NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

К ПОСТРОЕНИЮ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

И. П. МЫСОВСКИХ

Математико-механический факультет
Ленинградского университета, Ленинград, СССР

В работе указываются оценки для числа узлов кубатурных формул, точных для тригонометрических многочленов степени не выше m. Известен метод воспроизводящего ядра, который позволяет строить кубатурные формулы, точные для алгебраических многочленов. В работе даются примеры применения этого метода с надлежащими изменениями к построению кубатурных формул, точных для тригонометрических многочленов.

Рассмотрим тригонометрический многочлен от переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$

$$\exp\big(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)\big), \tag{1}$$

где i — мнимая единица и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые числа. Многочлен (1) будем называть тригонометрическим одночленом, а число $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|$ — его степенью. Одночлен назовем четным (нечетным), если его степень — четное (нечетное) число. Очевидно, сумма $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|$ нечетна (четна) тогда и только тогда, когда она имеет нечетное (четное) число нечетных слагаемых. Отсюда следует, что произведение двух одночленов разной (одинаковой) четности дает нечетный (четный) одночлен.

Обозначим через $\tau(n, m)$ число одночленов (1) степени m. Ясно, что $\tau(n, m)$ равно числу решений уравнения

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n| = m \tag{2}$$

в целых числах. Если $m=0$, то число решений равно единице.

Пусть $m > 0$. Тогда решения уравнения (2) можно разбить на n групп: в s-ю группу, $s = 1, 2, \ldots, n$, входят решения, имеющие s ненулевых координат. Найдем число решений в s-ой группе. s ненулевых координат могут располагаться на n местах C_n^s способами. Каждому способу расположения s ненулевых и положительных координат отвечает C_{m-1}^{s-1} упорядоченных разбиений m на s частей [1, с. 45]. Каждое упорядоченное разбиение содержит 2^s решений, так как ненулевая координата может быть как положительной, так и отрицательной. Таким образом, s-я группа содержит $C_n^s C_{m-1}^{s-1} 2^s$ решений. Отсюда следует, что число всех решений уравнения (2), совпадающее с числом $\tau(n, m)$ тригонометрических одночленов степени $m > 0$, дается формулой:

$$\tau(n, m) = \sum_{s=1}^{n} C_n^s C_{m-1}^{s-1} 2^s. \tag{3}$$

Число всех тригонометрических одночленов степени не выше k от n переменных обозначим через $t(n, k)$. Имеем

$$t(n, k) = 1 + \sum_{m=1}^{k} \tau(n, m) = 1 + \sum_{s=1}^{n} C_n^s 2^s \sum_{m=1}^{k} C_{m-1}^{s-1}.$$

С помощью известного равенства $\sum_{m=1}^{k} C_{m-1}^{s-1} = C_k^s$ получаем

$$t(n, k) = \sum_{s=0}^{n} C_n^s C_k^s 2^s. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$t(n, k) = t(k, n). \tag{5}$$

Действительно, в формуле (4) суммирование можно вести до k, так как в случае $k < n$ $C_k^s = 0$ при $s > k$, а в случае $k > n$ $C_n^s = 0$ при $s > n$.

Функция $\tau(n, m)$ не обладает свойством симметрии. С помощью (3) легко доказывается равенство

$$m\tau(n, m) = n\tau(m, n). \tag{6}$$

Приведем без доказательства соотношение

$$\tau(l, m) + \tau(l-1, m) = 2t(l-1, m)$$

и следующую лемму.

Лемма. *Число одночленов* (1) *степени не выше* k *и одинаковой с* k *четности равно* $\tau(k+1, n)/2$.

Приведем выражения для $\tau(k, n)$ и $t(k, n)$ при $n = 1, \ldots, 6$

$$\tau(k, 1) = 2k, \quad \tau(k, 2) = 2k^2, \quad \tau(k, 3) = 2k(2k^2+1)/3,$$

$$\tau(k, 4) = 2k^2(k^2+2)/3, \quad \tau(k, 5) = 2k(2k^4+10k^2+3)/15,$$

$$\tau(k, 6) = 2k^2(2k^4+20k^2+23)/45,$$

$$t(k,\,1)=1+2k,\qquad t(k,\,2)=1+2k+2k^2,$$
$$t(k,\,3)=(3+8k+6k^2+4k^3)/3,$$
$$t(k,\,4)=(3+8k+10k^2+4k^3+2k^4)/3,$$
$$t(k,\,5)=(15+46k+50k^2+40k^3+10k^4+4k^5)/15,$$
$$t(k,\,6)=(45+138k+196k^2+120k^3+70k^4+12k^5+4k^6)/45.$$

Пусть Ω — множество в $\boldsymbol{R}^n$, имеющее внутренние точки, и $p(x)$ — весовая функция, неотрицательная при $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega$ и такая, что существуют интегралы $\int_\Omega p(x)\exp\left(i(\alpha_1x_1+\ \dots\ +\alpha_nx_n)\right)dx$ и $\int_\Omega p(x)\,dx>0$. Рассмотрим интеграл

$$I(f):=\int\limits_\Omega p(x)f(x)\,dx.$$

Теорема 1. *Существует кубатурная формула*

$$I(f)\cong\sum_{j=1}^{n}C_jf(x^{(j)}),\tag{7}$$

точная для всех тригонометрических многочленов степени не выше m, ее узлы принадлежат Ω и их число $N=t(n,\,m)$.

Теорема 2. *Число узлов кубатурной формулы* (7), *точной для всех тригонометрических многочленов степени не выше m, удовлетворяет неравенству*

$$N\geqslant t(n,\,k),\tag{8}$$

где $k=\lfloor m/2\rfloor$ — целая часть числа $m/2$.

Теорема 3. *Пусть кубатурная формула* (7), *в которой $\Omega=[0,\,2\pi]^n$ — куб и вес $p(x)=1$, точна для всех тригонометрических многочленов степени не выше $2k+1$. Тогда для числа узлов N этой формулы справедлива оценка*

$$N\geqslant\tau(k+1,\,n).\tag{9}$$

Теоремы 1 и 2 аналогичны соответствующим теоремам для алгебраического случая [2]. Теорему 3 впервые доказал М. В. Носков [3]. Сообщение о приведенных выше результатах опубликовано в [4], подробное изложение приведено в [5].

Теорема 3 при $k=0$ дает оценку $N\geqslant\tau(1,\,n)=2$. Эта оценка точная. Кубатурная формула с двумя узлами

$$\int\limits_{[0,2\pi]^n}f(x)\,dx\cong\frac{(2\pi)^n}{2}\left[f(x_1^{(1)},\,\dots,\,x_n^{(1)})+f(x_1^{(1)}+\pi,\,\dots,\,x_n^{(1)}+\pi)\right],$$

где $x_j^{(1)}\in[0,\,\pi)$, $j=1,\,2,\,\dots,\,n$, точна для тригонометрических многочленов не выше первой степени.

Нетрудно проверить также, что оценка (8) из теоремы 2 достигается при $n = 1$. Как показал М. В. Носков [6], она достигается и при $n = 2$.

Метод воспроизводящего ядра [2, с. 240] применяется для построения кубатурных формул, точных для алгебраических многочленов. Он бьл приспособлен к построению квадратурных формул наивысшей тригонометрической степени точности для вычисления интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x) f(x)\,dx$$

с неотрицательной весовой функцией $p(x)$ [7].

Здесь рассматривается метод воспроизводящего ядра построения кубатурных формул для вычисления интеграла

$$I_n(f) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} f(x)\,dx, \tag{10}$$

точных для тригонометрических многочленов. В случае n любого метод позволяет получить кубатурную формулу, точную для тригонометрических многочленов не выше первой степени и имеющую $n+1$ узлов. При $n = 2$ применен аналог модифицированного метода воспроизводящего ядра, который приводит к двум кубатурным формулам, точным для тригонометрических многочленов не выше третьей степени.

Вектор $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа, называют мультииндексом, а число $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ — его длиной. Если $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in C^n$, то полагаем $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}$, так что z^α — алгебраический одночлен от n переменных степени $|\alpha|$. Воспроизводящее ядро куба $[0, 2\pi]^n$ и веса $p(x) = 1$ имеет вид

$$K_k(w, z) := \sum_{s=0}^{k} \sum_{|\alpha| = s} \bar{w}^\alpha z^\alpha, \tag{11}$$

где w, $z \in C^n$, черта (здесь и в дальнейшем) означает операцию комплексного сопряжения: $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$, суммирование во внутренней сумме ведется по всем мультииндексам α длины s. Воспроизводящее ядро (11) является алгебраическим многочленом от z степени k.

Дадим описание метода воспроизводящего ядра для частного случая, когда ядро (11) имеет первую степень

$$K_1(w, z) := 1 + \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 + \ldots + \bar{w}_n z_n. \tag{12}$$

Строятся n точек

$$w^{(s)} := (w_1^{(s)}, w_2^{(s)}, \ldots, w_n^{(s)}), \qquad s = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

таких, что

$$|w_t^{(s)}| = 1, \qquad s,\ t = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Каждой точке (13) сопоставляется многочлен первой степени от z

$$K_1(w^{(s)}, z) = 1+\bar{w}_1^{(s)} z_1+\bar{w}_2^{(s)} z_2+ \ldots +\bar{w}_n^{(s)} z_n$$

и определяемая им гиперплоскость H_s — множество точек в C^n, удовлетворяющих уравнению

$$1+\bar{w}_1^{(s)} z_1+ \ldots +\bar{w}_n^{(s)} z_n = 0.$$

В качестве $w^{(1)}$ берем любую точку из C^n, координаты которой удовлетворяют условиям (14), например, $w^{(1)} = (1, 1, \ldots, 1)$. Точку $w^{(2)}$ берем на гиперплоскости H_1. Пусть уже указаны точки $w^{(1)}, \ldots, w^{(l)}$, $1 \leqslant l < n$, и они определяют гиперплоскости $H_1, \ldots, H_l$ такие, что их пересечение $\bigcap_{\nu=1}^{l} H_\nu$ не пустое и в нем имеются точки, координаты которых удовлетворяют условиям (14). В качестве $w^{(l+1)}$ берется точка из $\bigcap_{\nu=1}^{l} H_\nu$, координаты которой удовлетворяют условиям (14) и такая, что $\bigcap_{\nu=1}^{l+1} H_\nu$ содержит точки, удовлетворяющие условиям (14).

Пусть уже указаны точки (13), по построению удовлетворяющие условиям

$$(15) \qquad 1+\bar{w}_1^{(s)} w_1^{(t)}+ \ldots +\bar{w}_n^{(s)} w_n^{(t)} = (n+1)\delta_{st}, \qquad s, t = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажем, что пересечение гиперплоскостей

$$(16) \qquad \bigcap_{\nu=1}^{n} H_\nu$$

состоит из единственной точки, координаты которой удовлетворяют условиям (14). Пересечение (16) есть множество решений линейной алгебраической системы n уравнений

$$(17) \qquad 1+\bar{w}_1^{(s)} z_1+\bar{w}_2^{(s)} z_2+ \ldots +\bar{w}_n^{(s)} z_n = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

с n неизвестными $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Введем обозначения определителей

$$\Delta := \det[\bar{w}_1^{(s)}, \bar{w}_2^{(s)}, \ldots, \bar{w}_n^{(s)}]_{s=1}^{n},$$

$$\Delta_r := \det[\bar{w}_1^{(s)}, \bar{w}_2^{(s)}, \ldots, \bar{w}_{r-1}^{(s)}, -1, \bar{w}_{r+1}^{(s)}, \ldots, \bar{w}_n^{(s)}]_{s=1}^{n},$$

Пользуясь условиями (15), найдем

$$|\Delta|^2 = |\Delta_r|^2 = (n+1)^{n-1},$$

откуда на основании правила Крамера следует, что решение системы (17) $w^{(n+1)} := (w_1^{(n+1)}, \ldots, w_n^{(n+1)})$ имеет координаты по модулю равные единице.

Таким образом, точки $w^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, n+1$, должны удовлетворять условиям (15) при s, $t = 1, 2, \ldots, n+1$ — расширенным условиям (15). Чтобы доказать, что такие точки существуют, свяжем с ними квадратную матрицу порядка $n+1$

$$W_{n+1} := \begin{bmatrix} 1 & w_1^{(1)} & w_2^{(1)} & & w_n^{(1)} \\ 1 & w_1^{(2)} & w_2^{(2)} & & w_n^{(2)} \\ . & . & . & & . \\ 1 & w_1^{(n+1)} & w_2^{(n+1)} & \dots & w_n^{(n+1)} \end{bmatrix}.$$

В силу расширенных условий (15) строки этой матрицы как вектора в C^{n+1} попарно ортогональны относительно скалярного произведения

$$(18) \qquad (u, v) := \sum_{j=1}^{n+1} u_j \bar{v}_j,$$

при этом модуль каждого элемента матрицы равен единице.

Обозначим корни $(n+1)$-ой степени из единицы

$$\varepsilon_m := \exp(i2\pi m/(n+1)), \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Для упрощения записи не отмечена зависимость ε_m от n. Строки матрицы

$$E_{n+1} := [1, \varepsilon_1^s, \varepsilon_2^s, \dots, \varepsilon_n^s]_{s=0}^n$$

попарно ортогональны относительно скалярного произведения (18) и $|\varepsilon_j^s| = 1$. Отсюда следует, что точки $w^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, n+1$, удовлетворяющие расширенным условиям (15), существуют.

Заметим также, что свойствами матрицы W_{n+1} обладают матрицы Адамара H_{n+1} [1, с. 283], элементами которых являются 1 и -1. Порядок $n+1$ матрицы Адамара при $n > 1$ должен делиться на 4. Уже при $n = 3$ имеются отличные от E_{n+1} и H_{n+1} матрицы, обладающие свойствами матрицы W_{n+1}.

Точки $w^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, n+1$, определяют узлы кубатурной формулы следующим путем. Положим

$$u^{(s)} = (u_1^{(s)}, \dots, u_n^{(s)}), \qquad u_j^{(s)} = \arg w_j^{(s)}, \qquad s = 1, 2, \dots, n+1,$$

где $u_j^{(s)}$ считаем принадлежащим $[0, 2\pi)$. Кубатурная формула имеет вид

$$(19) \qquad I_n(f) \cong \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^{n+1} f(u^{(s)}).$$

Нетрудно проверить, пользуясь расширенными условиями (15), что (19) точна для тригонометрических многочленов

$$\bar{z}_l z_m, \ z_m = \exp(ix_m), \qquad l, m = 0, 1, 2, \dots, n, \ x_0 = 0,$$

в частности, для тригонометрических многочленов не выше первой степени.

Если область интегрирования Ω центрально симметрична и весовая функция $p(x) \geqslant 0$ принимает одинаковые значения в центрально симметричных точках, то известна модификация метода воспроизводящего ядра в алгебраическом случае. Эти условия в случае интеграла (10) выполнены. Применим аналог модифицированного метода воспроизводящего ядра к построению кубатурных формул для вычисления интеграла $I_2(f)$, точных для тригонометрических многочленов.

Воспроизводящее ядро куба $[0, 2\pi]^n$ и веса $p(x) = 1$ на этот раз определяется иначе

$$\tilde{K}_k(w, z) := \sum_{s} \sum_{|\alpha|=s} \bar{w}^\alpha z^\alpha, \tag{20}$$

где суммирование во внешней сумме ведется по целым неотрицательным s, не превосходящим k и имеющим одинаковую четность с k. Воспроизводящее ядро (20) связано с векторным пространством многочленов, которое является линейной оболочкой одночленов z^α, которые фигурируют под знаком суммы в (20).

Ядро (20) в случае $n = 2$ и $k = 2$ записывается в виде

$$\tilde{K}_k(w, z) = 1 + \bar{w}_1^2 z_1^2 + \bar{w}_1 \bar{w}_2 z_1 z_2 + \bar{w}_2^2 z_2^2.$$

Возьмем точку $w^{(1)} = (1, 1)$, которая определяет алгебраическую кривую второго порядка

$$\tilde{K}_2(w^{(1)}, z) = 1 + z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0. \tag{21}$$

Найдем точку (w_1, w_2) на кривой (21), у которой $|w_1| = |w_2| = 1$. Ясно, что

$$w_2 = w_1 \exp(i\varphi) \tag{22}$$

и точка (w_1, w_2) лежит на кривой (21), если

$$1 + w_1^2(1 + \exp(i\varphi) + \exp(i2\varphi)) = 0. \tag{23}$$

Чтобы $|w_1| = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $|1 + \exp(i\varphi) + \exp(i2\varphi)|^2 = 1$ или $\cos\varphi(1 + \cos\varphi) = 0$.

Корнями этого уравнения являются $\varphi = \pi/2$, $3\pi/2$, π. При $\varphi = \pi$ уравнение (23) принимает вид $w_1^2 + 1 = 0$, откуда $w_1 = \pm i$ и из (22) получаем $w_2 = \mp i$. В качестве точки $w^{(2)}$ можно взять $(i, -i)$ или $(-i, i)$. Значение $\varphi = \pi/2$ приводит к двум точкам $\pm(\exp(i\pi/4), \exp(i3\pi/4))$, а $\varphi = 3\pi/2$ — к точкам $\pm(\exp(i3\pi/4), \exp(i\pi/4))$.

Возьмем $w^{(2)} = (i, -i)$. Эта точка определяет алгебраическую кривую второго порядка

$$\tilde{K}_2(w^{(2)}, z) = 1 - z_1^2 + z_1 z_2 - z_2^2 = 0. \tag{24}$$

Точки пересечения кривых (21) и (24) легко найти:

$$z^{(1)} = (\exp(i\pi/4), \exp(i3\pi/4)), \qquad z^{(2)} = (\exp(i3\pi/4), \exp(i\pi/4)),$$

$$z^{(3)} = (\exp(i5\pi/4), \exp(i7\pi/4)), \qquad z^{(4)} = (\exp(i7\pi/4), \exp(i5\pi/4)).$$

Они определяют четыре узла кубатурной формулы

$$(\pi/4,\ 3\pi/4),\ (3\pi/4,\ \pi/4),\ (5\pi/4,\ 7\pi/4),\ (7\pi/4,\ 5\pi/4).$$

Это стало возможным только потому, что координаты точек $z^{(j)}, j = 1, 2, 3, 4$, оказались по модулю равными единице.

В модифицированном методе воспроизводящего ядра наряду с точками $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ используются также центрально симметричные с ними точки $-w^{(1)}$ и $-w^{(2)}$. Эти четыре точки определяют четыре узла кубатурной формулы

$$(0,\ 0),\ (\pi,\ \pi),\ (\pi/2,\ 3\pi/2),\ (3\pi/2,\ \pi/2). \tag{25}$$

Кубатурная формула записывается в виде

$$I_2(f) \cong \tfrac{1}{8}[f(0,\ 0)+f(\pi,\ \pi)]+\tfrac{1}{8}[f(\pi/2,\ 3\pi/2)+f(3\pi/2,\ \pi/2)] + \tfrac{1}{8}[f(\pi/4,\ 3\pi/4)+f(3\pi/4,\ \pi/4)+f(5\pi/4,\ 7\pi/4)+f(7\pi/4,\ 5\pi/4)]. \tag{26}$$

Можно проверить, что она точна для тригонометрических многочленов не выше третьей степени и не точна для тригонометрического многочлена $\sin 2x_1 \sin 2x_2$, так что ее тригонометрическая степень точности равна 3, что на единицу больше степени воспроизводящего ядра. По теореме 3 нижняя граница для числа узлов кубатурной формулы, точной для тригонометрических многочленов не выше третьей степени, равна $\tau(2,\ 2) = 8$. В формуле (26) эта нижняя граница достигается.

Заметим еще, что коэффициенты формулы, отвечающие узлам (25), вычисляются как в алгебраическом случае

$$C_1^{-1} = C_2^{-1} = 2\tilde{K}_2(w^{(1)},\ w^{(1)}) = 8, \qquad C_3^{-1} = C_4^{-1} = 2\tilde{K}_2(w^{(2)},\ w^{(2)}) = 8.$$

Остальные коэффициенты определяются условием точности кубатурной формулы для тригонометрических многочленов степени не выше третьей.

Если взять в качестве $w^{(2)}$ любую из точек, которые определены выше значениями $\varphi = \pi/2$ и $3\pi/2$, то получим ту же кубатурную формулу (26).

Воспроизводящее ядро (20) в случае $n = 2$ и $k = 3$ принимает вид

$$\tilde{K}_3(w,\ z) = \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 + \bar{w}_1^3 z_1^3 + \bar{w}_1^2 \bar{w}_2 z_1^2 z_2 + \bar{w}_1 \bar{w}_2^2 z_1 z_2^2 + \bar{w}_2^3 z_2^3.$$

Возьмем точку $w^{(1)} = (1,\ 1)$. Она определяет алгебраическую кривую третьего порядка

$$\tilde{K}_3(w^{(1)},\ z) = (z_1 + z_2)(1 + z_1^2 + z_2^2) = 0. \tag{27}$$

Можно, как в предыдущем случае, найти точки на кривой (27), у которых модули координат равны единице. Для записи координат точек воспользуемся обозначением корней шестой степени из единицы:

$$\varepsilon_m = \exp(i\pi m/3), \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 5.$$

Требуемые точки

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2), (\varepsilon_2, \varepsilon_1), (\varepsilon_2, \varepsilon_4), (\varepsilon_4, \varepsilon_2),$$

а также центрально симметричные им точки.

Возьмем $w^{(2)} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Точка $w^{(2)}$ определяет алгебраическую кривую третьего порядка

$$(28) \qquad \tilde{K}_3(w^{(2)}, z) := (\varepsilon_1 z_1 + z_2)(\varepsilon_4 + \varepsilon_2 z_1^2 + z_2^2) = 0.$$

Точки пересечения кривых (27) и (28) легко найти, так как обе кривые распадаются. Число точек пересечения равно девяти, и среди них имеется точка (0, 0), которая не определяет узел кубатурной формулы, так как модули ее координат не равны 1. Остальные восемь решений $\pm(1, -1)$, $\pm(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$, $\pm(\varepsilon_2, \varepsilon_4)$, $\pm(\varepsilon_4, \varepsilon_2)$ имеют координаты, лежащие на единичной окружности $|z| = 1$ плоскости комплексного переменного. Эти решения определяют восемь узлов кубатурной формулы.

Точки $w^{(1)} = (1, 1)$, $w^{(2)} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и центрально симметричные им $-w^{(1)}$, $-w^{(2)}$ определяют четыре узла кубатурной формулы. Кубатурная формула имеет вид

$$\begin{aligned}(29) \quad I_2(f) \cong \tfrac{1}{12}[f(0, 0)+f(\pi, \pi)] &+ \tfrac{1}{12}[f(\pi/3, 2\pi/3)+f(4\pi/3, 5\pi/3)] \\ &+ \tfrac{1}{12}[f(0, \pi)+f(\pi, 0)+f(2\pi/3, \pi/3)+f(5\pi/3, 4\pi/3). \\ &+f(2\pi/3, 4\pi/3)+f(5\pi/3, \pi/3)+f(4\pi/3, 2\pi/3)+f(\pi/3, 5\pi/3)].\end{aligned}$$

Ее тригонометрическая степень точности равна трем — степени воспроизводящего ядра. Уменьшение степени точности по сравнению с предыдущим случаем объясняется тем, что среди точек пересечения кривых (27) и (28) имеется (0, 0). И на этот раз коэффициенты в (29), отвечающие узлам, которые произошли из точек $w^{(1)} = (1, 1)$, $w^{(2)} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $-w^{(1)}$, $-w^{(2)}$, вычисляются так же, как в модифицированном методе воспроизводящего ядра для алгебраического случая

$$C_1^{-1} = C_2^{-1} = 2\tilde{K}_3(w^{(1)}, w^{(1)}) = 12, \qquad C_3^{-1} = C_4^{-1} = 2\tilde{K}_3(w^{(2)}, w^{(2)}) = 12.$$

Использование в качестве $w^{(2)}$ других найденных выше точек приводит также к кубатурной формуле (29).

Литература

[1] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, Москва, 1970, 424 с.

[2] И. П. Мысовских, *Интерполяционные кубатурные формулы*, Наука, Москва, 1981, 336 с.

[3] М. В. Носков, *Кубатурные формулы для приближенного интегрирования периодических функций*, В кн. Методы вычислений. Вып. 14. Ленинград, 1985, 15–23.

[4] И. П. Мысовских, *О кубатурных формулах, точных для тригонометрических многочленов*, Докл. АН СССР, т. 296, № 1, (1987), 28–31.

[5] —, *Кубатурные формулы, точные для тригонометрических многочленов*, В кн. Методы вычислений. Вып. 15. Ленинград 1988, 7–18.

[6] М. В. Носков, *Формулы приближенного интегрирования периодических функций*, В кн. Методы вычислений. Вып. 15. Ленинград 1988, 19–22.

[7] И. П. Мысовских, *Квадратурные формулы наивысшей тригонометрической степени точности*, Журнал вычисл. матем. и матем. физики, т. 25, № 8, 1985, 1246–1252.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25—May 29, 1987