ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1971)

Les solutions non négatives d'un système d'équations différentielles

par W. Bodanko (Częstochowa)

Considérons un système d'équations

$$u_t^i = \sum_{|p|\leqslant m} a_p^i(x,t) D^p u^i + \sum_{\substack{k/1 \\ k\neq i}}^{s} c_k^i(x,t) u^k, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

dont les coefficients sont définis dans une couche $H = E_n \times (0, T)$, où $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $|p| = p_1 + \ldots + p_n$, $D^p = D_1^{p_1} \ldots D_n^{p_n}$, $D_{x_k}^{p_i} = \partial^{p_i}/\partial x_k^{p_i}$.

Définition 1. Nous disons que la fonction $f(x, t)$ est *m-régulière* dans $\bar{H}$ si elle admet des dérivées f_t, $D^p f$ ($|p| \leqslant m$) continues dans H et si elle est continue dans $\bar{H}$.

Définition 2. Nous disons que la fonction $g(x, t)$ est de *classe* E_a ($a > 0$) dans H, s'il existe un nombre positif A tel que

$$|g(x, t)| \leqslant \exp\{A(r^2+1)^{a/2}\} \quad \text{pour } (x, t) \in H \text{ et } r^2 = \sum_{i/1}^{n} x_i^2,$$

Définition 3. Nous disons que la fonction $h(x, t)$ est de *classe* E_∞ dans H, s'il existe des nombres positifs A et a tels que

$$|h(x, t)| \leqslant \exp\{A(r^2+1)^a\} \quad \text{pour } (x, t) \in H.$$

Définition 4. Soit $j = (j_1, \ldots, j_n)$. Nous disons que $j \leqslant p$ si $j_k \leqslant p_k$ pour $k = 1, \ldots, n$ et $p - j \overset{\text{df}}{=} (p_1 - j_1, \ldots, p_n - j_n)$.

Théorème I. *Nous supposons que $m \geqslant 2$ et que:*

1. *les fonctions $D^j a_p^i$ ($i = 1, \ldots, s$, $j \leqslant p$, $|p| \leqslant m$) sont bornées dans $\bar{H}$ et localement intégrables,*

2. *les fonctions c_k^i ($i, k = 1, \ldots, s$, $i \neq k$) sont localement intégrables, de classe $E_{\frac{m}{m-1}}$ et $c_k^i \leqslant 0$ dans $\bar{H}$,*

3. *les fonctions $u^i(x, t)$ ($i = 1, \ldots, s$) sont des solutions du système* (1), *non négatives, m-régulières dans $\bar{H}$.*

De plus les fonctions $u^i(x, t)$ sont de classe $E_{\frac{m}{m-1}}$ dans H et $u^i(x, 0) = 0$ pour $x \in E_n$ ($i = 1, \ldots, s$).

Alors $u^i(x, t) = 0$ *pour* $(x, t) \in H$ *et* $i = 1, \ldots, s$.

Démonstration. Choisissons $h \in (0, T)$ et i $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Nous démontrerons que $u^i(x, t) = 0$ dans $H_1 = E_n \times [0, h]$.

Multiplions la $i^{\text{ème}}$ équation du système (1) par une fonction $\varphi(x, t)$ de classe C^m dans H_1 s'annulant en dehors d'un cylindre $D \subset \bar{H}_1$.

La classe des fonctions ayant les propriétés ci-dessus sera désignée par $C_m^0(H_1)$.

Nous intégrons cette expression et nous profitons des égalités:

$$D^p(a_p^i \varphi) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant p} \binom{p}{j} D^{p-j} a_p^i D^j \varphi \quad (|p| \leqslant m), \qquad \text{où} \binom{p}{j} = \binom{p_1}{j_1} \ldots \binom{p_n}{j_n}.$$

Alors nous avons l'égalité

$$\int_{H_1} \Big\{ \sum_{|p| \leqslant m} a_p^i D^p u^i \varphi(x, t) - u_t^i \varphi + \sum_{\substack{k/1 \\ k \neq i}}^{s} c_k^i u^k \varphi \Big\}\, dx\, dt$$

$$= \int_{H_1} u^i \Big\{ \sum_{|p| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p(a_p^i \varphi) + \varphi_t \Big\}\, dx\, dt - \int_{t=h} u^i \varphi dx + \int_{H_1} \sum_{\substack{k/1 \\ k \neq i}}^{s} c_k^i u^k \varphi\, dx\, dt$$

$$= \int_{H_1} u^i \Big\{ \sum_{|p| \leqslant m} \sum_{0 \leqslant j \leqslant p} (-1)^{|p|} \binom{p}{j} D^{p-j} a_p^i D^j \varphi + \varphi_t \Big\}\, dx\, dt -$$

$$- \int_{t=h} u^i\, \varphi dx + \int_{H_1} \sum_{\substack{k/1 \\ k \neq i}}^{s} c_k^i u^k \varphi dx\, dt$$

$$= \int_{H_1} u^i \Big\{ \sum_{|j| \leqslant m} D^j \varphi \sum_{\substack{p \geqslant j \\ |p| \leqslant m}} b_j^p \binom{p}{j} D^{p-j} a_p^i + \varphi_t \Big\}\, dx\, dt -$$

$$- \int_{t=h} u^i \varphi dx + \int_{H_1} \sum_{\substack{k/1 \\ k \neq 1}}^{s} c_k^i u^k \varphi dx\, dt = 0,$$

où b_j^p sont des constantes.

Nous écrirons

$$\text{(2)} \qquad \int_{H_1} u^i \Big\{ \sum_{|j| \leqslant m} \bar{a}_j^i D^j \varphi + \varphi_t \Big\}\, dx\, dt - \int_{t=h} u^i \varphi dx + \int_{H_1} \sum_{\substack{k/1 \\ k \neq i}}^{s} c_k^i u^k \varphi dx\, dt = 0$$

où

$$\bar{a}_j^i = \sum_{\substack{p \geqslant j \\ |p| \leqslant m}} b_j^p \binom{p}{j} D^{p-j} a_p^i \qquad \text{pour } \varphi(x,t) \in C_m^0(H_1).$$

Soit $\gamma_R(x)$ une famille de fonctions jouissant des propriétés suivantes:

$$\text{(a)} \qquad \gamma_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leqslant R, \\ 0 & \text{pour } |x| \geqslant R+1. \end{cases}$$

(b) Les fonctions $\gamma_R(x)$ sont de classe C^m dans E_n.

(c) $\sum_{|p|\leqslant m} |D^p \gamma_R(x)| \leqslant K$, la constante K ne dépendant pas de R:

Posons

$$\varphi(x,t) = \gamma_R(x)\exp\{-a(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}.$$

La fonction $\varphi(x,t)\in C_m^0(H_1)$ pour a et β arbitraires.

Nous mettons cette fonction dans (2). On peut choisir $\bar{a}>1$ te que pour $R\to\infty$ l'égalité (2) admette la forme

$$(3)\quad \int_{H_1} u^i\Big[\sum_{|j|\leqslant m} \bar{a}^i_j D^j \exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\} - \\ -\bar{a}\beta(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}\Big]dx\,dt - \\ -\int_{t=h} u^i \exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}\,dx + \\ +\int_{H_1}\sum_{\substack{k/1\\k\neq 1}}^{s} c^i_k u^k \exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}\,dx\,dt = 0$$

pour $\beta\geqslant 1$ arbitraire.

D'après l'inégalité

$$|D^j \exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}| \\ \leqslant \exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}M_1 a^{|j|}e^{|j|\beta t}(r^2+1)^{|j|\left(\frac{m}{2(m-1)}-\frac{1}{2}\right)} \\ \text{pour } |j|\leqslant m$$

nous avons

$$(4)\quad \sum_{|j|\leqslant m}\bar{a}^i_j D^j\cdot\exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\} - \\ -\bar{a}\beta(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\cdot\exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\} \\ \leqslant \exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}\Big[M_2 e^{m\beta t}(r^2+1)^{m\left[\frac{m}{2(m-1)}-\frac{1}{2}\right]} - \bar{a}\beta(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}\Big] \\ \leqslant \exp\{-\bar{a}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-1)}}e^{\beta t}\}(r^2+1)^{\frac{m}{2(m-2)}}[M_2e^{m\beta t}-\beta]<0$$

pour $\beta > M_2 e$ et $(x,t)\in H_1 = E_n\times[0,h]$, où $h = 1/\beta m$. D'après (3) et (4) $u^i = 0$ dans H_1.

On divise ensuite la couche H en couches partielles par les plans $t = l\cdot h$, $l = 1,\ldots,r$, et on établit de proche en proche l'égalité $u^i = 0$ dans ces couches.

Dans le cas $m = 1$ nous considérons le système

$$(1') \qquad u_t^i = \sum_{l/1}^{n} a_l^i(x, t) u_{x_l}^i + \sum_{k/1}^{s} c_k^i(x, t) u^k, \quad i = 1, \ldots, s.$$

THÉORÈME II. *Nous supposons que*:

1. *Les fonctions* a_l^i, $(a_l^i)_{x_l}$, c_l^l *remplissent les conditions suivantes*:

$$|a_l^i| \leqslant M(r^2+1)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \ldots, s,$$
$$|(a_l^i)_{x_l}| \leqslant M(r^2+1)^{\lambda}, \quad l = 1, \ldots, n,$$
$$|c_l^l| \leqslant M(r^2+1)^{\lambda}, \quad \lambda \text{ arbitraire}$$

pour $(x, t) \epsilon H$ *et sont localement intégrables dans* $\overline{H}$.

2. *Les fonctions* c_k^i *sont localement intégrables dans* H, $c_k^i \leqslant 0$ *et* $c_k^i \epsilon E_\infty$ *pour* $i, k = 1, \ldots, s$, $i \neq k$.

3. *Les fonctions* u_i $(i = 1, \ldots, s)$ *sont des solutions, non négatives et* 1-*régulières dans* $\overline{H}$, *du système* (1').

De plus les fonctions u^i *sont de classe* E_∞ *dans* H *et* $u_i(x, 0) = 0$ *pour* $x \epsilon E_n$.

Alors $u_i = 0$ *pour* $(x, t) \epsilon H$ *et* $i = 1, \ldots, s$.

Démonstration. Multiplions la $i^{\text{ème}}$ équation du système (1') par une fonction $\varphi(x, t)$ de classe $C_1^0(H)$ et intégrons cette expression. Alors

$$\int_H \Big[\sum_{l/1}^{n} a_l^i u_{x_l}^i \varphi - u_t^i \varphi + \sum_{k/1}^{s} c_k^i u^k \varphi\Big] dx\, dt$$
$$= \int_H u^i \Big[\sum_{l/1}^{n} -a_l^i \varphi_{x_l} + c\varphi + \varphi_t\Big] dx\, dt - \int_{t=T} u^i \varphi dx + \int_H \sum_{\substack{k/1 \\ k \neq i}}^{s} c_k^i u^k \varphi dx\, dt = 0,$$

où $c = \sum_{l/1}^{n} -(a_l^i)_{x_l} + c_i^i$.

En appliquant la méthode de la démonstration du Théorème I nous obtenons

$$\int_H u^i \exp\{-a(r^2+1)^\mu e^{\beta t}\} \cdot a \cdot e^{\beta t} \Big[\mu \sum_{l/1}^{n} a_l^i (r^2+1)^{\mu-1} 2x_l +$$
$$+ a^{-1} e^{-\beta t} c - \beta (r^2+1)^\mu\Big] dx\, dt - \int_{t=T} u^i \exp\{-a(r^2+1)^\mu e^{\beta t}\} dx +$$
$$+ \int_H \sum_{\substack{k/1 \\ k \neq 1}}^{s} c_k^i u^k \exp\{-a(r^2+1)^\mu e^{\beta t}\} dx\, dt = 0$$

pour $a \geqslant \bar{a}$, $\mu \geqslant \bar{\mu}$ et $\beta > 0$ arbitraire.

Puisque

$$\mu\sum_{l=1}^{m} a_l^i(r^2+1)^{\mu-1}2x_l+\alpha^{-1}e^{-\beta t}c-\beta(r^2+1)^{\mu}\leqslant M_1(r^2+1)^{\mu}-\beta(r^2+1)^{\mu}<0$$

pour $\beta > M_1$, $\mu \geqslant \lambda$

on a bien $u^i = 0$ dans H.

Reçu par la Rédaction le 16. 12. 1969