ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1969)

Objets géométriques du type $(1, 1, r)$ pour $r \geqslant 4$

par S. Midura (Rzeszów)

Introduction. Nous montrerons dans ce travail qu'il n'existe pas d'objets géométriques du type $(1, 1, r)$ si $r \geqslant 4$ (la définition du type se trouve à la p. 15 dans [1]) dont la règle de transformation vérifie les hypothèses du théorème 1 ou du corollaire 1. Dans le théorème 1 les hypothèses b et c (en tenant compte de la remarque 1) sont plus faibles que l'hypothèse b du théorème 2 cité dans [1], p. 33. La démonstration du théorème 1 se fait à l'aide de méthodes algébriques (autrement que la démonstration du théorème 2). Nous donnerons ensuite les règles de transformation des objets géométriques du type $(1, 1, r)$ pour $r \geqslant 4$ qui ne vérifient pas seulement l'hypothèse b dans le corollaire 1 ou l'une des hypothèses b et c dans le théorème 1.

§ 1. La règle de transformation d'un objet géométrique du type $(1, 1, r)$ a la forme

$$\bar{x} = f(x, \langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle), \tag{1}$$

où

$$a_p = \frac{d^p \varphi(\xi)}{d\xi^p}_{(\xi=\xi_0)} \quad \text{pour } p = 1, 2, \ldots, r$$

et $\bar{\xi} = \varphi(\xi)$ est la transformation de classe C^r conduisant du système admissible de coordonnées dans lequel l'objet géométrique donné a la coordonnée x au système de coordonnées admissible dans lequel cet objet a la coordonnée $\bar{x}$. Désignons par $\bar{\bar{\xi}} = \psi(\bar{\xi})$ la transformation de classe C^r conduisant du système admissible de coordonnées dans lequel l'objet donné a la coordonnée $\bar{x}$ à un nouveau système admissible de coordonnées. La règle de transformation (1) est la solution de l'équation fonctionnelle

$$f[f(x, \langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle), \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\rangle] = f(x, \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\rangle), \tag{2}$$

où

$$\beta_p = \frac{d^p \psi(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^p}_{(\bar{\xi}_0=\varphi(\xi_0))},$$

$$\gamma_p = \frac{d^p \psi[\varphi(\xi)]}{d\xi^p}_{(\xi=\xi_0)} \quad \text{pour } p = 1, 2, \ldots, r \tag{3}$$

et remplit la condition d'identité:

$$f(x, \langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle) = x\,. \tag{4}$$

L'ensemble des éléments $\langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle$, dans lesquels les a_p, $p = 1, 2, \ldots, r$, sont des nombres réels arbitraires et $a_1 \neq 0$, avec l'opération

$$\langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\rangle \cdot \langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle = \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\rangle\,,$$

où γ_p est défini par la formule (3), est un groupe (voir [1], p. 23) que nous désignerons par L_1^r. On peut montrer (voir [1], p. 26, corollaires 1 et 2) que dans le groupe L_1^r ont lieu les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} &\langle 1, \beta_2, \ldots, \beta_r\rangle \cdot \langle 1, 0, 0, \ldots, 0, a_{r-1}, a_r\rangle \\ &\qquad = \langle 1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{r-2}, \beta_{r-1} + a_{r-1}, \beta_r + a_r + r\beta_2 a_{r-1}\rangle\,, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\langle 1, 0, 0, \ldots, 0, \beta_{r-1}, \beta_r\rangle \cdot \langle 1, a_2, a_3, \ldots, a_r\rangle \\ &\qquad = \left\langle 1, a_2, a_3, \ldots, a_{r-2}, a_{r-1} + \beta_{r-1}, a_r + \beta_r + \binom{r}{2}\beta_{r-1} a_2\right\rangle\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Dans nos considérations nous profiterons souvent de (5) et de (6). Nous démontrerons maintenant le

LEMME 1. *Si G est un groupe avec l'opération $\cdot$ et H un sous-ensemble du groupe G ayant avec chaque classe d'équivalence à gauche par rapport à un sous-groupe G_1 du groupe G au plus un élément commun, alors pour un élément quelconque a du groupe G le produit aH* (1) *a avec chaque classe d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe G_1 au plus un élément commun.*

Démonstration (2). Supposons que deux éléments u_1 et u_2 de l'ensemble aH font partie de la même classe d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe G_1. Aux éléments u_1 et u_2 correspondent dans l'ensemble H deux éléments y_1 et y_2 tels que $u_1 = ay_1$ et $u_2 = ay_2$. Puisque u_1 et u_2 appartiennent à la même classe d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe G_1, on a $u_1^{-1} \cdot u_2 \in G_1$, c'est-à-dire

$$(ay_1)^{-1}(ay_2) = (y_1^{-1}a^{-1})(ay_2) = y_1^{-1}y_2 \in G_1\,. \tag{7}$$

Par suite, en vertu de l'hypothèse, y_1 et y_2 appartiennent à la même classe d'équivalence par rapport au sous-groupe G_1 du groupe G, donc $y_1 = y_2$. Il s'ensuit, en tenant compte de (7), que $u_1 = u_2$. La démonstration du lemme est donc terminée.

Nous démontrerons maintenant le théorème annoncé dans l'introduction.

(1) $aH \overset{\mathrm{df}}{=} [x\colon \bigvee_{y\in H} (x = ay)]$.

(2) Il est probable que ce lemme est connu.

THÉORÈME 1. *Si:*

a. *La fonction* $f(x, \langle a_1, \ldots, a_r\rangle)$ *est une solution de l'équation* (2) *sur le produit cartésien* $[Z \cup (a, b)] \times L_1^r$ *où* Z *est un sous-ensemble arbitraire de l'ensemble des nombres réels disjoint de l'intervalle* (a, b) *ouvert et pour un* x *quelconque de la somme* $Z \cup (a, b)$

$$f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0\rangle) = x .$$

b. *Pour un* x *arbitraire de l'intervalle* (a, b) *la fonction* $f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle)$ *est fonction continue de la variable* a_r.

c. *Pour un certain* x_0 *de l'intervalle* (a, b) *les valeurs de la fonction* $f(x_0, \langle 1, a_2, \ldots, a_r\rangle)$ *appartiennent à l'intervalle* (a, b).

d. *Pour un* x *arbitraire de l'intervalle* (a, b) *la fonction* $f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle)$ *n'est pas constante (par rapport à la variable* a_r*), alors le nombre entier positif* r *ne peut être plus grand que* 3.

Démonstration. Supposons que la fonction $f(x, \langle a_1, \ldots, a_r\rangle)$ vérifie l'équation fonctionnelle (2) sur l'ensemble $[Z \cup (a, b)] \times L_1^r$ pour $r > 3$. Il s'ensuit, à cause de (6),

$$f[f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle), \langle 1, 0, \ldots, 0, \beta_r\rangle] = f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r + \beta_r\rangle) . \tag{8}$$

Posons

$$\bar{f}(x, a_r) \overset{\text{df}}{=} f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle) .$$

Il résulte des hypothèses a et b que pour un x quelconque de l'intervalle (a, b) et pour un a_r arbitraire $f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle) \in (a, b)$. Il s'ensuit de (8) et de la définition de la fonction $\bar{f}(x, a_r)$ que

$$\bar{f}[\bar{f}(x, a_r), \beta_r] = \bar{f}(x, a_r + \beta_r) \tag{9}$$

pour un x quelconque de l'intervalle (a, b) et pour des a_r et β_r arbitraires de l'ensemble des nombres réels. Il s'ensuit des hypothèses de (9) et du théorème 6 de [3] ([3]) que pour un x fixé de l'intervalle (a, b) la fonction $\bar{f}(x, a_r) = f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle)$ est strictement monotone et l'ensemble

([3]) Le théorème 6 de [3] est le suivant:

Si la fonction $f(x, y)$ *satisfait aux conditions suivantes:*

a. $f(x, y)$ *satisfait à l'équation*

$$f[f(x, y), z] = f(x, z+y)$$

sur le produit cartésien d'un intervalle (a, b) *et du groupe additif des nombres réels,*

b. *pour chaque* x *fixé* $f(x, y)$ *est une fonction continue de* y, *non constante,*

c. $f(x, 0) = x$ *pour tout* x *de l'intervalle* (a, b), *alors*

$$f(x, y) = g[y + g^{-1}(x)] ,$$

où $g(x)$ *est une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, strictement monotone et continue; l'ensemble de ses valeurs est l'intervalle* (a, b).

de ses valeurs est l'intervalle entier (a, b). Pour un x_0 fixé de l'intervalle (a, b) (dont il est question dans l'hypothèse c) l'ensemble

$$L \overset{\mathrm{df}}{=} [\langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle : f(x_0, \langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle) = f(x_0, \langle 1, 0, \ldots, 0\rangle)]$$

est, à cause du théorème 4 de [3] ([4]), un sous-groupe du groupe L_2^r. La fonction $f(x_0, \langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle)$ (x_0 fixé) est constante sur les classes d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe L du groupe L_1^r. Par contre, elle prend des valeurs différentes pour les éléments appartenant aux classes d'équivalence différentes par rapport au sous-groupe L du groupe L_1^r (en vertu du théorème 4 de [3]). Puisque la fonction $\bar{f}(x_0, a_r) = f(x_0, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle)$ est biunivoque, l'ensemble

$$\{\langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle\}_{a_r \in R},$$

où R designe (ici et plus loin) l'ensemble des nombres réels, a avec chaque classe d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe L du groupe L_1^r un élément commun. En se basant sur (5) on a

$$\langle 1, \beta_2, \ldots, \beta_r\rangle \cdot \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle = \langle 1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r + a_r\rangle . \tag{10}$$

Si a_r parcourt l'ensemble de tous les nombres réels, il en sera de même de $\beta_r + a_r$. Il en résulte, à cause du lemme 1, que l'ensemble

$$\{\langle 1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{r-1}, a\rangle\}_{a \in R} \tag{11}$$

a avec chaque classe d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe L du groupe L_1^r au plus un seul élément commun ($\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{r-1}$ fixés). Puisque l'intervalle (a, b) est l'ensemble des valeurs de la fonction $\bar{f}(x_0, a_r = f(x_0, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle)$ de la variable a_r il s'ensuit, en tenant compte) de l'hypothèse c, que pour un élément arbitraire $\langle 1, a_2, \ldots, a_r\rangle$ il existe un $\bar{\beta}_r$ tel que

$$f(x_0, \langle 1, a_2, a_3, \ldots, a_r\rangle) = f(x_0, \langle 1, 0, \ldots, 0, \bar{\beta}_r\rangle) . \tag{12}$$

De la dernière égalité et du théorème 4 de [3] résulte que les éléments $\langle 1, a_2, \ldots, a_r\rangle$ et $\langle 1, 0, \ldots, 0, \bar{\beta}_r\rangle$ appartiennent à la même classe d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe L du groupe L_1^r donc

$$\langle 1, 0, \ldots, 0, \bar{\beta}_1\rangle^{-1} \cdot \langle 1, a_2, \ldots, a_r\rangle \in L . \tag{13}$$

([4]) Le théorème 4 de [3] est le suivante:
Si la fonction $f(x, y)$ satisfait pour un $x_0 \in A$ à la condition $f[f(x_0, y), z] = f(x_0, z \cdot y)$ pour tous les y et z du groupe B, alors les ensembles

$$B\bar{y} \overset{\mathrm{df}}{=} \{y : y \in B \text{ et } f(x_0, y) = f(x_0, \bar{y}) \text{ et } \bar{y} \in B\}$$

sont des classes d'équivalence à gauche du groupe B par rapport à un sous-groupe B_1 du groupe B (1 est l'élément neutre du groupe B).

En vertu de (5) $\langle 1, 0, \ldots, 0, \bar{\beta}_r\rangle^{-1} = \langle 1, 0, \ldots, 0, -\bar{\beta}_r\rangle$. Il s'ensuit de là, de (5) et de (13) que

$$\langle 1, 0, \ldots, 0, \bar{\beta}_r\rangle^{-1} \cdot \langle 1, a_2, \ldots, a_r\rangle = \langle 1, a_2, a_3, \ldots, a_{r-1}, -\bar{\beta}_r + a_r\rangle \in L .$$

Nous avons donc montré que pour un élément arbitraire $\langle 1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_r\rangle$ du groupe L_1^r on peut choisir $\bar{a}_r$ de manière que $\langle 1, a_2, \ldots, a_{r-1}, \bar{a}_r\rangle$ $\in L$. Soit donc

$$(14) \qquad \langle 1, \beta_2, \ldots, \beta_r\rangle \in L , \qquad \langle 1, 0, \ldots, 0, a_{r-1}, a_r\rangle \in L , \qquad \beta_2 \neq 0 , \qquad a_{r-1} \neq 0 .$$

En se basant sur (5), (6) et (14) on obtient

$$(15) \qquad \langle 1, \beta_2, \ldots, \beta_r\rangle \cdot \langle 1, 0, \ldots, 0, a_{r-1}, a_r\rangle = \langle 1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-2}, \beta_{r-1} + a_{r-1}, a_r + \beta_r + r\beta_2 a_{r-1}\rangle \in L ,$$

$$(16) \qquad \langle 1, 0, \ldots, 0, a_{r-1}, a_r\rangle \cdot \langle 1, \beta_2, \ldots, \beta_r\rangle = \left\langle 1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-2}, \beta_{r-1} + a_{r-1}, a_r + \beta_r + \binom{r}{2}\beta_2 a_{r-1}\right\rangle \in L .$$

Nous avons déjà remarqué que l'ensemble (11) a avec le sous-groupe L tout au plus un élément commun. Donc de (15) et de (16) nous tirons

$$r\beta_2 a_{r-1} = \binom{r}{2}\beta_2 a_{r-1} .$$

De la dernière égalité et de (14) résulte que $r = \binom{r}{2}$, donc $r = 3$. Notre théorème est ainsi prouvé.

Remarque 1. L'hypothèse c du théorème 1 peut être remplacée par la suivante:

c'. *Pour un certain x_0 de l'intervalle (a, b) la fonction $f(x_0, \langle 1, a_2, \ldots, a_r\rangle)$ est fonction continue de la variable $\langle 1, a_2, \ldots, a_r\rangle$ de l'ensemble L_1^r.*

De l'hypothèse a du théorème 1 et de c' résulte l'hypothèse c du théorème 1.

Remarquons que si l'ensemble Z qui figure dans l'hypothèse a du théorème 1 est vide alors l'hypothèse c du théorème 1 résulte de l'hypothèse a de ce théorème. Ainsi nous obtenons:

COROLLAIRE 1. *Si:*

a. *La fonction $f(x, \langle a_1, \ldots, a_r\rangle)$ est une solution de l'équation* (2) *sur le produit cartésien $(a, b) \times L_1^r$ et pour un x, arbitraire de l'intervalle (a, b), $f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0\rangle) = x$.*

b. *La fonction $f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle)$ est continue par rapport à la variable a_r pour tout x de l'intervalle (a, b).*

c. *Pour un x quelconque de (a, b) la fonction $f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r \rangle)$ n'est pas constante,*

alors le nombre entier positif r ne peut être plus grand que 3.

Dans la monographie [1], p. 33, les auteurs ont établi le

THÉORÈME 2. *Si:*

α. *La fonction $f(x, \langle a_1, \ldots, a_r \rangle)$ est une solution de l'équation* (2) *sur le produit cartésien $A \times L_1^r$, où A est l'intervalle ouvert (a_1, b_1) ou la somme des intervalles ouverts disjoints (a_1, b_1) et (a_2, b_2), et si pour des x arbitraires de l'ensemble A, $f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0 \rangle) = x$.*

β. *La fonction $f(x, \langle a_1, \ldots, a_r \rangle)$ est continue dans l'ensemble $A \times L_1^r$.*

γ. *Pour tout x de l'ensemble A la fonction $f(x, \langle a_1, \ldots, a_r \rangle)$ n'est pas constante par rapport à la variable a_r.*

δ. *Pour des x_1 et x_2 quelconques de l'ensemble A il existe un élément $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ dans l'ensemble L_1^r tel que $x_2 = f(x_1, \langle a_1, \ldots, a_r \rangle)$ alors* $r \leqslant 3$.

On démontre dans [1], p. 31, que les hypothèses du théorème 2 entraînent que pour un x arbitraire de l'ensemble A la fonction $f(x, \langle 1, 0, \ldots$ $\ldots, 0, a_r \rangle)$ n'est pas constante par rapport à la variable a_r. Il s'ensuit que des hypothèses du théorème 2 résulte l'hypothèse d du théorème 1 l'hypothèse c (du corollaire 1).

Il est facile de remarquer que l'hypothèse β (du théorème 2) implique les hypothèses b et c du théorème 1 (hypothèse c du corollaire 1). Par contre les hypothèses b et c du théorème 1 (hypothèse b du corollaire 1) n'impliquent pas l'hypothèse β du théorème 2.

De la démonstration du théorème 2 dans [1] (p. 30-33) ne résulte pas l'existence d'une fonction f satisfaisant aux hypothèses du théorème 2 pour $r = 1, 2, 3$. Les solutions de l'équation (2) sous hypothèses du théorème 2 pour $r = 1, 2, 3$ ont été données dans [1], p. 38, 42 et 45. Ces résultats on été obtenus (et aussi en partie complétés) moyennant des hypothèses plus faibles dans [4].

§ 2. Nous allons montrer qu'il existe des solutions de l'équation (2) sur l'ensemble $(a, b) \times L_1^r$ ($[z \cup (a, b)] \times L_1^r$) qui ne vérifient pas seulement l'hypothèse b, du corollaire 1, hypothèses b ou c, du théorème 1.

Désignons par G la fonction biunivoque qui transforme le groupe L_1^r en l'intervalle (a, b) ($z \cup (a, b)$). Il est facile de vérifier que la fonction

$$f(x, \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle) = G[\langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle \cdot G^{-1}(x)] \tag{17}$$

est la solution de l'équation (2) sur l'ensemble $(a, b) \times L_1^r$, $|[z \cup (a, b)] \times L_1^r|$ vérifiant les hypothèses du corollaire 1 (du théorème 1) excepté l'hypothèse b (b ou c) pour $r > 3$.

Nous établirons maintenant les règles de transformation des objets géométrique du type $(1, 1, r)$ pour $r > 3$ qui ne vérifient pas seulement l'hypothèse b dans le corollaire 1 ou l'une des hypothèses b et c dans le théorème 1. Ces objets ne sont pas équivalents à ceux qui admettent la règle de transformation (17). Désignons par R_0 l'ensemble des nombres réels a l'exception de zéro. Il est facile de vérifier que l'ensemble

$$(18) \qquad \{\langle a_1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle\}_{a_1\in R_0, a_r\in R}$$

est un sous-groupe du groupe L_1^r que nous désignerons par $\bar{L}_1^r$. Désignons par a_p l'ensemble

$$(19) \qquad \{\langle a_1, 0, \ldots, 0, p(a_1^r - a_1)\rangle\}_{a_1\in R_0}$$

où p est un nombre réel arbitrairement fixé. Il est facile de vérifier que l'ensemble a_p est un sous-groupe du groupe $\bar{L}_1^r$ (voir aussi [4]) et par suite aussi un sous-groupe du groupe L_1^r. On peut montrer (voir [4]) que les seules classes d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe a_p du groupe $\bar{L}_1^r$ sont les ensembles de la famille

$$(20) \qquad \big\{\{\langle a_1, 0, \ldots, 0, ta_1^r - pa_1\rangle\}_{a_1\in R_0}\big\}_{t\in R}.$$

Les ensembles de la famille (20) qui correspondent aux t_1 et t_2 différents sont disjoints. Il s'ensuit que la famille des classes d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe a_p du groupe $\bar{L}_1^r$ (20) a la puissance du continu. Il résulte de cela et du fait que la puissance du groupe L_1^r est le continu que la famille des classes d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe a_p du groupe L_1^r a aussi la puissance du continu. Désignons par $g(\langle a_1, \ldots, a_r\rangle)$ la fonction qui transforme l'ensemble L_1^r en l'intervalle (a, b) (ensemble $z \cup (a, b)$) et qui est constante sur les classes d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe a_p du groupe L_1^r, tout en prenant des valeurs différentes pour les éléments appartenant aux classes différentes d'équivalence à gauche par rapport au sous-groupe a_p du groupe L_1^r. Désignons par $g_1^{-1}(a)$ la fonction transformant l'intervalle (a, b) (ensemble $z \cup (a, b)$) au groupe L_1^r, de telle manière que $g_1^{-1}(x) \in g^{-1}(\{x\})$ [5]. Il est facile de vérifier que la fonction

$$(21) \qquad f(x, \langle a_1, \ldots, a_r\rangle) = g[\langle a_1, \ldots, a_r\rangle \cdot g_1^{-1}(x)]$$

est la solution de l'équation (2) (voir aussi [2]) sur l'ensemble $(a, b) \times L_1^r$ ($[z \cup (a, b)] \times L_1^r$) remplissant la condition (4). L'ensemble

$$\{\langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle\}_{a_r\in R}$$

n'a qu'un seul élément commun avec chaque élément de la famille (20). Il s'ensuit du lemme 1 et du théorème 4 de [3] que la fonction

$$f(x, \langle 1, 0, \ldots, 0, a_r\rangle) = g[\langle 1, 0, \ldots, a_r\rangle \cdot g_1^{-1}(x)]$$

[5] $g^{-1}(\{x\}) = [\langle a_1, \ldots, a_r\rangle \colon g(\langle a_1, \ldots, a_r\rangle) = x]$.

est biunivoque pour tout x fixé de l'intervalle (a, b). Nous avons donc montré que la fonction (21) vérifie les hypothèses du corollaire 1 (théorème 1) excepté l'hypothèse b (b ou c).

Travaux cités

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] S. Łojasiewicz, *Sur le problème d'itération*, Coll. Math. 2 (1955), pp. 176-177.

[3] S. Midura, *Sur les solutions de l'équation de translation*, Aequationes Mathematicae, Waterloo, Vol. I, fasc. 1/2 (1968), pp. 77-84.

[4] — *O rozwiązaniach niektórych równań funkcyjnych w teorii klasyfikacji obiektów geometrycznych, I et II*, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie 31 (1968), pp. 37-80.

Reçu par la Rédaction le 12. 1. 1968