ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVIII (1988)

Relèvement horizontal des connexions linéaires au fibré vectoriel associé avec le fibré principal des repères linéaires

par JACEK GANCARZEWICZ (Kraków) et NAUREDDINE RAHMANI (Oran)

0. Introduction. Soit π: $E \to M$ un fibré vectoriel associé au fibré principal des repères linéaires LM. Dans ce travail on donne une construction qui à toute connexion linéaire ∇ sur M associe une connexion linéaire ∇^H sur E. ∇^H s'appelle *relèvement horizontal de* ∇ à E.

Si $E = TM$ est un fibré tangent, alors la construction donnée dans ce travail coïncide avec le relèvement horizontal introduit par Yano et Ishihara [5] et si $E = T^* M$ est un fibré cotangent notre construction coïncide avec le relèvement horizontal introduit par Yano et Patterson [7].

Ensuite on étudie des propriétés du relèvement horizontal des connexions linéaires au fibré vectoriel E. Les résultats obtenus généralisent les résultats de Yano, Inshihara et Patterson [5], [6], [7].

0ª. Notations. Soit π: $E \to M$ un fibré vectoriel associé au fibré principal des repères linéaires LM. On note F la fibre standard de E. Alors F est un espace vectoriel et le groupe linéaire $GL(n, R)$, $n = \dim M$, opère à gauche sur F de telle manière que pour chaque $A \in GL(n, R)$ la translation à gauche λ_A: $F \to F$ est linéaire. D'après la définition du fibré associé [3], il y a l'application Φ: $LM \times F \to E$ (appelée *canonique*) telle que $\Phi(p, z) = \Phi(p', z')$ si et seulement s'il existe un élément A de $GL(n, R)$ tel que $p' = p \cdot A$ et $z = \lambda_A(z')$. Pour $z \in F$ on note Φ_z: $LM \to F$ l'application obtenue de Φ en fixant z.

On fixe une base $E_1, \ldots, E_N$ de F ($\dim F = N$). Si (U, x^i) est une carte sur M, alors on peut définir la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^\alpha)$ sur E par les formules

$$x^i(y) = x^i(\pi(y)), \qquad y = y^\alpha(y) E_\alpha,$$

où $y \in \pi^{-1}(U) \subset E$. On note $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ le repère sur U associé à (U, x^i), et $(\partial_1, \ldots, \partial_n, \delta_1, \ldots, \delta_N)$ le repère sur $\pi^{-1}(U)$ associé à la carte induite. (Pour les indices, on utilise la convention suivante: $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n$ et $\alpha, \beta, \nu, \ldots = 1, \ldots, N$.)

Pour tout $\alpha = 1, \ldots, N$, on définit une section ϱ_α: $U \to E$ par la formule

$$\varrho_\alpha(x) = \Phi(p(x), E_\alpha),$$

où $p(x) = (\partial_1|_x, \ldots, \partial_n|_x)$ est le repère associé à (U, x^i) au point x de U. $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$ sont appelées *sections adaptées à* (U, x^i). Bien sûr, pour tout point x de U, $\varrho_1(x), \ldots, \varrho_N(x)$ forment une base de $E_x = \pi^{-1}(x)$.

1. Relèvement vertical des sections de E et relèvement horizontal des champs de vecteurs. Si $y \in E$, alors on note $V_y E$ l'espace des vecteurs verticaux, c'est-à-dire $V_y E = T_y E_{\pi(y)}$. Comme $E_{\pi(y)}$ est un espace vectoriel, alors il existe l'isomorphisme canonique ψ_y: $Vy E \to E_{\pi(y)}$. Pour toute section s de E on peut définir le relèvement vertical de s comme le champ de vecteurs verticaux sur E donné par la formule

(1.1) $$s^V(y) = \psi_y^{-1}(s_{\pi(y)}).$$

On a la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Si s, s' sont des sections de E et f est une fonction sur M, alors*

$$(s+s')^V = s^V + s'^V, \quad (fs)^V = f^V s^V.$$

On peut observer facilement que le relèvement vertical défini ici coïncide avec le relèvement vertical des champs de vecteurs au fibré tangent (Kobayashi [3], et Yano, Ishihara [5], [6]), avec le relèvement vertical des 1-formes au fibré cotangent (Kobayashi [3], Yano, Patterson [7]) et aussi avec le relèvement vertical des tenseurs de type (1, 1) au fibré $E = TM \otimes T^* M$ (Gancarzewicz et Rahmani [2]).

Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Pour tout point y de E, ∇ définit une décomposition

(1.2) $$T_y E = V_y E \otimes H_y.$$

Si $y = \Phi(p, z)$, alors $H_y = d\Phi_z(\Gamma_z)$, où Γ_z est l'espace horizontal sur LM défini par ∇. Si X est un champ de vecteurs sur M, alors on définit son relèvement horizontal X^H ([1], [3]) comme le champ de vecteurs sur E donné par la formule

(1.3) $$X^H(y) = (d_y\pi | H_y)^{-1}(X_{\pi(y)}).$$

On peut facilement vérifier la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Si X, Y sont des champs de vecteurs sur M et f est une fonction sur M, alors*

$$(X+Y)^H = X^H + Y^H, \quad (fH)^H = f^V X^H,$$

où $f^V = f \circ \pi$.

Si (U, x^i) est une carte sur M, alors un calcul élémentaire permet de trouver les expressions locales de s^V et X^H par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^\alpha)$. On a

$$s^V(y) = s^\alpha(\pi(y))\delta_\alpha, \qquad X^H(y) = X^i(\partial_i - \Gamma^s_{ir}\,\partial^r_s A^\beta_\alpha\, y^\alpha \delta_\beta), \tag{1.4}$$

où $s = s^\alpha \varrho_\alpha$, $X = X^i\ \partial_i$ et

$$\lambda_A(E_\alpha) = \lambda^\beta_\alpha(A)\, E_\beta, \qquad \partial^r_s A^\beta_\alpha = (\partial^r_s A^\beta_\alpha)(I). \tag{1.5}$$

2. Théorème principal. Soit ∇ une connexion linéaire sur M. ∇ définit l'application notée aussi ∇ (voir [1], [3])

$$\nabla\colon \mathcal{X}(M) \times J(E) \ni (X, s) \to \nabla_X s \in J(E),$$

où $\mathcal{X}(M)$ désigne le module des champs de vecteurs sur M et $J(E)$ désigne le module des sections de E. Si (U, x^i) est une carte sur M, alors on a

$$\nabla_{\partial_i} \varrho_\alpha = -\Gamma^s_{ir}\,\partial^r_s A^\beta_\alpha\, \varrho_\beta, \tag{2.1}$$

où Γ^i_{jk} désignent les symboles de Christoffel de ∇ et $\partial^r_s A^\alpha_\beta$ sont définis par (1.5). Le but de ce travail est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Si ∇ est une connexion linéaire sur M, alors il existe une et une seule connexion linéaire $\tilde{\nabla}$ sur E telle que*

$$\tilde{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H, \qquad \tilde{\nabla}_{X^H} s^V = (\nabla_X s)^V, \tag{2.2}$$

$$\tilde{\nabla}_{s^V} X^H = \tilde{\nabla}_{s^V} t^V = 0 \tag{2.3}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M et toutes sections s, t de E.

La connexion $\tilde{\nabla}$ sur E s'appelle *relèvement horizontal* de ∇ au fibré E. Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.1. *Si ∇ et $\tilde{\nabla}$ sont deux connexions linéaires respectivement sur M et E telles que les conditions* (2.2) *et* (2.3) *sont satisfaites, alors pour toute carte (U, x^i) sur M on a*

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk},\\
&\tilde{\Gamma}^\alpha_{ij} = -\partial_i \Gamma^s_{jr}\,\partial^r_s A^\alpha_\beta\, y^\beta + \Gamma^s_{jr}\,\partial^r_s A^\beta_\nu\, y^\nu\, \Gamma^q_{ip}\,\partial^p_q A^\alpha_\beta - \Gamma^s_{ij}\,\Gamma^p_{sq}\,\partial^q_p A^\alpha_\beta\, y^\beta,\\
&\tilde{\Gamma}^\alpha_{k\beta} = -\Gamma^\alpha_{\beta k} = \Gamma^s_{kr}\,\partial^r_s A^\alpha_\beta,\\
&\tilde{\Gamma}^s_{k\alpha} = \tilde{\Gamma}^s_{\alpha k} = 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

où Γ^i_{jk} désignent les symboles de Christoffel de ∇ par rapport à (U, x^i), $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{ij}$, … etc. désignent les symboles de Christoffel de $\tilde{\nabla}$ par rapport à la carte induite et $\partial^i_j A^\alpha_\beta$ sont définis par (1.5).

On démontre ce lemme par un calcul élémentaire utilisant les formules (2.2), (2.3), (1.4) et (2.1).

Démonstration du théorème. D'après le lemme 2.1, l'unicité de $\tilde{\nabla}$ est évidente. On démontre alors l'existence de $\tilde{\nabla}$.

Soit (U, x^i) une carte sur M. On peut définir une connexion linéaire $\tilde{\nabla}$ sur $\pi^{-1}(U) = E|U$ telle que

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i^H} \partial_j^H = (\nabla_{\partial_i} \partial_j)^H, \quad \tilde{\nabla}_{\partial_i^H} \varrho_\alpha^V = (\nabla_{\partial_i} \varrho_\alpha)^V,$$
$$\tilde{\nabla}_{\varrho_\alpha^V} \partial_i^H = \tilde{\nabla}_{\varrho_\alpha^V} \varrho_\beta^V = 0$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$ et $\alpha, \beta = 1, \ldots, N$. D'après les propositions 1.1 et 1.2 on peut déduire que $\tilde{\nabla}$ vérifie les conditions (2.2) et (2.3) pour tous champs de vecteurs X, Y sur U et toutes sections s, t de $E|U$. Si (U, x^i) et (U', x'^i) sont deux cartes sur M, alors utilisant la construction précédente on peut définir deux connexions linéaires $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}'$ respectivement sur $E|U$ et $E|U'$. Les restrictions de $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}$ à $E|(U \cap U')$ sont deux connexions linéaire sur $E|(U \cap U')$ vérifiant les conditions (2.2) et (2.3) pour des champs de vecteurs X, Y sur $U \cap U'$ et des sections s, t de $E|U \cap U'$; alors d'après le lemme 2.1, $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}'$ coïncident sur $E|(U \cap U')$. Utilisant un atlas sur M on peut alors définir une connexion linéaire $\tilde{\nabla}$ sur E vérifiant les conditions (2.2) et (2.3).

Dans les cas particuliers des fibrés tangents et cotangents, d'après le théorème principal on a

PROPOSITION 2.2 (Yano et Ishihara [5], [6]). *Si ∇ est une connexion linéaire sur M, alors il existe une et une seule connexion linéaire $\tilde{\nabla}$ sur TM telle que pour tous champs de vecteurs X, Y sur M on a*

$$\tilde{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \tilde{\nabla}_{X^H} Y^V = (\nabla_X Y)^V, \quad \tilde{\nabla}_{X^V} Y^H = \tilde{\nabla}_{X^V} Y^V = 0.$$

PROPOSITION 2.3 (Yano et Patterson [7]). *Si ∇ est une connexion linéaire sur M, alors il existe une et une seule connexion linéaire $\tilde{\nabla}$ sur $T^* M$ telle que pour tous champs de vecteurs X, Y sur M et toutes 1-formes ω, φ sur M on a*

$$\tilde{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \tilde{\nabla}_{X^H} \omega^V = (\nabla_X \omega)^V, \quad \tilde{\nabla}_{\omega^V} X^H = \tilde{\nabla}_{\omega^V} \varphi^V = 0.$$

Utilisant les formules (voir [2])

$$[s^V, t^V] = 0, \quad [X^H, s^V] = (\nabla_X s)^V,$$

où X est un champ de vecteurs sur M et s, t sont des sections de E, et appliquant le fait que $[X^H, Y^H] - [X, Y]^H$ est un champ de vecteurs verticaux sur E, on peut vérifier la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4. *Si T et R sont le tenseur de torsion et le tenseur de courbure d'une connexion linéaire ∇ sur M, alors le tenseur de torsion $\tilde{T}$ et le tenseur de courbure $\tilde{R}$ du relèvement horizontal $\tilde{\nabla}$ de ∇ à E vérifient les formules*

$$\tilde{T}(X^H, Y^H) = (T(X, Y))^H + [X, Y]^H - [X^H, Y^H],$$

$$\tilde{T}(s^V, X^H) = \tilde{T}(X^H, s^V) = \tilde{T}(s^V, t^V) = 0,$$
$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = (R(X, Y)Z)^H,$$
$$\tilde{R}(X^H, Y^H)(s^V) = (R(X, Y)s)^V,$$
$$\tilde{R}(X^H, s^V) = \tilde{R}(s^V, t^V) = 0,$$

où X, Y, Z sont des champs de vecteurs sur M et s, t sont des sections de E.

La proposition précédente implique

PROPOSITION 2.5. *Si ∇ est une connexion linéaire sans torsion sur M, alors le relèvement horizontal $\tilde{\nabla}$ de ∇ à E est sans torsion si et seulement si la distribution horizontal $y \to H_y$ est intégrable sur E.*

PROPOSITION 2.6. *Soit ∇ une connexion linéaire sur M telle que le tenseur de courbure R est zéro. Alors le relèvement horizontal $\tilde{\nabla}$ de ∇ à E est sans courbure (c'est-à-dire, $\tilde{R} = 0$) si et seulement si $R(X, Y)s = 0$ pour tous champs de vecteurs X, Y sur M et toute section s de E.*

Ces propositions généralisent les théorèmes obtenus par K. Yano. S. Ishihara et E. M. Patterson dans les cas des fibrés tangents et cotangents [5], [6], [7].

Bibliograhie

[1] R. Crittenden, *Covariant differentiation*, Quart. J. Math. (2), 13 (1962), 285–298.

[2] J. Gancarzewicz et N. Rahmani, *Relèvement horizontaux de tenseurs de type* (1, 1) *au fibré $E = TM \; T^*M$*, ce fasc., 281–289

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, New York 1963.

[4] N. Rahmani, *Relèvement horizontaux de tenseurs de type* (1, 1) *au fibré des tenseurs de type* (p, q), sous presse.

[5] K. Yano and S. Ishihara, *Horizontal lifts from a manifold to its tangent bundle*, J. Math. Mech. 16 (1967), 1015–1030.

[6] —, —, *Tangent and cotangent bundles*, New York 1973

[7] K. Yano and E. M. Patterson, *Horizontal lifts from a manifold to its cotangent bundle*, J. Math. Soc. Japan 16 (1967), 185–197

INSTYTUT MATEMATYKI
UNIWERSYTETU JAGIELLONSKIEGO
KRAKOW, POLOGNE

and

UNIVERSITÉ D'ORAN (ES-SENIA)
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
ORAN, ALGÉRIE

Reçu par la Rédaction le 1985.12.31