square=I_\Delta=S$.

(¹) Заметим, что функтор, несущественно отличающийся от $\square_0$, рассматривался ещё в работе [1].

Теорема о сюръекциях доказана. Отметим, что одновременно мы доказали и аналоги теорем об инъекциях и сюръекциях для изоморфизмов (а не любых истинных функторов).

Итак, категории с выделенными на них классами инъекций (сюръекций) могут быть охарактеризованы простой системой элементарных аксиом. *Категорией с инъекциями* будем называть систему вида $(K, \alpha, \beta, \pi, I)$, где (K, α, β, π) есть категория (т.е. удовлетворяет системе аксиом, приведённой ранее), I есть подкласс класса K и выполняются условия $x, y \in I \wedge \beta(x) = \alpha(y) \to xy \in I$; $xy \in I \to y \in I$; $\alpha(x) \in I$; $ax = ay \wedge a \in I \to x = y$. *Категорией с сюръекциями* будем называть систему вида $(K, \alpha, \beta, \pi, S)$, где (K, α, β, π) есть категория, $S \subset K$ и выполняются условия $x, y \in S \wedge \beta(x) = \alpha(y) \to xy \in S$; $xy \in S \to x \in S$; $\alpha(x) \in I$; $xa = ya \wedge a \in S \to x = y$.

Согласно доказанным теоремам, $(K, \alpha, \beta, \pi, L)$ *есть категория с инъекциями* (*сюръекциями*) *тогда и только тогда, когда* (K, α, β, π) *есть категория и* $L = I_\Box$ $(L = S_\Box)$ *для некоторого истинного функтора* $\Box$ *из* (K, α, β, π) *в категорию множеств.*

Возникает задача об отыскании аксиоматической характеристики систем вида $(K, \alpha, \beta, \pi, I, S)$, где (K, α, β, π) — категория, причём существует истинный функтор $\Box$ из этой категории в категорию множеств, такой что $I = I_\Box$ и $S = S_\Box$. Ясно, что для этого необходимо, чтобы $(K, \alpha, \beta, \pi, I)$ было категорией с инъекциями, а $(K, \alpha, \beta, \pi, S)$ — категорией с сюръекциями. Однако этих требований недостаточно. Пользуясь основной теоремой об алгебрах отношений [7], можно показать, что системы указанного вида могут быть охарактеризованы системой элементарных аксиом. Однако всякая такая система элементарных аксиом бесконечна (в противном случае, как нетрудно показать, для класса полугрупп, вложимых в группы, существовала бы конечная система элементарных аксиом, что, как известно, не имеет места).

Вместе с тем системы вида $(K, \alpha, \beta, \pi, I, S)$ в точности отвечают идее бикатегории в том смысле, как её понимал Исбелл в [4]. В настоящей статье мы не будем заниматься бикатегориями.

Из доказанных теорем следует, что понятие сюръекций или инъекций не носит „абсолютного" характера для данной категории $\mathfrak{K}$ в том смысле, что один и тот же элемент $\mathfrak{K}$ может быть или не быть инъективным или сюръективным в зависимости от того, какую конкретную категорию $(\mathfrak{K}, \Box)$ мы рассматриваем. Будем говорить, что $\mathfrak{K}$ есть *категория с абсолютными инъекциями* (*абсолютными сюръекциями*), если в $\mathfrak{K}$ понятие сюръективности или инъективности не зависит от выбора истинного функтора $\Box$, т.е. если существует подкласс $I_a(S_a)$ категории $\mathfrak{K}$ такой, что $I_a = I_\Box$ $(S_a = S_\Box)$ для любого истинного функтора $\Box$ из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств. В этом случае назовём I_a (S_a) *классом абсолютных инъекций* (*абсолютных сюръекций*) $\mathfrak{K}$.

Как следует из теоремы об инъекциях, *наибольшим подклассом категории* $\mathfrak{K}$, *могущим быть классом инъекций для некоторой конкретной категории* ($\mathfrak{K}$, $\square$), *является класс всех мономорфизмов* Mono $\mathfrak{K}$ (этот класс, очевидно, удовлетворяет всем условиям, накладываемым на I в теореме об инъекциях). Оказывается, что в любой категории $\mathfrak{K}$ существует также *наименьший* подкласс I_0, могущий быть классом инъекций для некоторой конкретной категории ($\mathfrak{K}$, $\square$) (т.е. всякий класс I, удовлетворяющий условиям теоремы об инъекциях, содержит I_0). Наименьший класс сюръекций обозначим через S_0.

Предложение. *I_0 есть класс всех обратимых слева элементов категории $\mathfrak{K}$ (т.е. $a \in I_0$ тогда и только тогда, когда $ba = \beta(a)$ для некоторого $b \in K$). S_0 есть класс всех обратимых справа элементов категории $\mathfrak{K}$ (т.е. $a \in S_0$ тогда и только тогда, когда $ab = \alpha(a)$ для некоторого $b \in K$).*

Мы опустим простое доказательство этого предложения.

Следствие. *$\mathfrak{K}$ есть категория с абсолютными инъекциями (абсолютными сюръекциями) тогда и только тогда, когда каждый мономорфизм (эпиморфизм) $\mathfrak{K}$ обратим слева (справа).*

Нетрудно проверить, что категория групп и гомоморфизмов не будет ни категорией с абсолютными инъекциями, ни категорией с абсолютными сюръекциями. В то же время всякая полная категория множеств и отображений (т.е. категория, которая вместе с двумя тождественными отображениями Δ_A и Δ_B содержит и все отображения A в B) будет и с абсолютными инъекциями и с абсолютными сюръекциями.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Eilenberg and S. MacLane, *General theory of natural equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society 58 (1945), стр. 231-294.

[2] C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Paris 1965.

[3] M. Hasse und L. Michler, *Theorie der Kategorien*, Berlin 1966.

[4] J. R. Isbell, *Some remarks concerning categories and subspaces*, Canadian Journal of Mathematics 9 (1957), стр. 563-577.

[5] — *Epimorphisms and dominions*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra — La Jolla 1965, Berlin 1966, стр. 232-246.

[6] S. MacLane, *Duality for groups*, Bulletin of the American Mathematical Society 56 (1950), стр. 485-516.

[7] R. S. Pierce, *Introduction to the theory of abstract algebras*, New York 1968.

[8] B. M. Schein, *Relation algebras*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 13 (1965), стр. 1-5.

[9] J. Sonner, *On the formal definition of categories*, Mathematische Zeitschrift 80 (1962), стр. 163-176.

Reçu par la Rédaction le 8. 9. 1969