ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Objekte des Kartesischen Produktes zweier Mannigfaltigkeiten

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice)

Einleitung. In vorliegender Note möchte ich den Begriff des Produktobjektes einführen. Das *Produktobjekt* ist ein Objekt, das auf dem Kartesischen Produkt zweier Mannigfaltigkeiten definiert ist. Dann betrachte ich lineare homogene Produktobjekte. Insbesondere wird eine Methode für die Konstruktion aller speziellen linearen homogenen geometrischen Produktobjekte gegeben. Gleichzeitig möchte ich hier die in der Literatur gebrauchte Terminologie etwas verbessern und genau präzisieren.

Die speziellen geometrischen Produktobjekte sind nämlich mit den von J. A. Schouten [7], S. 68, eingeführten Verbindungsobjekte (connecting objects) identisch und stellen eine Verallgemeinerung der Verbindungsgrößen (S. Gołąb [1], S. 152, wielkość rozdwojona; J. A. Schouten [7], S. 13, connecting quantity) dar. Den Namen „Produktobjekt" halte ich aber für geeigneter als „Verbindungsobjekt", weil er mit der wohlbekannten Terminologie der modernen Algebra übereinstimmt. Mit dem Namen „Verbindungsobjekt" bezeichne ich dagegen einen Spezialfall des Produktobjektes, das am Ende dieser Note definiert wird. Die so definierten Verbindungsobjekte treten in der Differentialgeometrie sehr oft auf. Sie sind durch dieselben Formeln, wie die hier betrachteten Produktobjekte bestimmt, haben aber einen anderen geometrischen Sinn. Darum glaube ich, daß diese Unterscheidung zwischen den Produktobjekten und Verbindungsobjekten wichtig ist, um Mißverständnisse zu vermeiden (vgl. [1], S. 152).

Alle Betrachtungen dieser Note sind auf die Produktobjekte zweier Mannigfaltigkeiten begrenzt. Sie können aber ohne weiteres auf diejenigen beliebiger endlicher Anzahl der Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden.

§ 1. Kartesisches Produkt zweier Mannigfaltigkeiten. Zulässige Koordinatensysteme. Es seien zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ der Dimension n und $\bar{n}$ gegeben. Bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathfrak{M}}_{n+\bar{n}}$ das Kartesische Produkt dieser Mannigfaltigkeiten,

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{n+\bar{n}} = \mathfrak{M}_n \times \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}} ,$$

$\widetilde{\mathfrak{M}}_{n+\bar{n}}$ ist auch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Auf $\widetilde{\mathfrak{M}}_{n+\bar{n}}$ wählen wir einen Punkt $q_0 = (p_0, \bar{p}_0)$, $p_0 \in \mathfrak{M}_n$, $\bar{p}_0 \in \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$. In einer Umgebung des Punktes p_0 auf $\mathfrak{M}_n$ bzw. $\bar{p}_0$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ sei eine Menge $\mathfrak{B}$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}$ der Koordinatensystemen u bzw. $\bar{u}$ definiert. Das Kartesische Produkt $\widetilde{\mathfrak{B}}$ der Mengen $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$,

$$\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \times \overline{\mathfrak{B}} ,$$

bildet eine Menge der Koordinatensysteme $\tilde{u}$,

$$\tilde{u} = (u, \bar{u}) , \quad u \in \mathfrak{B} , \quad \bar{u} \in \overline{\mathfrak{B}} ,$$

die in einer Umgebung des Punktes q_0 auf $\widetilde{\mathfrak{M}}_{n+\bar{n}}$ definiert sind. Die Koordinatensysteme $\tilde{u}$ der Menge $\widetilde{\mathfrak{B}}$ werden *zulässige Koordinatensysteme* der Mannigfaltigkeit $\widetilde{\mathfrak{M}}_{n+\bar{n}}$ im Punkte q_0 genannt.

§ 2. Koordinatentransformationen. Bezeichnen wir mit $\tilde{u}(u, \bar{u})$ und $\tilde{u}'(u', \bar{u}')$ zwei Koordinatensysteme der Menge $\widetilde{\mathfrak{B}}$. Sie bestimmen Koordinatentransformation $\widetilde{T} = \tilde{u}' \circ \tilde{u}^{-1}$, die von dem Koordinatensystem $\tilde{u}$ zum $\tilde{u}'$ führt. $\widetilde{T}$ hat die Gestalt $\widetilde{T} = (T, \overline{T})$, wo $T = u' \circ u^{-1}$ und $\overline{T} = \bar{u}' \circ \bar{u}^{-1}$ sind. $\widetilde{T}$ kann also durch Funktionen

$$\widetilde{T} : \quad \begin{array}{l} T \;:\; \xi^{i'} = \varphi^{i'}(\xi^i) , \;\; i = 1, 2, \ldots, n , \\ \overline{T} \;:\; \eta^{\alpha'} = \psi^{\alpha'}(\eta^\alpha) , \;\; \alpha = 1, 2, \ldots, \bar{n} \end{array}$$

ausgedrückt werden.

Sind $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ insbesondere die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten entsprechend der Klasse C^r und $C^{\bar{r}}$ ($r \geqslant 1, \bar{r} \geqslant 1$), so sind $\varphi^{i'}$ und $\psi^{\alpha'}$ der Klasse C^r und $C^{\bar{r}}$ mit nichtverschwindenden Determinanten

$$J = \left| \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^i} \right| \neq 0 , \quad \bar{J} = \left| \frac{\partial \eta^{\alpha'}}{\partial \eta^\alpha} \right| \neq 0 .$$

§ 3. Das Produktobjekt. Ein Objekt bzw. ein geometrisches Objekt des Kartesischen Produktes zweier Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ im Punkte q_0 nennen wir ein Objekt bzw. ein geometrisches Objekt der Mannigfaltigkeit $\widetilde{\mathfrak{M}}_{n+\bar{n}}$ im Punkte q_0 hinsichtlich der Menge $\widetilde{\mathfrak{B}}$ der Koordinatensysteme. Diese Objekte sind im Sinne der Definition 6 aus [3], S. 15 und 16, zu verstehen.

Die Objekte des Kartesischen Produktes der Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_u$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ werden im folgenden kurz *Produktobjekte* von $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ genannt.

Jedes Produktobjekt von $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ mit M-Komponenten $\omega(\omega^1, \ldots, \omega^M) = (\omega^p)$, $p = 1, 2, \ldots, M$, ist also durch die Funktion

$$\omega = \widetilde{\Phi}(\widetilde{u}) = \Phi(u, \bar{u}), \quad \widetilde{u}(u, \bar{u}) \in \widetilde{\mathfrak{B}}, \tag{3.1}$$

bestimmt und die Transformationsformel

$$\omega' = \widetilde{F}(\omega, \widetilde{T}) = F(\omega, T, \bar{T}) \tag{3.2}$$

bestimmt das geometrische Produktobjekt.

Ganz analog, wie das Z. Moszner in [6] gemacht hat, kann man das dem Punkte q_0 angebundete (attaché) geometrische Produktobjekt einführen. Es wird durch die Transformationsformel

$$\omega' = \widetilde{F}(\omega, \xi_0^i, \eta_0^a, \widetilde{T}) = F(\omega, \xi_0^i, \eta_0^a, T, \bar{T}) \tag{3.3}$$

bestimmt, wo (ξ_0^i, η_0^a) die Koordinaten des Punktes q_0 in dem Koordinatensystem $\widetilde{u}$ sind.

§ 4. Spezielle Produktobjekte. Sind $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten entsprechend der Klasse C^r und $C^{\bar{r}}$, so kann man jeder Transformation T bzw. $\bar{T}$ in eindeutiger Weise die Zahlensysteme

$$L\colon \{A_i^{i'}, \ldots, A_{i_1 \ldots i_s}^{i'}\},$$

$$A_{i_1 \ldots i_k}^{i'} = \frac{\partial^k \xi^{i'}}{\partial \xi^{i_k} \ldots \partial \xi^{i_1}}, \quad J = |A_i^{i'}| \neq 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant r,$$

bzw.

$$\bar{L}\colon \{\bar{A}_i^{i'}, \ldots, \bar{A}_{i_1 \ldots i_\sigma}^{i'}\},$$

$$\bar{A}_{i_1 \ldots i_k}^{i'} = \frac{\partial^k \eta^{a'}}{\partial \eta^{a_k} \ldots \partial \eta^{a_1}}, \quad \bar{J} = |\bar{A}_a^{a'}| \neq 0, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant \bar{r},$$

zuordnen.

Ist die Transformationsformel (3.3) nur von den Koordinaten ξ_0^i, η_0^a und $\xi_0^{i'}$, $\xi_0^{a'}$ des Punktes q_0 in den Koordinatensystemen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{u}'$ und von den Ableitungen L und $\bar{L}$ abhängig, so haben wir ein spezielles geometrisches Produktobjekt der Klasse (s, σ). Die Transformationsformel dieses Objektes hat also folgende Form:

$$\omega' = F(\omega, \xi_0^i, \eta_0^a, \xi_0^{i'}, \eta_0^{a'}, L, \bar{L}). \tag{4.1}$$

Das Produktobjekt heißt *rein differentiell*, wenn seine Transformationsformel von den Koordinaten ξ_0^i, η_0^a, $\xi_0^{i'}$, $\eta_0^{a'}$ nicht abhängt:

$$\omega' = F(\omega, L, \bar{L}). \tag{4.2}$$

Für die rein differentiellen Produktobjekte kann man ganz analog wie in [3], S. 24, die Begriffe der einfachen und abstrakten Objekte, der Fiber und der transitiven Fiber, der Dimension, der Äquivalenz bzw. der starken Äquivalenz einführen. Im weiteren werden wir uns nur mit den rein differentiellen linearen homogenen Produktobjekten beschäftigen.

§ 5. Lineare homogene Produktobjekte. Das Produktobjekt (4.2) nennt man *linear homogen*, wenn die Funktion F in (4.2) hinsichtlich der Komponenten ω (ω^P) linear homogen ist

$$\omega^{P'} = F^{P'}_Q(L, \bar{L})\,\omega^Q\,, \qquad P, Q = 1, 2, \ldots, M\,. \tag{5.1}$$

Es ist erster Klasse, d.h. der Klasse $(1, 1)$, wenn in L bzw. $\bar{L}$ nur die ersten partiellen Ableitungen der Transformation T bzw. $\bar{T}$ auftreten. Die Transformationsformel des linearen homogenen Produktobjektes erster Klasse lautet also folgendermaßen

$$\omega^{P'} = F^{P'}_Q(A, \bar{A})\,\omega^Q\,, \tag{5.2}$$

wo

$$A = \|A^{i'}_i\| \quad \text{und} \quad \bar{A} = \|\bar{A}^{\alpha'}_\alpha\|$$

sind. Dieses Objekt ist durch die Funktion $F(A, \bar{A}) = \|F^{P'}_Q(A, \bar{A})\|$ vollständig bestimmt, welche nachstehende Bedingungen

$$F(A, \bar{A})\cdot F(B, \bar{B}) = F(A, B, \bar{A}\cdot\bar{B})\,, \tag{5.3}$$

$$F(E, \bar{E}) = \tilde{e} \tag{5.4}$$

erfüllt. Die Funktionalgleichung (5.3) soll für beliebige nicht singuläre Matrizen $A, B, \bar{A}, \bar{B}$ der Ordnung n bzw. $\bar{n}$ erfüllt werden. E, $\bar{E}$ und $\tilde{e}$ sind die Einheitsmatrizen entsprechend der Ordnung n, $\bar{n}$ und M. Umgekehrt bestimmt jede Lösung von (5.3), die der Bedingung (5.4) genügt, ein lineares homogenes Produktobjekt erster Klasse.

§ 6. Konstruktion der Produktobjekte. Die Lösungen der Funktionalgleichung (5.3) kann man auf folgende Weise erhalten. Wir betrachten zwei multiplikative Funktionalgleichungen: erste

$$H(A)\cdot H(B) = H(A\cdot B) \tag{6.1}$$

mit der Bedingung

$$H(E) = e \tag{6.2}$$

und zweite

$$\bar{H}(\bar{A})\cdot\bar{H}(\bar{B}) = \bar{H}(\bar{A}\cdot\bar{B}) \tag{6.3}$$

mit der Bedingung

$$\bar{H}(\bar{E}) = \bar{e}\,, \tag{6.4}$$

wo H bzw. $\bar{H}$ die quadratischen Matrizen der Ordnung m bzw. $\bar{m}$ und E, $\bar{E}$, e, $\bar{e}$ die Einheitsmatrizen entsprechend der Ordnung n, $\bar{n}$, m, $\bar{m}$ sind. Überdies soll das Produkt der Zahlen m und $\bar{m}$ gleich M sein:

$$M = m \cdot \bar{m} .$$

Es sei $H(x)$ bzw. $\bar{H}(\bar{x})$ beliebige Lösung der Funktionalgleichung (6.1) bzw. (6.3), die (6.2) bzw. (6.4) erfüllt.

Bezeichnen wir mit

$$H^r_s(x) , \quad r, s = 1, 2, \ldots, m , \tag{6.5}$$

die Elemente der Matrix H und mit

$$\bar{H}^\varrho_\sigma(\bar{x}) , \quad \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, \bar{m} , \tag{6.6}$$

diejenigen der Matrix $\bar{H}$. Aus (6.5) und (6.6) bilden wir eine Lösung von (5.3) auf niederbeschriebene Weise. Wir ordnen jedem Paar der natürlichen Zahlen (r, ϱ), wo $r = 1, 2, \ldots, m$ und $\varrho = 1, 2, \ldots, \bar{m}$ ist, eine und nur eine Zahl P aus der Folge $1, 2, \ldots, M$ zu. Mit $F(x, \bar{x})$ bezeichnen wir die Matrix, derer Elemente $F^{P'}_Q$ folgendermaßen definiert sind:

$$F^{P'}_Q(x, \bar{x}) = H^{r'}_s(x) \bar{H}^{\varrho'}_\sigma(\bar{x}) , \quad P, Q = 1, 2, \ldots, M . \tag{6.7}$$

Die in (6.7) auftretenden Zahlen P bzw. Q sind diese, die eben den Paaren (r, ϱ) bzw. (s, σ) zugeordnet sind. Die Matrix F ist dann eine quadratische Matrix der Ordnung $M = m \cdot \bar{m}$, die (5.3) und (5.4) erfüllt. Sie stellt im wesentlichen das Kroneckersche Produkt der Matrizen H und $\bar{H}$ dar.

Wenn wir auf eine andere Weise die Paare (r, ϱ) auf die Zahlen $1, 2, \ldots, M$ abbilden, so erhalten wir natürlich eine andere Lösung von (5.3). Entsprechende Produktobjekte sind aber stark äquivalent (vgl. [2], S. 4, Satz 1.6).

§ 7. Verallgemeinerte Produkttensoren. Es sei ω (ω^P) ein Produktobjekt, das durch die Funktion (6.7) bestimmt ist. Bezeichnen wir die Komponenten dieses Objektes mit zwei Indizes gemäß der obeneingeführten Zuordnung

$$\omega^P = \omega^{r\varrho} ;$$

so kann seine Transformationsformel in der Form

$$\omega^{r'\varrho'} = H^{r'}_s(A) \bar{H}^{\varrho'}_\sigma(\bar{A}) \omega^{s\sigma} \tag{7.1}$$

geschrieben werden. Sind die Matrizen H und $\bar{H}$ in (7.1) gleich A und $\bar{A}$, so werden wir ω ein *Produkttensor* nennen (J. A. Schouten nennt dies Objekt Verbindungsgröße (connecting quantity) [7], S. 13, und S. Gołąb [1], S. 152, (4.57) Verzweigungstensor, wielkość rozdwojona, tensor rozdwojony). Darum wird das Objekt mit der Transformationsformel (7.1) der *verallgemeinerter* oder $(H, \bar{H})$*-Produkttensor* genannt (vgl. [2], S. 5, Def. 2.1).

Aus (7.1) ergibt sich, daß die Bestimmung aller verallgemeinerten Produkttensoren auf die Bestimmung aller Lösungen der multiplikativen Funktionalgleichung (6.1) und (6.3) zurückgeführt werden kann.

Weiter hat A. Zajtz gezeigt (mündliche Mitteilung), daß (6.7) die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (5.3) darstellt. Daraus folgt, daß die verallgemeinerten Produkttensoren die einzigen linearen homogenen Produktobjekte erster Klasse sind.

§ 8. Zwei Spezialfälle. Wir betrachten noch zwei Spezialfälle der Objekte (7.1).

a) Wir nehmen an, daß die Matrix $\bar{H}$ nur von der Determinante $\bar{J}$ der Matrix $\bar{A}$ abhängt. Es ist immer der Fall, wenn $\bar{m}$ kleiner als $\bar{n}$ ist (vgl. [4], Satz 3.1). In diesem Falle hat die Transformationsformel (7.1) folgende Form:

$$\omega^{r'\varrho'} = H^{r'}_{s}(A)\bar{H}^{\varrho'}_{\sigma}(\bar{J})\,\omega^{s\sigma}\,. \tag{8.1}$$

Das Objekt (8.1) wird das verallgemeinerte oder *H-Produktlinear* genannt (vgl. [5]).

b) Ist endlich die Matrix $\bar{H}$ in (8.1) von der ersten Ordnung, d.h. eine Funktion von $\bar{J}$,

$$\bar{H}(\bar{J}) = \varphi(\bar{J})\,,$$

so wird (8.1) eine verallgemeinerte oder *H-Produkttensordichte* genannt. Sie hat also folgende Transformationsformel:

$$\omega^{r'} = \varphi(\bar{J})H^{r'}_{s}(A)\,\omega^{s}\,.$$

§ 9. Verbindungsobjekte. Wir bezeichnen wie oben mit $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $\bar{n}$. Dann nehmen wir an, daß das Produkt dieser Mannigfaltigkeiten nicht leer ist, d.h.

$$\mathfrak{M}_n \cap \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}} \neq 0\,.$$

Dieser Fall kommt z.B. vor, wenn $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ in $\mathfrak{M}_n$ enthalten ist oder wenn $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ und $\mathfrak{M}_n$ die Untermannigfaltigkeiten einer anderen Mannigfaltigkeit sind.

Es sei p_0 ein Punkt der zu den Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ gehört:

$$p_0 \in \mathfrak{M}_n \cap \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}\,.$$

Produktobjekt der Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_n$ und $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ im Punkte p_0 heißt *Verbindungsobjekt* dieser Mannigfaltigkeiten im Punkte p_0.

Aus dieser Definition erhält man folgende Eigenschaften des Verbindungsobjektes:

1. Verbindungsobjekt ist ein Spezialfall des Produktobjektes.

2. Verbindungsobjekt ist nur für gemeinsame Punkte zweier Mannigfaltigkeiten definiert.

Für die Verbindungsobjekte kann man also ganze Theorie der Produktobjekte anwenden. Insbesondere werden die Verbindungsobjekte durch dieselben Formeln (3.1), (3.2), (3.3) u.s.w., wie Produktobjekte ausgedrückt. Dann aber stellen ξ_0^i, η_0^a in diesen Formeln immer die Koordinaten desselben Punktes p_0 auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ bzw. $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{n}}$ dar.

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1966.

[2] M. Kucharzewski, *Einige Bemerkungen über die linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse*, Ann. Polon. Math. 19 (1967), S. 1-12.

[3] — and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Mat. 43 (1964).

[4] — und A. Zajtz, *Über die linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus* $[m, n, 1]$, *wo* $m \leqslant n$ *ist*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), S. 205-225.

[5] A. E. Liber (А. Е. Либер), *О дифференциальных комитантах некоторых линейных объектов*, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 6 (1960), S. 158-162.

[6] Z. Moszner, *Sur la notion d'objet géométrique attaché, I*, Ann. Polon. Math. (ce volume), pp. 251-257.

[7] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, Berlin-Göttingen-Heildeberg 1954.

Reçu par la Rédaction le 9. 6. 1965