ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVI (1979)

Sur la géométrie du fibré tangent à une variété finslérienne compactes

par H. AKBAR-ZADEH et A. WĘGRZYNOWSKA (Paris)

Résumé. $V(M)$ étant la variété fibré des vecteurs non nuls tangents à une variété finslérienne M, munie de la métrique riemannienne (1.1), on définit la dérivation covariante riemannienne en fonction de la dérivation covariante finslérienne et les tenseurs de torsion et de courbure. On démontre que „la courbure sectionelle horizontale" est majorée par la courbure sectionnelle finslérienne et on étudie le cas où la courbure scalaire est constante. On établit l'expression explicite du tenseur de torsion de la structure presque complexe $\mathscr{I}$ associée à la connexion finslérienne ainsi que la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de cette structure. On caractérise les champs de vecteurs presque complexes, d'abord localement, puis dans le cas compact on prouve que le plus grand groupe connexe des transformations presque complexes coïncide avec le plus grand groupe connexe d'isométries.

Introduction. Ce travail est consacré à l'étude de la géométrie riemannienne du fibré tangent à une variété finslérienne, ainsi qu'à la structure presque complexe définie sur ce fibré par la connexion finslérienne. On munie le fibré $V(M)$ des vecteurs non nuls tangents à une variété finslérienne M de la métrique riemannienne (1.1), on définit la dérivation covariante riemannienne associée à cette métrique en fonction de la dérivation covariante finslérienne et les tenseurs de torsion et de courbure. On démontre que la courbure sectionnelle suivant les 2-plans horizontaux de $V(M)$, dans la connexion riemannienne est majorée par la courbure sectionnelle finslérienne. On étudie le cas où la courbure scalaire de $V(M)$ est constante. On introduit la structure presque complexe $\mathscr{I}$ associée à la connexion finslérienne (1) et on établit l'expression du tenseur de torsion de $\mathscr{I}$ en fonction de tenseur de courbure de la connexion finslérienne en donnant la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de cette structure. Les champs de vecteurs presque complexes ont été étudiés, d'abord localement, puis lorsque la variété M est compacte, on démontre que dans ce cas la composante connexe du groupe de transformations presque complexes se compose d'isométries. Et enfin on introduit la structure presque kählérienne naturelle sur $V(M)$.

0. Rappel. (a) Soit M une variété différentiable, connexe, paracompacte de dimension n et de classe C^∞. On désignera par $T(M)\to M$ le fibré des vecteurs tangents à M, par $p\colon V(M) \to M$ le fibré des vecteurs non nuls tangents à M, par $\pi\colon W(M) \to M$ le fibré des directions orientées tangentes à M. Un point de $V(M)$ sera noté par $z = (x, v)$ où $x = pz \in M$ et $v \in T_{pz}$ et un point de W par y ($\pi y = x$). Dans la suite on notera par $DV(M)$ l'anneau des fonctions différentiables sur $V(M)$, par $\chi V(M)$ le $DV(M)$-module des champs des vecteurs sur $V(M)$, par $p^{-1}T(M)$ le fibré image réciproque de $T(M)$ par $p\colon V(M) \to M$. On désignera par $\underline{p^{-1}T(M)}$ le $DV(M)$-module des sections différentiables de $p^{-1}T(M)$. Les éléments de $\underline{TV(M)}$ et de $\underline{p^{-1}T(M)}$ seront notés respectivement par $\hat{X}$ et X.

Soit ∇-une loi de dérivation covariante dans $\underline{p^{-1}T(M)}$, c'est-à-dire une application

$$\nabla\colon \chi V(M) \times \underline{p^{-1}T(M)} \to \underline{p^{-1}T(M)}$$

satisfaisant à la condition de dérivation covariante. Pour tout $z \in V(M)$ on définit une application linéaire $\mu_z\colon T_z V(M) \to T_{pz}(M)$ définie par:

$$\mu_z(\hat{X}) = \nabla_{\hat{X}} v, \qquad \hat{X} \in \chi V(M). \tag{0.1}$$

Soit V_z l'ensemble des vecteurs verticaux en z, c'est-à-dire des vecteurs qui sont tangents à la fibre passant par z ($V_z = \ker p_*$ où $p_*\colon TV(M) \to T(M)$).

Définition [3]. La connexion ∇ est dite *regulière* si pour tout $z \in V(M)$ μ_z définit un isomorphisme de V_z sur $T_{pz}(M)$.

Supposons ∇ régulière si $H_z = \ker \mu_z$ alors $T_z V(M)$ est somme directe de H_z et V_z:

$$T_z V(M) = H_z \oplus V_z \qquad (H_z \cap V_z = 0) \ (z \in V(M)) \tag{0.2}$$

où H_z sera appelé l'espace horizontal défini par ∇. D'après la relation précédente tout vecteur $\hat{X} \in T_z V(M)$ peut être décomposé en:

$$\hat{X} = H\hat{X} + V\hat{X} \tag{0.3}$$

où $H\hat{X}$ (resp. $V\hat{X}$) est la partie horizontale (resp. verticale).

On définit encore l'application $DV(M)$-linéaire $\varrho\colon TV(M) \to p^{-1}T(M)$ telle que:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & p^{-1}T(M) \arrow[d, "\beta"] & \\ M & V(M) \arrow[l, "p"'] & TV(M) \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[ul, "\varrho"'] \end{tikzcd} \qquad \beta \circ \varrho = \alpha \tag{0.4}$$

On a:

$$\varrho(\hat{X}) = \varrho(H\hat{X} + V\hat{X}) = \varrho(H\hat{X}) = X \tag{0.5}$$

où $V_z = \ker \varrho$. Posons comme dans [3]:

$$T(\hat{X}, \hat{Y}) = \nabla_{\hat{X}} Y - \nabla_{\hat{Y}} X - \varrho([\hat{X}, \hat{Y}]), \tag{0.6}$$

$$\Omega(\hat{X}, \hat{Y}) Z = \nabla_{\hat{X}} \nabla_{\hat{Y}} Z - \nabla_{\hat{Y}} \nabla_{\hat{X}} Z - \nabla_{[\hat{X}, \hat{Y}]} Z \tag{0.7}$$

où $\hat{X}$, $\hat{Y}$ et $\hat{Z} \in \chi V(M)$ et $X = \varrho(\hat{X})$, $Y = \varrho(\hat{Y})$ et $Z = \varrho(\hat{Z})$.

On démontre que T est $DV(M)$-bilinéaire antisymétrique sur $\chi V(M)$ à valeurs dans $p^{-1}T(M)$ et Ω est $DV(M)$-bilinéaire antisymétrique en $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ à valeurs dans l'espace des endomorphismes des sections $V(M) \to p^{-1}T(M)$. Ce qui montre leur caractère tensoriel. On appele T et Ω la torsion et la courbure de ∇. Elles satisfont aux identités dites de Bianchi [3].

DÉFINITION [3]. Une *variété finslérienne* est définie par la donnée d'une variété M, de dimension n, de classe C^∞ et d'une fonction L sur $T(M)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $L > 0$ et C^1 sur $T(M)$, C^∞ sur $V(M)$;

2° $L(x, \lambda v) = \lambda L(x, v)$ $\forall_\lambda \in R^+$;

3° Posons $F = \frac{1}{2}L^2$ si $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont deux champs de vecteurs verticaux sur $V(M)$ et constants sur les fibres $V(M) \to M$ alors le Hessien $F_{**}(\hat{X}, \hat{Y})(z) = \hat{X}(\hat{Y}(F))(z) = g_z(\hat{X}, \hat{Y})$ $\forall_z \in V(M)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Soit $U, V, \ldots$ un recouvrement de M muni des coordonnées locales (x^i). Soit (x^i, v^i) $(i = 1, \ldots, n)$ les coordonnées induites sur $p^{-1}(U)$ où $v = v^i \dfrac{\delta}{\delta x^i} \in T_{pz}$ de $L^2(x, v)$ on déduit par dérivation:

$$g_{ij} = \dot{\delta}_{ij}(\tfrac{1}{2}L^2) \qquad (\dot{\delta}_i = \delta/\delta v^i). \tag{0.8}$$

Par rapport à ce recouvrement g_{ij} étant un tenseur homogène de degré zéro on a:

$$g_{ij}v^i v^j = g_z(v, v) = L^2. \tag{0.9}$$

THÉORÈME [1]. *Il existe sur $V(M)$ une connexion régulière unique attachée à L telle que:*

1° $\nabla_{\hat{Z}}\, g = 0$,

2° $T(H\hat{X}, H\hat{Y}) = 0$,

3° $g_z(T(V\hat{X}, \hat{Y}), \varrho(\hat{Z})) = g_z(T(V\hat{X}, \hat{Z}), \varrho(\hat{Y}))$

où $\hat{X}$, $\hat{Y}$ et $\hat{Z} \in TV(M)$. Dans ces conditions ∇ est une connexion de direction.

La loi de dérivation covariante est définie d'après le théorème précédent par:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\hat{X}} Y, Z) = {} & \hat{X}g(Y, Z) + \hat{Y}g(X, Z) - \hat{Z}g(X, Y) + \\ & + g(T(\hat{X}, \hat{Y}), Z) + g(T(\hat{Z}, \hat{X}), Y) + \\ & + g(T(\hat{Z}, \hat{Y}), X) + g(\varrho([\hat{X}, \hat{Y}]), Z) + \\ & + g(\varrho([\hat{Z}, \hat{X}]), Y) + g(\varrho([\hat{Z}, \hat{Y}]), X) \end{aligned} \tag{0.10}$$

où nous avons posé: $X = \varrho(\hat{X})$, $Y = \varrho(\hat{Y})$ et $Z = \varrho(\hat{Z})$. La connexion ∇ sera dite la connecion finslérienne attachée à L.

(b) Soit ω^i_j la 1-forme de connexion finslérienne. On sait [1] que pour la connexion régulière ω^i_j l'ensemble $(dx^i, \nabla v^i)$ $(v \in T_{pz}(M))$ constitue un corepère de l'espace vectoriel $T_z V(M)$ où:

$$\nabla v^i = dv^i + \omega^i_j v^j = dv^i + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} dx^k \quad (\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} = v^j \overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}). \tag{0.11}$$

Désignons par δ_k et $\delta_{\dot{k}}$ (resp. ∂_k et $\partial_{\dot{k}}$) les dérivées pfaffiennes par rapport aux corepères naturels (dx^i, dv^i) (resp. par rapport aux corepères adaptés $(dx^i, \nabla v^i)$). On a entre ces différentes dérivations les relations suivantes:

$$\partial_i = \delta_i - \overset{*}{\Gamma}{}^r_{0i} \delta_{\dot{r}}, \qquad \partial_{\dot{i}} = \delta_{\dot{i}}. \tag{0.12}$$

En posant:

$$A^a_\alpha = \begin{pmatrix} \delta^j_i & -\overset{*}{\Gamma}{}^j_{0i} \\ 0 & \delta^j_i \end{pmatrix}; \qquad A^\beta_a = \begin{pmatrix} \delta^i_h & \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0h} \\ 0 & \delta^i_h \end{pmatrix} \tag{0.13}$$

où $A^a_\alpha A^\beta_a = \delta^\beta_\alpha$ $(\alpha, a = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n})$ on obtient:

$$\partial_\alpha = A^a_\alpha \delta_a; \qquad \delta_a = A^\beta_a \partial_\beta \tag{0.14}$$

avec les notations évidentes:

$$\delta_a = (\delta_k, \delta_{\dot{k}}), \qquad \partial_\alpha = (\partial_k, \delta_{\dot{k}}) \tag{0.15}$$

où:

$$\delta_a = \begin{cases} \delta_k & \text{si } a = k, \\ \delta_{\dot{k}} & \text{si } a = \bar{k}, \end{cases} \qquad \partial_\alpha = \begin{cases} \partial_k & \text{si } \alpha = k, \\ \delta_{\dot{k}} & \text{si } \alpha = \bar{k}. \end{cases}$$

Soit $x \in M$, $U(x^i)$ et $U'(x^{i'})$ $(U \cap U' \neq \emptyset)$ deux cartes locales contenant x on a:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^j), \qquad v^{i'} = a^{i'}_j v^j \quad (a^{i'}_j = \delta x^{i'}/\delta x^j) \tag{0.16}$$

et un calcul simple nous montre que:

$$\begin{pmatrix} \delta_{j'} \\ \delta_{\dot{j}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^i_{j'} & v^{s'} \delta_{j'} a^i_{s'} \\ 0 & a^i_{j'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_{\dot{i}} \end{pmatrix} \tag{0.17}$$

donc la matrice de passage de repère naturel δ_a à $\delta_{a'}$ est un élément de $GL(2n, R)$. On en déduit un fibré principal de groupe structural $GL(2n, R)$ de base $V(M)$ que nous désignons par $\mathscr{E}(V(M))$. D'après (0.16) les dérivées pfaffiennes ∂_a, $\partial_{a'}$ se transforment en corepères adaptés selon:

$$\begin{pmatrix}\partial_{j'}\\ \dot\partial_{j'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^i_{j'} & 0\\ 0 & a^i_{j'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_i\\ \dot\delta_i\end{pmatrix}. \tag{0.18}$$

Ainsi les repères ∂_a, adaptés à la décomposition (0.3), se transforment selon la formule (0.18) où la matrice inversible $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ appartient à $GL(2n, R)$. Mais l'ensemble de ces matrices définit un groupe isomorphe au groupe $GL(n, R)$. Désignons par $E(V(M))$ le fibré principal correspondant qui est un sous-fibré principal de $\mathscr{E}V(M)$ il est isomorphe au fibré principal des repères induits $p^{-1}E(M)$.

(c) Soit $\mathscr{E}V(M)$ le fibré principal défini ci-dessus et γ une connexion infinitésimale de $\mathscr{E}V(M)$. Une telle connexion définit une loi de dérivation covariante dans $V(M) \to TV(M)$ notée D. Si (δ_a) est une section locale de $\mathscr{E}V(M)$ au dessus de $p^{-1}(U)$ on a:

$$D(\delta_a) = \gamma^b_a \delta_b. \tag{0.19}$$

D'après (0.14) une telle section induit une section locale (∂_a) de $EV(M)$ au dessus de $p^{-1}(U)$ (on appele ∂_a une section adaptée) de sorte que l'on a:

$$\delta_a = A^a_a \partial_a \tag{0.20}$$

de (0.19) et (0.20) il résulte:

$$D(A^a_a \partial_a) = \gamma^b_a A^a_b \partial_a \tag{0.21}$$

d'où:

$$D(\partial_\beta) = (A^a_\beta \gamma^b_a A^a_b + A^a_a dA^a_\beta)\partial_a. \tag{0.22}$$

En posant:

$$D(\partial_\beta) = \pi^a_\beta \partial_a \tag{0.23}$$

on obtient:

$$\pi^a_\beta = A^a_\beta \gamma^b_a A^a_b + A^a_a dA^a_\beta. \tag{0.24}$$

C'est la connexion γ rapportée aux repères adaptés (∂_a), d'où:

$$\pi^a_\beta = \begin{pmatrix}\gamma^i_j - \overset{*}{\Gamma}{}^s_{0j}\gamma^i_{\bar s} & \gamma^k_j \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} - \overset{*}{\Gamma}{}^r_{0j}\gamma^{\bar i}_{\bar r} + \gamma^{\bar i}_j - \overset{*}{\Gamma}{}^s_{0j}\gamma^k_{\bar s}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} - d\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0j}\\ \gamma^i_{\bar j} & \gamma^{\bar i}_{\bar j} + \gamma^s_{\bar j}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0s}\end{pmatrix} \tag{0.25}$$

et γ s'exprime en fonction de π par:

$$\gamma^a_b = \begin{pmatrix}\pi^i_j + \overset{*}{\Gamma}{}^s_{0j}\pi^i_{\bar s} & \pi^{\bar i}_j - \pi^k_j \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} + \overset{*}{\Gamma}{}^r_{0j}\pi^{\bar i}_{\bar r} - \overset{*}{\Gamma}{}^r_{0j}\pi^s_{\bar r}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0s} + d\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0j}\\ \pi^i_{\bar j} & \pi^{\bar i}_{\bar j} - \pi^s_{\bar j}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0s}\end{pmatrix} \tag{0.26}$$

Si Σ et τ sont les formes de torsion de la connexion linéaire respectivement par rapport aux repères adaptés ∂_a et naturels δ_a de la formule de changement de repères il résulte:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^i &= \tau^i && (i = 1, \ldots, n), \\
\Sigma^{\bar{i}} &= \tau^{\bar{i}} + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k}\tau^k && (i = 1, \ldots, n),
\end{aligned}
\tag{0.27}
$$

où:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^\alpha &= d\sigma^\alpha + \pi^\alpha_\beta \wedge \sigma^\beta, \\
\tau^a &= d(dx^a) + \gamma^a_b \wedge dx^b && (\alpha, a = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n})
\end{aligned}
\tag{0.28}
$$

et nous avons posé:

$$
\sigma^\alpha = \begin{cases} dx^i & \text{si } \alpha = i, \\ \nabla v^i & \text{si } \alpha = \bar{i}, \end{cases}
\qquad
dx^a = \begin{cases} dx^i & \text{si } a = i, \\ dv^i & \text{si } a = \bar{i}. \end{cases}
\tag{0.29}
$$

Si nous désignons par Λ (resp. π) le 2-forme de courbure de la connexion γ par rapport aux repères naturels (resp. par rapport aux repères adaptés) d'après (0.24) on obtient:

$$
\pi^\alpha_\beta = A^a_\beta \Lambda^b_a A^a_b. \tag{0.30}
$$

On peut en déduire les relations entre les différentes composantes des tenseurs de courbure.

1. Métrique riemannienne de $V(M)$.

(a) On munie la variété $V(M)$ de la métrique riemannienne:

$$
dS^2_V = g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}\nabla v^i \nabla v^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1.1}
$$

où g_{ij} est le tenseur métrique finslérienne.

Soit encore:

$$
dS^2_V = G_{\alpha\beta}\sigma^\alpha\sigma^\beta \tag{1.2}
$$

où σ^α est défini par (0.29). Ainsi le tenseur $(G_{\alpha\beta})$ s'écrit par rapport au corepère adapté:

$$
(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g_{ij}(z) & 0 \\ 0 & g_{ij}(z) \end{pmatrix} \qquad (z \in V(M)) \tag{1.3}
$$

et son inverse sera:

$$
G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{ij}(z) & 0 \\ 0 & g^{ij}(z) \end{pmatrix}. \tag{1.4}
$$

D'autre part les matrices G et G^{-1} s'écrivent par rapport aux corepères naturels (dx^i, dv^i):

$$(1.5)\qquad (G_{ab}) = \begin{pmatrix} G_{ij} & G_{i\bar{j}} \\ G_{\bar{i}j} & G_{\bar{i}\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{rs}\overset{*}{\Gamma}{}^r_{0i}\overset{*}{\Gamma}{}^s_{0j} & g_{sj}\overset{*}{\Gamma}{}^s_{0i} \\ g_{ir}\overset{*}{\Gamma}{}^r_{0j} & g_{ij} \end{pmatrix}$$

et:

$$(1.6)\qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{hj} & -\overset{*}{\Gamma}{}^h_{0r}g^{rj} \\ -g^{hr}\overset{*}{\Gamma}{}^j_{0r} & g^{hj} + g^{kl}\overset{*}{\Gamma}{}^h_{0k}\overset{*}{\Gamma}{}^j_{0l} \end{pmatrix}.$$

On se propose d'étudier cette métrique en relation avec la métrique finslérienne.

(b) Connexion riemannienne associée à la métrique dS^2_V. Soit $\mathscr{E}V(M)$ le fibré principal de repères linéaires sur $V(M)$ du groupe structural $GL(2n, R)$. Il existe sur $\mathscr{E}V(M)$ une connexion infinitésimale unique γ telle que [9]:

$$(1.7)\qquad \begin{matrix} 1^\circ & (D_{\hat{X}}G)(\hat{Y}, \hat{Z}) = 0 \\ 2^\circ & \Sigma(\hat{X}, \hat{Y}) = 0 \end{matrix} \qquad \forall \hat{X}, \hat{Y} \text{ et } \hat{Z} \in \chi V(M)$$

où G est détérminée par (1.3) et D est définie par l'équation suivante:

$$(1.8)\qquad 2G(D_{\hat{X}}\hat{Y}, \hat{Z}) = \hat{X}G(\hat{Y}, \hat{Z}) + \hat{Y}G(\hat{X}, \hat{Z}) - \hat{Z}G(\hat{X}, \hat{Y}) + \\ + G([\hat{X}, \hat{Y}], \hat{Z}) + G([\hat{Z}, \hat{X}], \hat{Y}) + G([\hat{Z}, \hat{Y}], \hat{X}).$$

Il s'agit d'exprimer la loi de dérivation covariante D, définie par (1.8), en fonction de la dérivation covariante finslérienne. Pour ce faire soient $\hat{X}$, $\hat{Y}$ et $\hat{Z}$ des éléments de $TV(M)$ tels que:

$$(1.9)\qquad \dot{X} = \nabla_{V\hat{X}}v = \mu(V\hat{X}) = \varrho(H\hat{X}) = X$$

de même pour $\hat{Y}$ et $\hat{Z}$. En tenant compte de la formules (0.10), (1.8) et en posant: $\hat{Y} = \hat{H}Y$, $\hat{Z} = H\hat{Z}$ on obtient:

$$(1.10)\qquad G(D_{\hat{X}}H\hat{Y}, H\hat{Z}) = g(\nabla_{\hat{X}}Y, Z) + \tfrac{1}{2}g\big(R(Y, Z)v, X\big).$$

De même si l'on pose dans (1.8): $\hat{Y} = H\hat{Y}$ et $\hat{Z} = V\hat{Z}$ on obtient:

$$(1.11)\qquad G(D_{\hat{X}}H\hat{Y}, V\hat{Z}) = g\big(T(H\hat{Y}, V\hat{Z}), X\big) - g\big((\nabla_{\hat{v}}T)(X, Y), Z\big) - \\ -\tfrac{1}{2}g\big(R(X, Y)v, Z\big)$$

où $\hat{v}$ est horizontal au dessus de v ($\varrho\hat{v} = v$).

Posons $\hat{Y} = V\hat{Y}$ et $\hat{Z} = H\hat{Z}$, on a:

$$(1.12)\quad G(D_{\hat{X}} V\hat{Y}, H\hat{Z}) = -g\big(T(H\hat{X}, V\hat{Y}), Z\big) + g\big((\nabla_{\hat{v}} T)(X, Y), Z\big) + \\ + \tfrac{1}{2} g\big(R(X, Z)v, Y\big).$$

Enfin si l'on pose dans (0.8) $\hat{Y} = V\hat{Y}$ et $\hat{Z} = V\hat{Z}$ on obtient:

$$(1.13)\quad G(D_{\hat{X}} V\hat{Y}, V\hat{Z}) = g(\nabla_{\hat{X}} Y, Z).$$

Les formules (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13) nous donnent la dérivation covariante D en fonction de la dérivation covariante finslérienne ∇, du tenseur de torsion T et de tenseur de courbure R. Des formules précédentes on obtient l'expression de la 1-forme de connexion riemannienne par rapport aux repères adaptés:

$$(1.14)\quad \pi^a_\beta = \begin{pmatrix} \omega^i_j + \frac{1}{2} g^{ih} R_{0khj} \nabla v^k & -(T^i_{jk} - \frac{1}{2} R^i{}_{0jk}) dx^k - \nabla_0 T^i_{jk} \nabla v^k \\ (T^i_{jk} + \frac{1}{2} R_{0j}{}^i{}_k) dx^k + \nabla_0 T^i_{jk} \nabla v^k & \omega^i_j \end{pmatrix}$$

où ω^i_j represente la 1-forme de connexion finslérienne. Désignons par Ω^i_j la 2-forme de courbure finslérienne définie par (0.7) et par π^a_β la 2-forme de courbure de la connexion riemannienne D:

$$(1.15)\quad \Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_r \wedge \omega^r_j = \tfrac{1}{2} R^i{}_{jkl}\, dx^k \wedge dx^l + P^i{}_{jkl} dx^k \wedge \nabla v^l + \\ + \tfrac{1}{2} Q^i{}_{jkl} \nabla v^k \wedge \nabla v^l,$$

$$(1.16)\quad \pi^a_\beta = d\pi^a_\beta + \pi^a_\lambda \wedge \pi^\lambda_\beta = \tfrac{1}{2} \pi^a_{\beta\varrho\mu} \sigma^\varrho \wedge \sigma^\mu.$$

En tenant compte de (1.14), (1.15) et (1.16) nous obtenons les tenseurs de courbure $\pi^a_{\beta\varrho\mu}$ en fonction des tenseurs de torsion et de courbure de la connexion finslérienne par:

$$(a)\quad \pi^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \tfrac{1}{2} g^{ih} R_{0rhj} R^r{}_{0kl} + Q^i_{jkl} - \tfrac{1}{2}(T^r_{jl} R_{0r}{}^i{}_k - T^r_{jk} R_{0r}{}^i{}_l) + \\ + \tfrac{1}{4}(R_{0r}{}^i{}_k R^r{}_{0jl} - R_{0r}{}^i{}_l R^r{}_{0jk}) + \tfrac{1}{2}(T^i_{rk} R^r{}_{0jl} - T^i_{rl} R^r{}_{0jk}),$$

$$(b)\quad \pi^i_{jk\bar{l}} = P^i{}_{jkl} + \tfrac{1}{2} \nabla_k R_{0l}{}^i{}_j - \tfrac{1}{2} \nabla_0 T^r_{kl} R_{0r}{}^i{}_j - \tfrac{1}{2} \nabla_0 T^r_{jl} R_{0r}{}^i{}_k + \\ + T^r_{jk} \nabla_0 T^i_{rl} - \tfrac{1}{2} \nabla_0 T^i_{rl} R^r{}_{0jk} - T^i_{rk} \nabla_0 T^r_{jl},$$

$$(c)\quad \pi^i_{j\bar{k}\bar{l}} = Q^i{}_{jkl} + \tfrac{1}{2}(\nabla_k R_{0l}{}^i{}_j - \nabla_l R_{0k}{}^i{}_j) + \tfrac{1}{4}(R_{0k}{}^i{}_r R_{0l}{}^r{}_j R_{0l}{}^i{}_r R_{0k}{}^r{}_j) - \\ - (\nabla_0 T^i_{rk} \nabla_0 T^r_{jl} - \nabla_0 T^i_{rl} \nabla_0 T^r_{jk}),$$

$$(d)\quad \pi^{\bar{i}}_{jkl} = -(\nabla_k T^i_{jl} - \nabla_l T^i_{jk}) - \nabla_0 T^i_{jr} R^r{}_{0kl} + \tfrac{1}{2}(\nabla_k R^i{}_{0jl} - \nabla_l R^i{}_{0jk}),$$

$$(e)\quad \pi^{\bar{i}}_{jk\bar{l}} = \nabla_l T^i_{jk} + T^i_{jr} T^r_{kl} - \tfrac{1}{2} \nabla_k \nabla_0 T^i_{jl} + \tfrac{1}{2} \nabla_0 T^i_{jr} \nabla_0 T^r_{kl} - \tfrac{1}{2} R^i{}_{ljk} - \\ - \tfrac{1}{2} \nabla_j \nabla_0 T^i_{kl} + \tfrac{1}{2} T^s_{jl} R^i{}_{0sk} + \tfrac{1}{2} \nabla_0 T^i_{ks} \nabla_0 T^s_{jl} + \tfrac{1}{4} R^i{}_0{}^h{}_k R_{0lhj},$$

$$(f)\quad \pi^{\bar{i}}_{j\bar{k}\bar{l}} = -(\nabla_k \nabla_0 T^i_{jl} - \nabla_l \nabla_0 T^i_{jk}) + \tfrac{1}{2}(\nabla_0 T^{ih}_l R_{0khj} - \nabla_0 T^{ih}_k R_{0lhj}),$$

$$\text{(g)}\qquad \pi^{i}_{\bar j kl} = \nabla_k T^i_{jl} - \nabla_l T^i_{jk} + \nabla_0 T^i_{jr} R^r{}_{0kl} + \tfrac{1}{2}(\nabla_k R_{0j}{}^i{}_l - \nabla_l R_{0j}{}^i{}_k),$$

$$\text{(h)}\qquad \pi^{i}_{\bar j k\bar l} = \nabla_k \nabla_0 T^i_{jl} - \nabla_{\bar l} T^i_{jk} - T^i_{jr} T^r_{kl} - \nabla_0 T^i_{jr} \nabla_0 T^r_{kl} - \tfrac{1}{2} R_{0l}{}^i{}_r T^r_{jk} - \\ - \tfrac{1}{2}\nabla_{\bar l} R_{0j}{}^i{}_k - \tfrac{1}{2} R_{0j}{}^i{}_r T^r_{lk} - \tfrac{1}{4} R_{0j}{}^r{}_k R_{0l}{}^i{}_r,$$

$$\text{(i)}\qquad \pi^{i}_{\bar j\bar k\bar l} = \nabla_{\bar k} \nabla_0 T^i_{jl} - \nabla_{\bar l} \nabla_0 T^i_{jk} + \tfrac{1}{2}(R^i{}_{0kr} \nabla_0 T^r_{jl} - R^i{}_{0lr} \nabla_0 T^r_{jk}),$$

$$\text{(j)}\qquad \pi^{\bar i}_{\bar j kl} = R^i{}_{jkl} + Q^i{}_{jkl} - \tfrac{1}{2}(R_{0j}{}^r{}_l T^i_{rk} - R_{0j}{}^r{}_k T^i_{rl}) + \\ + \tfrac{1}{2}(R^i{}_{0rk} T^r_{jl} - R^i{}_{0rl} T^r_{jk}) + \tfrac{1}{4}(R^i{}_{0rk} R_{0j}{}^r{}_l - R^i{}_{0rl} R_{0j}{}^r{}_k),$$

$$\text{(k)}\qquad \pi^{\bar i}_{\bar j k\bar l} = P^i{}_{jkl} - T^i_{rk} \nabla_0 T^r_{jl} + T^r_{jk} \nabla_0 T^i_{rl} + \tfrac{1}{2} R_{0j}{}^r{}_k \nabla_0 T^i_{rl} + \tfrac{1}{2} R^i{}_{0rk} \nabla_0 T^r_{jl},$$

$$\text{(l)}\qquad \pi^{\bar i}_{\bar j\bar k\bar l} = Q^i{}_{jkl} - (\nabla_0 T^i_{rk} \nabla_0 T^r_{jl} - \nabla_0 T^i_{rl} \nabla_0 T^r_{jk}).$$

2. Courbure sectionnelle. (a) Soit $z \in V(M)$, $H\hat X$ et $H\hat Y$ deux vecteurs horizontaux linéairement indépendants en z. On désigne par $\mu(H\hat X, H\hat Y)$ le 2-plan engendré par $H\hat X$ et $H\hat Y$. La courbure sectionnelle en z suivant μ dans la connexion riemannienne D est:

$$\tilde K(z, \mu) = \frac{G(\pi(H\hat X, H\hat Y)H\hat Y, H\hat X)}{G(H\hat X, H\hat X)G(H\hat Y, H\hat Y) - G(H\hat X, H\hat Y)^2}. \tag{2.1}$$

De la relation (1.16) et compte tenu de (1.3) on obtient:

$$\tilde K(z, \mu) = K(z, \mu) + \frac{g(Q(X, Y)Y, X)}{\|X\wedge Y\|^2} - \frac{3}{4}\frac{\|R(X, Y)v\|^2}{\|X\wedge Y\|^2} \tag{2.2}$$

où $X = \varrho(H\hat X)$, $Y = \varrho(H\hat Y)$, K est la courbure sectionnelle dans la connexion finslérienne [1] si $\hat v = H\hat X$ et μ_1 le 2-plan engendré par $\hat v$ et $H\hat Y$ alors de (2.2) on obtient:

$$\tilde K(z, \mu_1) = K(z, \mu_1) - \frac{3}{4}\frac{\|R(v, Y)v\|^2}{\|v\|^2\|Y\|^2 - g(v, Y)^2} \tag{2.3}$$

d'où:

$$\tilde K(z, \mu_1) \leqslant K(z, \mu_1) \tag{2.4}$$

il y a égalité si et seulement si:

$$R(v, Y)v = 0 \Leftrightarrow R(X, Y)v = 0 \quad \forall X \in p^{-1}T(M). \tag{2.5}$$

Dans ce cas le champ: de sous-espace horizontal $z \to H_z$ est complétement intégrable.

(b) La courbure scalaire K dans la connexion riemannienne D est définie par:

$$K = G^{\beta\gamma}\pi^{a}_{\beta a\gamma} = g^{jl}(\pi^i{}_{jil} + \pi^i{}_{\bar j\bar i\bar l} + \pi^{\bar i}{}_{j i\bar l} + \pi^{\bar i}{}_{\bar j\bar i\bar l}). \tag{2.6}$$

Des formules donnant les tenseurs de courbure π (section 1, p. 238, 239) on obtient:

1° $g^{jl}\pi^{i}{}_{jil} = R+Q-\frac{3}{4}R_{i0jk}R^{i}{}_{0}{}^{jk}$,

2° $g^{jl}\pi^{i}{}_{ji\bar{l}} = \nabla_i\nabla_0 T^i - \nabla^{\cdot}_i T^i - T^{ij}_{\ \ r}T^{r}_{ij} - \nabla_0 T^{i}_{jr}\nabla_0 T^{jr}_{\ \ i} + \frac{1}{4}R_{i0jk}R^{i}{}_{0}{}^{jk}$,

3° $g^{jl}\pi^{\bar{i}}{}_{j\bar{i}l} = -[\nabla^{\cdot}_i T^i + T^{ij}_{\ \ r}T^{r}_{ij} - \nabla_i\nabla_0 T^i + \nabla_0 T^{i}_{jr}\nabla_0 T^{jr}_{\ \ i} - \frac{1}{4}R_{i0jk}R^{i}{}_{0}{}^{jk}]$,

4° $g^{jl}\pi^{\bar{i}}{}_{j\bar{i}\bar{l}} = Q - \nabla_0 T_i\nabla_0 T^i + \nabla_0 T^{i}_{jk}\nabla_0 T^{jk}_{\ \ i}$.

D'autre part la courbure scalaire R est liée à la courbure scalaire H de la connexion de Berwald par:

(2.7) $$R = H + \nabla_0 T^{ij}_{\ \ r}\nabla_0 T^{r}_{ij} - \nabla_0 T_i\nabla_0 T^i.$$

Ainsi K s'écrit:

(2.8) $$K = H+2(\nabla_i\nabla_0 T^i - \nabla_0 T_i\nabla_0 T^i) - 2(\nabla^{\cdot}_i T^i + T_i T^i) - \tfrac{1}{4}R_{i0jk}R^{i0jk}.$$

De (2.8) il resulte que si K est constante alors:

1° $H(X, Y)Z = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \underline{p^{-1}T(M)}$,

2° $\dot{\delta}(LT_*) = 0$,

3° $\delta(\nabla_{\hat{v}} T_*) = K/2$,

où $\dot{\delta}$ (resp. δ) est la divergence de 1-forme verticale LT_* (resp. la 1-forme horizontale $\nabla_{\hat{v}} T_*$) et T_* désigne le covecteur trace de torsion et H est le tenseur de courbure de la connexion de Berwald. Nous obtenons donc:

Théorème. *Si la courbure scalaire K de la connexion riemannienne D de $V(M)$ est constante alors le premier tenseur de courbure de la connexion de Berwald est identiquement nul et la covecteur trace de torsion satisfait à:*

$$\dot{\delta}(LT_*) = 0, \qquad \delta(\nabla_{\hat{v}} T_*) = \frac{K}{2} = c^{te}.$$

Supposons (M, g) Compacte. Si H^{i}_{jkl} est nul de la troisième identité de Bianchi [1] il resulte aussitôt:

(2.9) $$R^{i}_{jkl} = \nabla_l\nabla_0 T^{i}_{kj} - \nabla_k\nabla_0 T^{i}_{jl} + \nabla_0 T^{i}_{lr}\nabla_0 T^{r}_{jk} - \nabla_0 T^{i}_{kr}\nabla_0 T^{r}_{jl}$$

or la nullité de H entraîne [1], p. 38:

(2.10) $$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

En multipliant (2.10) par v^l et en tenant compte de (2.9) on obtient:

(2.11) $$\nabla_0\nabla_0 T^{i}_{jk} = 0$$

d'où:

$$\nabla_0(T^{ijk}\nabla_0 T_{ijk}) = (\nabla_0 T_{ijk}\nabla_0 T^{ijk})$$

or le premier membre est une divergence, W étant compact et par intégration sur W on obtient:

$$0 = \int_W \nabla_{\hat{v}}\big(g(T, \nabla_{\hat{v}} T)\big)\eta(g) = \int_W g(\nabla_{\hat{v}} T, \nabla_{\hat{v}} T)\eta(g).$$

Ainsi:

$$\nabla_{\hat{v}} T = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

et d'après (2.9) le tenseur de courbure R est nul, donc (M, g) est localement Minkowskienne([1])([2]) Si K est constante de la condition 3° il resulte que cette constante est nulle. Ainsi nous avons, le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Soit (M, g) une variété finslérienne compacte. Si la courbure scalaire K de la connexion riemannienne D de $V(M)$ est constante alors (M, g) est localement Minkowskienne. Cette courbure scalaire est identiquement nulle et le covecteur trace de torsion satisfait à:*

$$\dot{\delta}(LT_*) = 0 .$$

3. Structure presque complexe sur $V(M)$. La scission définie par la connexion finslérienne sur $V(M)$ va nous permettre d'introduire un automorphisme $\mathscr{I}$ de l'espace vectoriel tangent à $V(M)$ en chaque point du carré $-id$. En effet si $\hat{X} \in TV(M)$ on pose:

$$\mathscr{I}(H\hat{X}) = V\hat{X}, \quad \mathscr{I}(V\hat{X}) = -H\hat{X} \tag{3.1}$$

avec: $\mu(V\hat{X}) = \varrho(H\hat{X})$.

Alors:

$$\mathscr{I}(\hat{X}) = V\hat{X} - H\hat{X} \Rightarrow \mathscr{I}^2 = -id. \tag{3.2}$$

Le tenseur de torsion de $\mathscr{I}$, à $\frac{1}{4}$ près, s'écrit:

$$\tau(\hat{X}, \hat{Y}) = [\mathscr{I}(\hat{X}), \mathscr{I}(\hat{Y})] - [\hat{X}, \hat{Y}] - \mathscr{I}[\hat{X}, \mathscr{I}(\hat{Y})] - \mathscr{I}[\mathscr{I}(\hat{X}), \hat{Y}], \tag{3.3}$$

quels que soient $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sur $V(M)$. Pour calculer τ on choisit les champs de vecteurs $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ tels que:

$$\mu(V\hat{X}) = \varrho(H\hat{X}) = X, \quad \mu(V\hat{Y}) = \varrho(H\hat{Y}) = Y, \tag{3.4}$$

où X et Y sont des champs de vecteurs sur M. De (3.3) il resulte:

$$\tau(\hat{X}, \hat{Y}) = 2\mathscr{I}[H\hat{X}, H\hat{Y}] - 2[V\hat{X}, H\hat{Y}] - 2[H\hat{X}, V\hat{Y}] \tag{3.5}$$

or le crochet $[H\hat{X}, V\hat{Y}]$ est vertical, d'après l'équation de structure (0.6) on obtient:

([1]) Ce resultat a été annoncé par H. Akbar-Zadeh dans son rapport au C. N. R. S. [1963–1964].

([2]) Ajouté après épreuve: En fait de $\nabla_0 T^i{}_{jk} = 0$ il résulte en dérivant verticalement et en tenant compte de $R = 0$:

$$L^2 \nabla^l T^{ijk} \nabla_l T_{ijk} = -\nabla_0 (L^2 \nabla^l T^{ijk} \nabla_l^{\cdot} T_{ijk}).$$

Or le second membre est une divergence, il en résulte en intégrant sur W que l'on a $\nabla_l T_{ijk} = 0$. Ainsi (M, g) est Minkowskienne.

$$\mu[H\hat{X}, V\hat{Y}] = \nabla_{H\hat{X}}\hat{Y} + (\nabla_{\hat{v}}T)(X, Y)$$

d'où:

$$[H\hat{X}, V\hat{Y}] + [V\hat{X}, H\hat{Y}] = \mathscr{I}(H[H\hat{X}, H\hat{Y}])$$

donc (3.5) s'écrit:

$$\tau(\hat{X}, \hat{Y}) = 2\mathscr{I}(V[H\hat{X}, H\hat{Y}]). \tag{3.6}$$

D'autre part, d'après (0.7) on a:

$$V[H\hat{X}, H\hat{Y}] = -\mu^{-1}(R(\hat{X}, \hat{Y})v). \tag{3.7}$$

Ainsi (3.6) nous donne:

$$\varrho\tau(\hat{X}, \hat{Y}) = 2R(X, Y)v, \quad \mu\tau(\hat{X}, \hat{Y}) = 0 \tag{3.8}$$

on en déduit le:

THÉORÈME. *Pour que la structure presque complexe sur $V(M)$ définie par la connexion finslérienne soit intégrable, il faut et il suffit que le champ de sous-espaces horizontaux $z \to H_z$ défini par cette connexion soit complétement intégrable, c'est-à-dire:*

$$R(X, Y)v = 0.$$

Dans ce cas nous savons, d'après Niewlander–Nirenberg que $V(M)$ admet une structure de variété complexe.

4. Transformations infinitésimales presque complexes. Un champ de vecteurs sur $V(M)$ sera dit presque complexe s'il laisse invariant l'opérateur $\mathscr{I}$. Soit $\exp(uX)$ un groupe à 1-paramètre de transformations locales de M et $\exp(u\hat{X})$ son prolongement sur $V(M)$. Nous dirons que X est une t.i. presque complexe si:

$$L(\hat{X})\mathscr{I} = 0 \tag{4.1}$$

la relation précédente est équivalente à:

$$[\hat{X}, \mathscr{I}(\hat{Y})] = \mathscr{I}[\hat{X}, \hat{Y}] \tag{4.2}$$

quel que soit $\hat{Y} \in TV(M)$. Si l'on pose $\hat{Y} = \hat{v}$ dans (4.2) (où $\hat{v}$ est horizontal au dessus de v) on obtient:

$$[\hat{X}, \mathscr{I}(\hat{v})] = \mathscr{I}[\hat{X}, \hat{v}] \tag{4.3}$$

or $[\hat{X}, \hat{v}]$ est toujours vertical et son image par $\mathscr{I}$ est donc horizontal D'autre part le premier membre de (4.3) est vertical, il en resulte que:

$$\mathscr{I}([\hat{X}, \hat{v}]) = 0 \Rightarrow [\hat{X}, \hat{v}] = 0. \tag{4.4}$$

Mais cette relation est équivalente à:

$$V[\hat{X}, H\hat{Y}] = 0 \quad \forall \hat{Y} \in \chi V(M). \tag{4.5}$$

Soit encore:

$$\nabla_{H\hat{Y}}\nabla_{\hat{v}}X + R(X, Y)v + (\nabla_{\hat{v}}T)(Y, \nabla_{\hat{v}}X) = 0 \tag{4.6}$$

c'est-à-dire que $\hat{X}$ laisse invariant le sous-espace horizontal H_z. Inversement supposons X satisfasse à (4.5) on va démontrer que X laisse invariant $\mathscr{J}$. En effet soit $\hat{Y}$ un champ de vecteurs sur $V(M)$ tels que:

$$\mu(V\hat{Y}) = \varrho(H\hat{Y}) = Y.$$

La dérivée de Lie de $\mathscr{J}$ nous donne:

$$\big(L(\hat{X})\mathscr{J}\big)(\hat{Y}) = [\hat{X}, \mathscr{J}(H\hat{Y})] - \mathscr{J}[\hat{X}, H\hat{Y}] + [\hat{X}, \mathscr{J}(V\hat{Y})] - \mathscr{J}[\hat{X}, V\hat{Y}]$$

or $[\hat{X}, H\hat{Y}]$ étant horizontal des équations de structure (0.6) et (0.7) on obtient:

$$\mathscr{J}([\hat{X}, H\hat{Y}]) = \mu^{-1}\big(\nabla_{\hat{X}}Y - \nabla_{H\hat{Y}}X + T(Y, \nabla_{\hat{v}}X)\big).$$

De même

$$[\hat{X}, \mathscr{J}(H\hat{Y})] = [\hat{X}, V\hat{Y}] = \mu^{-1}\big(\nabla_{\hat{X}}Y - \nabla_{H\hat{Y}}X - T(Y, \nabla_{\hat{v}}X)\big).$$

Ainsi:

$$[\hat{X}, \mathscr{J}(H\hat{Y})] = \mathscr{J}[\hat{X}, H\hat{Y}].$$

De même:

$$[\hat{X}, \mathscr{J}(V\hat{Y})] = \mathscr{J}[\hat{X}, V\hat{Y}]$$

donc $\mathscr{J}$ est invariant par X. Nous obtenons:

THÉORÈME. *Pour q'un champ de vecteurs X sur M définisse une t.i. presque complexe il faut et il suffit qu'il laisse invariant le champ de sous-espaces horizontaux H_z.*

Si M est compacte, on sait que [2] les t.i. qui laissent invariants les sous-espaces horizontaux H_z se composent d'isométries, d'où:

COROLLAIRE. *Soit (M, g) une variété finslérienne compacte, alors le plus grand groupe connexe de transformations presque complexes coïncide avec le plus grand groupe connexe d'isométries.*

5. Structure presque kählérienne sur $V(M)$. De la relation (3.1) il resulte que $\mathscr{J}$ admet comme composantes par rapport aux repères adaptés (∂_a) la matrice:

$$(\mathscr{F}^{\alpha}_{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta^i_j \\ -\delta^i_j & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

or de la métrique (1.3) on obtient:

$$G(\mathscr{J}\hat{X}, \mathscr{J}\hat{Y}) = G(\hat{X}, \hat{Y}) \qquad \forall \hat{X}, \hat{Y} \in \chi V(M) \tag{5.2}$$

il en resulte que l'ensemble $(\mathscr{J}, G)$ définit sur $V(M)$ une structure presque hermitienne. D'autre part, posons:

$$(5.3) \qquad \mathscr{F}(\hat{X}, \hat{Y}) = G(\hat{X}, \mathscr{I}\hat{Y}) \quad \forall \hat{X}, \hat{Y} \in \chi V(M)$$

on vérifie immédiatement que:

$$\mathscr{F}(\hat{X}, \hat{Y}) = -\mathscr{F}(\hat{Y}, \hat{X}).$$

Par rapport aux repères adaptés $\mathscr{F}$ est définie par:

$$\mathscr{F} = g_{ij} \nabla v^i \wedge dx^j = d(v_i dx^i)$$

la 2-forme $\mathscr{F}$, canoniquement associée à $(\mathscr{I}, G)$, est une 2-forme exacte de rang $2n$, par conséquent l'ensemble $(\mathscr{I}, G)$ définit sur $V(M)$ une structure de variété presque kählérienne. D'après le théorème de la section 3 cette structure est kählérienne si et seulement si le sous-espace H_z est complétement intégrable.

Références

[1] H. Akbar-Zadeh, *Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations* Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. 3-ème sér. 80 (1963), p. 1–79.
[2] — *Sur les isométries infinitésimales d'une variété finslérienne compacte*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 278, sér. A (1974), p. 871.
[3] — *Espaces de Nullité en géométrie Finslérienne*, Tensor N. S. 26 (1972).
[4] — et E. Bonan, *Structure presque kählérienne naturelle sur le fibré tangent à une variété finislérienne*, ibidem t. 258, groupe 1 (1965), p. 5581.
[5] — et A. Węgrzynowska, *Sur la géométrie du fibré tangent à une variété finslérienne*, ibidem sér. A (1975).
[6] B. Ba, *Structures presque complexes-structures conformes et dérivations*, Thèse, Sci. Math., Paris 1965.
[7] P. Dombrowski, *On the geometry of the tangent bundle*, J. Rein. Ang. Math., Berlin 1962.
[8] A. Lichnerowicz, *Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale*, Comm. Math. Helv. vol. 22, fasc. 1 (1949), p. 271–301.
[9] — *Théorie globale des connexions et des groups d'holonomie*, Rome 1955.
[10] S. Sasaki, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, Tohuku Math. J. 10 (1958), p. 338–354.
[11] K. Yano and T. Okubo, *On tangent bundles with Sasakian metrics of Finslerian and Riemannian manifolds*, Ann. di Mat. 87 (1970), p. 137–162.

INSTITUT HENRI POINCARÉ, PARIS

Reçu par la Rédaction le 5. 1. 1976