ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1968)

Sur le premier problème de Fourier relatif à l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien mixte

par W. BODANKO (Częstochowa)

1. W. Feller [1] a démontré que la fonction de probabilité de passage $F(x, t, y, s)$ dans un processus markovien mixte satisfait à l'équation

$$(1)\qquad a(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t} = p(x,t)\Big\{F(x,t,y,s)-\int_{-\infty}^{\infty}F(z,t,y,s)P(x,t,dz)\Big\}$$

et à une condition finale

$$(2)\qquad \lim_{t\to s-}F(x,t,y,s)=E(x,y)\,,$$

où

$$E(x,y)=\begin{cases}0 & \text{pour}\quad y<x\,,\\ 1 & \text{pour}\quad y\geqslant x\,.\end{cases}$$

M. Krzyżański [5] a démontré un principe d'extremum, dans un domaine non borné, relatif à l'équation de la forme

$$(3)\qquad L(u)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u''_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u'_{x_i}+c(x,t)u-u'_t = p(x,t)\int_{\Omega}\big(u(x,t)-u(z,t)\big)P(x,t,dz)$$

dans la classe des fonctions bornées.

Le principe d'extremum dans un domaine borné peut être facilement démontré par une transformation de la forme

$$u(x,t)=v(x,t)\exp(\lambda t)\qquad \text{où}\qquad \lambda>c(x,t)\,.$$

Dans le présent travail nous allons démontrer que le premier problème de Fourier relatif à l'équation (3) admet une solution.

2. THÉORÈME I. *Nous supposons que*

(a) *Le domaine* $\Omega \subset E_n$ *est borné et pour chaque point* $R \in \mathrm{Fr}(\Omega)$ *il existe un entourage* n*-dimensional* V *tel que* $V \cap \mathrm{Fr}(\Omega)$ *s'écrit sous la forme*

$$x_i = h(x_i, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) .$$

Les fonctions $h, h'_{x_i}, h''_{x_i x_j}$ *sont continues et les fonctions* $h''_{x_i x_j}$ *satisfont à la condition de Hölder.*

(b) *La fonction* $P(x, t, \Gamma)$ *est définie pour* $(x, t) \in \bar{Q}$ *où* $\bar{Q} = \Omega \times (0, T)$ *et sur les ensembles measurables (boréliens)* Γ. *De plus*

1) $\int_\Omega P(x, t, dz) \leqslant 1$ *pour* $(x, t) \in \bar{Q}$,

2) *la fonction* $w(x, t) = \int_\Omega m(z, t) P(x, t, dz)$ *est continue et satisfait localement à la condition de Hölder par rapport à* x *si la fonction* $m(x, t)$ *est continue dans* $\bar{Q}$.

(c) *Les coefficients* a_{ij}, b_i, c *sont continus dans* $\bar{Q}$.

(d)

$$|a_{ij}(x', t') - a_{ij}(x, t)| \leqslant M(|x' - x|^\lambda + |t' - t|^\lambda) ,$$
$$|b_i(x', t) - b_i(x, t)| \leqslant M(|x' - x|^\lambda) ,$$
$$|c(x', t) - c(x, t)| \leqslant M(|x' - x|^\lambda) ,$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$, $0 < \lambda \leqslant 1$.

(e) *La fonction* $p(x, t)$ *est continue dans* $\bar{Q}$ *et satisfait dans* Q *localement à la condition de Hölder par rapport à* x.

(f) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \lambda_i \lambda_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ *pour* $(x, t) \in Q$ *et* $\mu = \mathrm{const} > 0$.

(g) *La fonction* $\varphi(x, t)$ *est continue dans la frontière parabolique* Σ *de* Q.

Dans ces conditions il existe une solution (unique) $u(x, t)$ *de l'équation* (1) *régulière* (voir [5], p. 268) *dans* $\bar{Q}$ *telle que*

$$u(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \Sigma .$$

Démonstration. Soit $u_0(x, t)$ une solution, régulière dans Q, de l'équation

$$L(u) = 0 \tag{4}$$

telle que $u_0(x, t) = \varphi(x, t)$ pour $(x, t) \in \Sigma$ (voir [2], p. 69).

Considérons l'équation intégrale

$$u(x, t) = u_0(x, t) - \\ - \int_0^t ds \int_\Omega G(x, t, y, s) \Big[p(y, s) \int_\Omega \big(u(y, s) - u(z, s)\big) P(y, s, dz) \Big] dy \tag{5}$$

où $G(x, t, y, s)$ est la fonction de Green relative à l'équation (4) et au cylindre Q [6].

De plus [3]

$$|G(x, t, y, s)| \leqslant \bar{M}(t-s)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\bar{\mu}|x-y|^2}{t-s}\right\} \tag{6}$$

et $\bar{M}$ et $\bar{\mu}$ sont des constantes positives.

D'après (6) nous avons

$$\int_{\Omega} |G(x, t, y, s)|\, dy \leqslant M_1 \tag{7}$$

pour x, t, s $(t > s)$ arbitraires.

Posons

$$L_1(u) = \int_0^t ds \int_{\Omega} G(x, t, y, s)\Big[p(y, s)\int_{\Omega} \big(u(y, s) - u(z, s)\big) P(y, s, dz)\Big] dy\,.$$

L'équation (5) peut s'écrire sous la forme

$$u(x, t) = u_0(x, t) - L_1\big(u(x, z)\big)\,.$$

Formons la suite $\{u_m(x, t)\}$:

$$u_1(x, t) = u_0(x, t) - L_1\big(u_0(x, t)\big)\,,$$

$$u_m(x, t) = u_0(x, t) - L_1\big(u_{m-1}(x, t)\big)\,, \qquad m = 2, 3, \ldots$$

Désignons

$$p_0 = \max_Q |p(x, t)|\,, \qquad M_2 = \max_Q |u_0(x, t)|\,.$$

D'après (7) on a

$$|u_1(x, t) - u_0(x, t)| \leqslant 2p_0M_1M_2t \quad \text{pour} \quad (x, t) \in Q\,.$$

Nous démontrons facilement que

$$|u_{m+1}(x, t) - u_m(x, t)|$$

$$\leqslant (2p_0M_1)^{m+1}\cdot M_2\cdot\frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \bar{Q}\,, \text{ et } m = 1, 2, \ldots$$

La série $\sum_{m=0}^{\infty}(u_{m+1} - u_m)$ converge uniformément dans $\bar{Q}$, c'est-à-dire la suite $\{u_m\}$ converge dans $\bar{Q}$ vers la fonction $\bar{u}(x, t)$.

La fonction $\bar{u}(x, t)$ est continue dans $\bar{Q}$ et satisfait à l'équation (5).

Nous démontrerons maintenant le

LEMME 1. *Si la fonction $f(x,t)$ est continue dans $\bar{Q}$, la fonction*

$$g(x,t)=\int_0^t ds\int_\Omega G(x,t,y,s)f(y,s)dy$$

satisfait localement dans Q à la condition de Hölder par rapport à x.

Démonstration. La fonction de Green $G(x,t,y,s)$ peut s'écrire sous la forme

$$G(x,t,y,s)=Z(x,t,y,s)-W(x,t,y,s)\,,$$

où $Z(x,t,y,s)$ est la solution fondamentale de l'équation (4) et

$$W(x,t,y,s)=\int_s^t dr\int_{\mathrm{Fr}(\Omega)} Z(x,t,z,r)H(z,r,y,s)d\sigma_z\,.$$

La fonction $H(x,t,y,s)$ satisfait à une certaine équation intégrale. Alors

$$g(x,t)=\int_0^t ds\int_\Omega Z(x,t,y,s)f(y,s)dy-\int_0^t ds\int_{\mathrm{Fr}(\Omega)} Z(x,t,y,s)l(y,s)d\sigma_y \tag{8}$$

où

$$l(y,s)=\int_0^s dr\int_\Omega H(y,s,z,r)f(z,r)dz\,.$$

Nous avons les inégalités [3]:

$$\begin{gathered}|Z(x,t,y,s)|\leqslant K(t-s)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\mu_1|x-y|^2}{t-s}\right\},\\ |Z'_{x_i}(x,t,y,s)|\leqslant K(t-s)^{-(n+1)/2}\exp\left\{-\frac{\mu_1|x-y|^2}{t-s}\right\}.\end{gathered} \tag{9}$$

D'après (8) et (9) la fonction $g(x,t)$ admet des dérivées g'_{x_i} continues dans Q.

Nous démontrerons que la fonction $\bar{u}(x,t)$ satisfait au premier problème de Fourier relatif à l'équation (3).

La fonction $u(x,t)$ peut s'écrire sous la forme

$$\bar{u}(x,t)=u_0(x,t)-\bar{u}_1(x,t)\,,$$

où

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(x,t)=\int_0^t ds\int_\Omega G(x,t,y,s)p(y,s)\bar{u}(y,s)\int_\Omega P(y,s,dz)dy-\\ -\int_0^t ds\int_\Omega G(x,t,y,s)p(y,s)\int_\Omega \bar{u}(z,s)P(y,s,dz)dy\,.\end{aligned}$$

La fonction $\bar{u}_1(x, t)$ satisfait, en vertu du Lemme 1 à l'équation (3) et à la condition

$$\bar{u}_1(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \Sigma .$$

Alors la fonction $\bar{u}(x, t)$ est une solution régulière dans $\bar{Q}$ de l'équation (3) et

$$\bar{u}(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \Sigma .$$

3. Dans le cas $n = 1$ on peut démontrer que le premier problème de Fourier relatif à l'équation (3) admet une solution dans un domaine non cylindrique.

Désignons par D le domaine

$$\{(x, t)\colon\ c_1(t) < x < c_2(t),\ 0 < t < \infty\} ,$$

où $c_i(x, t)$ sont des fonctions définies pour $t \geqslant 0$.

L'équation (3) admet la forme

$$u''_{xx} = a(x, t)u'_x + b(x, t)u'_t + c(x, t)u + p(x, t) + \int\limits_{c_1(t)}^{c_2(t)} \big(u(x, t) - u(z, t)\big) P(x, t, dz) . \tag{10}$$

Nous supposons que la fonction $P(x, t, \Gamma)$ satisfait à l'hypothèse (b) du Théorème I.

THÉORÈME II. *Nous supposons que:*

(a) *La fonction* $b(x, t)$ *est de classe* C^1 *dans* $\bar{D}$ *et* $b(x, t) \geqslant B > 0$, $B = \text{const}$.

(b) *La fonction* $a(x, t)$ *est de classe* C^1 *dans* $\bar{D}$.

(c) *Les fonctions* $c(x, t)$ *et* $p(x, t)$ *sont continues dans* $\bar{D}$ *et satisfont localement dans* D *à la condition de Hölder par rapport à* x.

(d) *Les fonctions* $c_i(t)$ *sont de classe* C^1 *pour* $t \geqslant 0$.

(e) *La fonction* $\varphi(x)$ *est continue dans* $\langle c_1(0), c_2(0)\rangle$.

(f) *Les fonctions* $f_i(t)$ *satisfont à la condition de Lipschitz pour* $t \geqslant 0$.

(g) $\varphi[c_i(0)] = f_i(0)$, $i = 1, 2$.

Alors il existe une solution unique $u(x, t)$ *de l'équation* (10), *régulière dans* $\bar{D}$, *telle que*

$$u(x, 0) = \varphi(x) , \quad u\big(c_i(t), t\big) = f_i(t) , \quad i = 1, 2 .$$

Démonstration. Introduisons les nouvelles variables

$$x' = \int\limits_{c_1(t)}^{x} \sqrt{b(s, t)}\, ds , \quad t' = t . \tag{11}$$

Désignons par D_1 l'image de D par la transformation et les images de $c_i(t)$ par $\bar{c}_i(t)$.

L'équation (10) admet la forme

$$(12)\qquad u''_{x'x'} = u_t + \bar{a}(x', t)u'_{x'} + \bar{c}(x', t)u + \\ + \bar{p}(x', t)\int\limits_{\bar{c}_1(t)}^{\bar{c}_2(t)} \big(u(x, t) - u(z, t)\big)P(x, t, dz) .$$

Introduisons la nouvelle fonction

$$v(x, t) = u/W$$

où

$$W(x, t) = \exp\Big[\tfrac{1}{2}\int\limits_{\bar{c}_1(t)}^{x'} a(s, t)\,ds\Big]$$

(transformation de Block).

L'équation (12) admet maintenant la forme

$$(13)\qquad v''_{x'x'} - v'_t = \bar{\bar{c}}(x', t)v + \\ + \bar{\bar{p}}(x', t)\int\limits_{\bar{c}_1(t)}^{\bar{c}_2(t)} \big(v(x', t)W(x', t) - v(z, t)W(z, t)\big)P(x, t, dz) ,$$

où

$$\bar{\bar{p}} = \bar{p}/W , \qquad \bar{\bar{c}} = \big(W'_t + \bar{a}(x', t)W'_{x'} + \bar{c}(x', t)W - W''_{x'x'}\big)/W .$$

Désignons par $v_0(x', t)$ la solution de l'équation

$$(14)\qquad V_{xx} - V_t = 0$$

réguliere dans D_1 et satisfaisant aux conditions

$$(15)\qquad v(x', 0) = \varphi(x')/W(x', 0) , \qquad V\big(c_i(t), t\big) = f_i(t)/W\big(c_i(t), t\big)$$

(voir [5], p. 523).

Considérons l'équation intégrale

$$(16)\qquad v(x', t) = v_0(x', t) - \int\limits_0^t ds \int\limits_{\bar{c}_1(t)}^{\bar{c}_2(t)} G(x, t, y, s)\Big[\bar{\bar{c}}(y, s)v(y, s) + \\ + \bar{\bar{p}}(y, s)\int\limits_{\bar{c}_1(t)}^{\bar{c}_2(t)} \big(v(y, s)W(y, s) - v(z, s)W(z, s)\big)P(y, s, dz)\Big]dy$$

où $G(x', t, y, s)$ est la fonction de Green relative à l'équation (14) et au domaine D_1.

La suite de la démonstration est pareille à celle de la démonstration du Théorème I.

Remarque 1. En appliquant cette méthode on peut démontrer le Théorème I pour l'équation

$$L(u) = f(x, t) + p(x, t) \int_{\Omega} \big(u(x, t) - u(z, t)\big) P(x, t, dz) .$$

Remarque 2. Le premier problème de Fourier relatif à l'équation

$$u''_{xx} - u'_t = f(x, t) + p(x, t) \int_0^{\infty} \big(u(x, t) - u(z, t)\big) P(x, t, dz)$$

dans

$$D = \{(x, t):\ x \geqslant 0, t \geqslant 0\}$$

admet une solution.

Dans ce cas nous appliquons la fonction

$$G(x, t, y, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (t-s)^{-1/2} \left[\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+y)^2}{4(t-s)}\right\}\right] .$$

Travaux cités

[1] W. Feller, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse*, Mat. Annalen 113 (1936), pp. 113-160.

[2] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Englewood Cliffs 1964.

[3] A. Ilin, A. Kałasnikov et O. Olejnik, *Equations linéaires du second ordre du type parabolique* (en russe), Успехи Мат. Наук 17 (3) (1962), pp. 3-146.

[4] M. Krzyżański, *Principe d'extremum relatif aux solutions de l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien mixte*, Ann. Polon. Math. 16 (1965), pp. 365-370.

[5] — *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego I*, Warszawa 1957.

[6] W. Pogorzelski, *Étude d'une fonction de Green et du problème aux limites pour l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1958), pp. 288-307.

Reçu par la Rédaction le 7. 6. 1966