ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LII (1990)

Une remarque sur une évaluation des solutions bornées d'une équation différentielle avec pilotage

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Résumé. Dans la note [1] nous avons obtenu une condition pour le pilotage $\{u_1(t), u_2(t)\}$ assurant l'existence d'une solution $\{x(t), u_1(t), u_2(t)\}$ de l'équation

(E) $$x' = f(t, x_t, u_1, u_2)$$

($x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $-1 \leqslant \theta \leqslant 0$), telle que $|x(t)| \leqslant k$ pour $-1 \leqslant t < \infty$, mais la méthode topologique de T. Ważewski (cf. [2]) appliquée pour démontrer l'existence d'une telle solution exige que sur l'ensemble

(0.1) $$|x| = k$$

toutes les solutions de l'équation (E) sortent de l'ensemble

(0.2) $$|x| \leqslant k$$

(ou entrent).

Dans la note présente nous n'appliquons plus la méthode de T. Ważewski et nous obtenons des évaluations de $x(t)$ plus precises aussi dans le cas où sur l'ensemble (0,1) il y a des points de sortie et des points d'entrée par rapport à l'ensemble (0.2). Ainsi nous avons aussi obtenu la reponse à la question suivante:

Étant données deux fonctions de classe C^1: $a(t)$ et $b(t)$ pour $t \geqslant 0$, construire un pilotage $\{u_1(t), u_2(t)\}$ tel que chaque solution $x(t)$ de l'équation (E) avec la condition initiale $b(0) \leqslant x(t) \leqslant a(0)$ pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$ et le pilotage $\{u_1(t), u_2(t)\}$ satisfaşse à l'inégalité $b(t) \leqslant x(t) \leqslant a(t)$ pour $0 \leqslant t < \infty$. La méthode y appliquée est la méthode des approximations successives convenablement choisies.

1. Envisageons l'équation (E) et admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H_1. 1° $f(t, \varphi, u_1, u_2)$ est continue par rapport à (t, φ, u_1, u_2) dans $R \times C^{[-1,0]} \times R^2$.

2° $f(t, \varphi, u_1, u_2)$ est croissante par rapport à φ, c'est-à-dire $f(t, \varphi_1, u_1, u_2) \leqslant f(t, \varphi_2, u_1, u_2)$, si $\varphi_1(\theta) \leqslant \varphi_2(\theta)$ pour $-1 \leqslant \theta \leqslant 0$.

3° Il existe les dérivées $f_{u_1}(t, \varphi, u_1, u_2)$ et $f_{u_2}(t, \varphi, u_1, u_2)$ continues dans $R \times C^{[-1,0]} \times R^2$.

Envisageons l'équation (E) dans l'ensemble

(K) $$0 \leqslant t < +\infty, \quad \|\varphi\| \leqslant k, \quad |u_1| \leqslant \varrho, \quad \|u_2\| \leqslant \varrho$$

où $\|\varphi\| \overset{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{-1 \leqslant \theta \leqslant 0} |\varphi(\theta)|$.

4° Il existe des constantes L_1, L et N telles que

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} |f_{u_1}(t,k,u_1,u_2)+1| &\leqslant L<1 \\ |f_{u_2}(t,k,u_1,u_2)| &\leqslant L_1 \end{aligned} \qquad \text{pour } |u_i|\leqslant \varrho,\ i=1,2,$$

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} |f_{u_1}(t,-k,u_1,u_2)| &\leqslant L_1 \\ |f_{u_2}(t,-k,u_1,u_2)+1| &\leqslant L \end{aligned} \qquad \text{pour } |u_i|\leqslant \varrho,\ i=1,2,$$

$$(1.3)\qquad |f(t,k,0,0)|\leqslant N;\qquad |f(t,-k,0,0)|\leqslant N.$$

5° Les inégalités suivantes sont satisfaites:

$$(1.4)\qquad L+L_1<1,\qquad N<(1-L-L_1)\varrho.$$

LEMME 1. *Les hypothèses H_1 étant admises, on peut choisir des fonctions $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ continues pour $0\leqslant t<\infty$ de façon qu'il existe la solution unique du système*

$$(\mathrm{U})\qquad f(t,k,u_1,u_2)=\varepsilon_1(t),\qquad f(t,-k,u_1,u_2)=\varepsilon_2(t).$$

Démonstration. Posons

$$(1.5)\qquad 0<\varepsilon_i(t)<(1-L-L_1)\varrho-N.$$

Appliquons la méthode des approximations successives

$$(\mathrm{A})\qquad \tilde{u}_1=f(t,k,u_1,u_2)+u_1-\varepsilon_1(t),\qquad \tilde{u}_2=f(t,-k,u_1,u_2)+u_2-\varepsilon_2(t),$$

dans l'ensemble

$$(\mathrm{Z})\qquad |u_1|\leqslant\varrho,\qquad |u_2|\leqslant\varrho,\qquad 0\leqslant t<\infty.$$

Evaluons $|\tilde{u}_1(t)|$ et $|\tilde{u}_2(t)|$ dans (Z):

$$|\tilde{u}_1|\leqslant |f(t,k,0,0)|+|f_{u_1}(t,k,\vartheta u_1,\vartheta u_2)+1|\,|u_1| \\ +|f_{u_2}(t,k,\vartheta u_1,\vartheta u_2)|\ |u_2|+|\varepsilon_1(t)|,$$

$$|\tilde{u}_2|\leqslant |f(t,-k,0,0)|+|f_{u_1}(t,-k,\vartheta u_1,\vartheta u_2)|\,|u_1| \\ +|f_{u_2}(t,-k,\vartheta u_1,\vartheta u_2)+1|\ |u_2|+|\varepsilon_2(t)|,$$

c'est-à-dire

$$(1.6)\qquad |\tilde{u}_1|\leqslant N+L\varrho+L_1\varrho+|\varepsilon_1|\leqslant N+(L+L_1)\varrho+(1-L-L_1)\varrho-N=\varrho,$$

$$(1.7)\qquad |\tilde{u}_2|\leqslant N+(L+L_1)\varrho+|\varepsilon_2|\leqslant N+(L+L_1)\varrho+(1-L-L_1)\varrho-N=\varrho.$$

Envisageons

$$\tilde{u}_1=f(t,k,u_1,u_2)+u_1-\varepsilon_1(t),\qquad \tilde{u}_2=f(t,-k,u_1,u_2)+u_2-\varepsilon_2(t),$$

et

$$u_1=f(t,k,\mathring{u}_1,\mathring{u}_2)+\mathring{u}_1-\varepsilon_1(t),\qquad u_2=f(t,-k,\mathring{u}_1,\mathring{u}_2)+\mathring{u}_2-\varepsilon_2(t),$$

avec $\mathring{u}_1$, $\mathring{u}_2$ quelconques tels que $|\mathring{u}_1|\leqslant\varrho$, $|\mathring{u}_2|\leqslant\varrho$. On a

$$|\tilde{u}_1(t)-u_1(t)| \leqslant L|u_1(t)-\mathring{u}_1(t)|+L_1|u_2(t)-\mathring{u}_2(t)|,$$
$$|\tilde{u}_2(t)-u_2(t)| \leqslant L_1|u_1(t)-\mathring{u}_1(t)|+L|u_2(t)-\mathring{u}_2(t)|,$$

d'où

$$|\tilde{u}_1(t)-u_1(t)|+|\tilde{u}_2(t)-u_2(t)| \leqslant (L+L_1)\{|u_1(t)-\mathring{u}_1(t)|+|u_2(t)|-\mathring{u}_2(t)|\}.$$

En vertu de (1.4) la suite des approximations successives

$$u_{j,1}(t) = f(t,k,u_{j-1,1},u_{j-1,2})+u_{j-1,1}-\varepsilon_1(t),$$
$$u_{j,2}(t) = f(t,-k,u_{j-1,1},u_{j-1,2})+u_{j-1,2}-\varepsilon_2(t),$$

avec $u_{0,1}$, $u_{0,2}$ quelconques tels que

$$|u_{0,1}(t)| \leqslant \varrho, \quad |u_{0,2}(t)| \leqslant \varrho$$

est convergente vers une solution unique de l'équation (U).

2. Admettons H_1 (cf. Section 1) et les hypothèses H_2 suivantes:

HYPOTHÈSES H_2.

$$\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant \gamma_1 < k \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.1}$$

$$\int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds \geqslant \gamma_2 > -k \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.2}$$

$$\int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds < \int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.3}$$

$$|\varepsilon_i(t)| < (1-L-L_1)\varrho - N \overset{\text{df}}{=} M \qquad (i = 1, 2). \tag{2.4}$$

THÉORÈME T. *Les hypothèses H_1 et H_2 étant admises pour chaque pilotage $\{u_1(t), u_2(t)\}$ satisfaisant à* (U), *chaque solution $x(t)$ de* (E) *telle que*

$$-k-\gamma_2 \leqslant x(t) \leqslant k-\gamma_1 \qquad \textit{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0 \tag{2.5}$$

satisfait à l'inégalité

$$-k-\gamma_2+\int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds < x(t) < k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds. \tag{2.6}$$

Démonstration. On considère la suite de fonctions $\{x_\nu(t)\}$ suivante

$$x_\nu(t) = k-\gamma_1 \qquad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0, \tag{2.7}$$

$$x_\nu(t) = k-\gamma_1+\int_0^t f(s,(x_{\nu-1})_s,u_1,u_2)\,ds \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.8}$$

$$x_0(t) = k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.9}$$
$$x_0(t) = k-\gamma_1 \qquad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

On a

$$-k \leqslant \int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds \leqslant \int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds+k-\gamma_1 \leqslant x_0(t) \leqslant k-\gamma_1+\gamma_1 = k$$
$$\text{pour } 0 \leqslant t < \infty,$$

$$x_1(t) = k-\gamma_1+\int_0^t f\big(s,(x_0)_s,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds.$$

$f(t,\varphi,u_1,u_2)$ étant croissante par rapport à φ, on a

$$x_1(t) \leqslant k-\gamma_1+\int_0^t f\big(s,k,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds$$

et en vertu de (U),

$$-k \leqslant k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds \leqslant x_1(t) \leqslant k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds = x_0(t).$$

Supposons que

$$-k \leqslant x_v(t) \leqslant x_{v-1}(t) \leqslant k \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

Envisageons $x_{v+1}(t)$,

$$x_{v+1}(t) = k-\gamma_1 = x_v(t) \qquad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

$$x_{v+1}(t) = k-\gamma_1+\int_0^t f\big(s,(x_v)_s,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds \leqslant k-\gamma_1$$
$$+\int_0^t f\big(s,(x_{v-1})_s,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds = x_v(t) \leqslant k,$$

$$x_{v+1}(t) \geqslant k-\gamma_1+\int_0^t f\big(s,-k,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds = k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds$$
$$> k-\gamma_1-k = -\gamma_1 > -k.$$

La suite $\{x_v(t)\}$ est donc convergente. Posons

$$\bar{x}(t) = \lim_{v\to\infty} x_v(t) \qquad \text{pour } -1 \leqslant t < \infty. \tag{2.10}$$

En vertu de (2.8)

$$|x_v'(t)| = \big|f\big(t,(x_{v-1})_t,u_1(t),u_2(t)\big)\big| \leqslant \max\{\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t)\} \leqslant M,$$

pour $v = 0, 1, 2, \ldots,\ -1 \leqslant t < \infty$ et par suite, la convergence (2.10) est uniforme. En vertu de (2.7) et (2.8) on a donc

$$\bar{x}(t) = k - \gamma_1 \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0, \tag{2.11}$$

$$\bar{x}(t) = k - \gamma_1 + \int_0^t f(s, \bar{x}_s, u_1, u_2)\, ds, \tag{2.12}$$

et

$$\bar{x}'(t) = f\big(t, \bar{x}_t, u_1(t), u_2(t)\big) \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

$\bar{x}(t)$ est donc la solution de (E) telle que

$$\bar{x}(t) \leqslant k - \gamma_1 + \int_0^t \varepsilon_1(s)\, ds \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\bar{x}(t) = k - \gamma_1 \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

$$\bar{x}(t) \geqslant k - \gamma_1 + \int_0^t \varepsilon_2(s)\, ds \quad (\text{cf. } \mathrm{H}_1\text{: } 2^\circ, \text{ et (U)}).$$

On a

$$k - \gamma_1 > 0 > -k - \gamma_2$$

et par conséquent,

$$\bar{x}(t) = k - \gamma_1 \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

$$-k - \gamma_2 + \int_0^t \varepsilon_2(s)\, ds \leqslant \bar{x}(t) \leqslant k - \gamma_1 + \int_0^t \varepsilon_1(s)\, ds \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

D'une façon analogue on obtient la solution $\bar{x}(t)$. Posons

$$\xi_v(t) = -k - \gamma_2 \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

$$\xi_v(t) = -k - \gamma_2 + \int_0^t f\big(s, (\xi_{v-1})_s, u_1(s), u_2(s)\big)\, ds \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\xi_0(t) = -k - \gamma_2 \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

$$\xi_0(t) = -k - \gamma_2 + \int_0^t \varepsilon_2(s)\, ds \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

On a

$$\xi_0(t) \leqslant -k - \gamma_2 + \int_0^t \varepsilon_1(s)\, ds \leqslant k - \gamma_1 + \gamma_1 = k \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\xi_0(t) \geqslant -k - \gamma_2 + \gamma_2 = -k \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty,$$

$$-k - \gamma_2 + \int_0^t \varepsilon_1(s)\, ds \geqslant \xi_1(t) \geqslant -k - \gamma_2 + \int_0^t f(s, -k, u_1, u_2)\, ds = \xi_0(t),$$

$$k = k - \gamma_1 + \gamma_1 \geqslant \xi_1(t) \geqslant \xi_0(t) \geqslant -k \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

Supposons que

$$k \geqslant \xi_v(t) \geqslant \xi_{v-1}(t) \geqslant -k \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

On a

$$\xi_{v+1}(t) = -k-\gamma_2+\int_0^t f\big(s,(\xi_v)_s,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds$$

$$\geqslant -k-\gamma_2+\int_0^t f\big(s,(\xi_{v-1})_s,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds = \xi_v(t) \geqslant -k,$$

$$\xi_{v+1}(t) \leqslant k-\gamma_1+\int_0^t f\big(s,k,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds = k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant k$$

$$\text{pour } 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\xi_{v+1}(t) = -k-\gamma_2 \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

La suite $\{\xi_v(t)\}$ est donc bornée et croissante, d'où convergente. $\xi'_v(t)$ étant borné par M pour $v = 1,2,$ et $-1 \leqslant t < \infty$, la convergence est uniforme et

$$\bar{x}(t) = \lim_{v\to\infty} \xi_v(t)$$

est une solution de (E) telle que

$$\bar{x}(t) = -k-\gamma_2 \qquad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

$$\bar{x}(t) = -k-\gamma_2+\int_0^t f\big(s,\bar{x}_s,u_1(s),u_2(s)\big)\,ds \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\bar{x}(t) \leqslant \bar{x}(t) \qquad \text{pour } -1 \leqslant t < \infty,$$

$$-k-\gamma_2+\int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds \leqslant \bar{x}(t) \leqslant \bar{x}(t) \leqslant k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

La fonction $f(t,\varphi,u_1,u_2)$ étant croissante par rapport à φ, chaque solution $x(t)$ de (E) telle que

$$\bar{x}(t) = -k-\gamma_2 \leqslant x(t) \leqslant \bar{x}(t) = k-\gamma_1 \qquad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0$$

satisfait à l'inégalité

$$-k-\gamma_2+\int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds \leqslant \bar{x}(t) \leqslant x(t) \leqslant \bar{x}(t) \leqslant k-\gamma_1+\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds.$$

Le théorème T est ainsi démontré.

3. Remarque 1. Dans le cas où

$$\varepsilon_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2(t) < 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{3.1}$$

les hypothèses H_2 ne sont pas nécessaires pour l'existence d'une solution $x(t)$ de l'équation (E) telle que

$$-k < x(t) < k \quad \text{pour } -1 \leqslant t < \infty. \tag{3.2}$$

La méthode de T. Ważewski (cf. [2]) permet de démontrer l'existence d'une (au moins) telle solution, mais notre évaluation est plus precise. Au lieu de (3.2) on a l'évaluation (2.6). Dans notre théorème T $\varepsilon_i(t)$ peut changer de signe. Dans le cas où $\varepsilon_i(t)$ change de signe on ne peut pas appliquer la méthode de T. Ważewski (au moins dans l'ensemble $|x| \leqslant k$).

4. Remarque 2. Envisageons deux fonctions $a(t)$ et $b(t)$ de classe C^1 pour $t \geqslant 0$ telle que

$$|a'(t)| \leqslant (1-L-L_1)\varrho - N, \quad |b'(t)| \leqslant (1-L-L_1)\varrho - N, \tag{4.0}$$

$$-k < \gamma_2 \leqslant b(t) \leqslant a(t) \leqslant \gamma_1 < k \quad \text{pour } t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

$$b(0) < 0 < a(0), \tag{4.2}$$

$$a'(t) > b'(t). \tag{4.3}$$

Du notre théorème T il vient qu'on obtient la solution $x(t)$ de l'équation (E) satisfaisant à

$$b(t) < x(t) < a(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0, \tag{4.4}$$

$$b(0) \leqslant x(t) \leqslant a(0) \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0, \tag{4.5}$$

dans le cas où le pilotage $\{u_1(t), u_2(t)\}$ est choisi comme une solution du système (U) avec

$$\varepsilon_1(t) = a'(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0, \tag{4.6}$$

$$\varepsilon_2(t) = b'(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0. \tag{4.7}$$

On a

$$\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds = a(t) - a(0) \leqslant \gamma_1 < k, \quad \int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds = b(t) - b(0) \geqslant \gamma_2 > -k,$$

c'est-à-dire, les hypothèses (2.1) et (2.2) sont satisfaites. En vertu de (4.2) on a

$$-k \leqslant \int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds = \int_0^t b'(s)\,ds < \int_0^t a'(s)\,ds = \int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant k$$

d'où on obtient (2.3). L'hypothèse (4.0) entraîne (2.4). Du théorème T il vient donc que chaque solution $x(t)$ de l'équation (E) avec le pilotage $\{u_1(t), u_2(t)\}$ satisfaisant à U avec ε_1 et ε_2 donné par (4.6) et (4.7) et telle que

$$b(0) \leqslant x(t) \leqslant a(0) \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0$$

satisfait à (4.4).

Références

[1] Z. Mikołajska, *Une remarque sur les solutions bornées d'une équation différentielle avec pilotage*, Ann. Polon. Math. 46 (1985), 189–192.

[2] T. Ważewski, *Sur un de principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), 279–313.

Reçu par la Rédaction le 30.07.1987