ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Remarques sur des inégalités entre les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre

par W. Pawelski (Gdańsk)

Dans la note précédente [1] nous avons déterminé dans le lemme 2, en nous appuyant sur le lemme 1, un ensemble dans lequel une inégalité forte a lieu entre les intégrales $u(x,y)$ et $v(x,y)$ formées de caractéristiques et satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

en supposant qu'à l'intérieur du segment $\bar{K} = \{x = x_0;\, y \in \langle y_0 - a_1, y_0 + a_1 \rangle\}$ on a entre ces intégrales l'inégalité $u(x_0, y) > v(x_0, y)$ tandis que

$$u(Q_i^*) = v(Q_i^*), \quad i = 1, 2,$$

aux points

$$Q_1^*(x_0, y_0 - a_1) \quad \text{et} \quad Q_2^*(x_0, y_0 + a_1).$$

Nous allons donner ici une généralisation de ces lemmes sous la forme des théorèmes 1 et 2 concernant les intégrales u et v vérifiant l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right). \tag{1}$$

Ensuite, en nous appuyant sur le théorème 2, nous étendrons ces considérations aux intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = f_\nu\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right), \quad \nu = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

De même que dans [1] nous avons obtenu le lemme 1 en nous appuyant sur une remarque de A. Pliś, nous obtenons ici le théorème suivant:

Théorème 1. *On suppose que*:

(α) *La fonction* $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ *remplit la condition de Lipschitz par rapport à* z *avec une certaine constante dans un domaine* D *dont la projection sur le plan* $x, y_1, \ldots, y_n$ *recouvre l'ensemble*

$$|x - x_0| < a, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant b_i - M|x - x_0|, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

où

$$a > 0, \quad M > 0, \quad b_i > 0, \quad a < b_i/M,$$

et par rapport aux $q_1, \ldots, q_n$ *elle remplit la condition*

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n) - f(x, y_1, \ldots, y_n, z, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n)| < M \sum_{i=1}^{n} |q_i - \bar{q}_i| \quad \text{dans} \quad D,$$

si $\sum_{i=1}^{n} |q_i - \bar{q}_i| > 0$.

(*Dans le théorème* 2 *nous admettons l'existence des dérivées* f_{q_i} *et l'inégalité*

(4) $$|f_{q_i}| < M\,.)$$

(β) $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ *sont des intégrales de l'équation* (1) *ayant dans l'ensemble* (3) *une différentielle totale au sens de Stolz telles que leurs éléments de contact appartiennent au domaine* D.

(γ) *À l'intérieur du domaine* G *défini comme il suit:*

(5) $$x = x_0, \quad |y_i - y_i^0| < b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

on a l'inégalité

(6) $$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{>} v(x_0, y_1, \ldots, y_n)$$

et sur la frontière B *du domaine* G *on a*

(7) $$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} v(x_0, y_1, \ldots, y_n)\,.$$

Dans ces hypothèses l'égalité

$$u(Q) = v(Q)$$

entraîne les égalités

$$u_{y_i}(Q) = v_{y_i}(Q), \quad i = 1, \ldots, n,$$

en chaque point Q *de l'ensemble* (3) *n'appartenant pas à la frontière* B.

Si donc on a

(8) $$\sum_{i=1}^{n} [u_{y_i}(Q) - v_{y_i}(Q)]^2 > 0$$

les valeurs des intégrales $u(Q)$ *et* $v(Q)$ *sont différentes ou, plus exactement, ces intégrales satisfont en de tels points* Q *à l'inégalité*

$$u(Q) \underset{(<)}{>} v(Q)\,.$$

Demonstration. Il résulte des inégalités (6) et (7) que dans le domaine fermé $\bar{G}$ l'inégalité

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} v(x_0, y_1, \ldots, y_n)$$

a lieu.

Il en résulte, en tenant compte des conditions (α) et (β), que les hypothèses de la remarque de A. Pliś sont vérifiées, ce qui entraîne l'inégalité

$$u \underset{(\leqslant)}{\geqslant} v$$

dans tout l'ensemble (3).

Dans la partie restante de la démonstration il n'y a plus qu'à suivre la démonstration du lemme 1 de la note précédente [1]. Donc si le point Q est intérieur à l'ensemble (3) il résulte du principe de l'extrémum que l'égalité $u(Q) = v(Q)$ entraîne les égalités $u_{y_i}(Q) = v_{y_i}(Q)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Si donc en un point intérieur Q on a l'inégalité (8), il en résulte immédiatement qu'on a $u(Q) \underset{(<)}{>} v(Q)$. Mais si le point $Q(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ appartient à la face latérale de l'ensemble (3) et s'il est différent des points de la frontière B alors si l'on avait l'inégalité (8) et l'égalité $u(Q) = v(Q)$, un raisonnement analogue à celui du mémoire [3] aboutirait à une contradiction. Donc, dans ce cas aussi, l'inégalité (8) entraîne l'inégalité $u(Q) \underset{(<)}{>} v(Q)$.

En nous appuyant sur le théorème 1 nous établirons maintenant le théorème 2, qui n'est en vérité qu'une légère généralisation du théorème 1 de [3], mais qui est utile dans les applications, comme nous l'avons vu dans [1] sur l'exemple de la démonstration du théorème 2 et, nous le verrons ici, dans l'application du théorème 3.

Théorème 2. *Supposons*:

(α) *que la fonction* $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ *ainsi que ses dérivées du premier ordre par rapport aux* $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ *soient continues dans un domaine* D *dont la projection sur le plan* $x, y_1, \ldots, y_n$ *recouvre l'ensemble* (3);

(β) *que les dérivées* f_{y_i}, f_z, f_{q_i} *remplissent dans* D *la condition de Lipschitz par rapport aux variables* $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ *et qu'on ait les inégalités* (4);

(γ) *que* $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ *soient des intégrales de l'équation* (1) *possédant une différentielle totale dans l'ensemble* (3) *et que leurs éléments de contact appartiennent au domaine* D;

(δ) *que les intégrales* u *et* v *soient formées de caractéristiques*;

(*Les hypothèses précédentes s'accordent avec celles du théorème* 1 *de* [3].);

(ε) *qu'on ait l'inégalité*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{>} v(x_0, y_1, \ldots, y_n)$$

à l'intérieur du domaine G *défini par* (5) *et sur la frontière* B *du domaine* G

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) .$$

Avec ces hypothèses on a l'inégalité

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{>} v(x, y_1, \ldots, y_n)$$

aux points Q de l'ensemble (3) *différents des points de la frontière B tels que $u(Q) = v(Q)$.*

Démonstration. Les courbes C et $\bar{C}$ définies au théorème 5 du mémoire [2], issues des points Q différents des points de la frontière B, passent uniquement par l'intérieur du domaine G, puisque les dérivées y_i' remplissent la condition $|y_i'| < M$. Il résulte des hypothèses de même que dans la démonstration du lemme 2 dans [1], qu'on peut appliquer ici le théorème 1.

Mais on sait par le théorème 1 que si l'on avait en un tel point Q l'égalité $u(Q) = v(Q)$, les égalités

$$u_{y_i}(Q) = v_{y_i}(Q), \quad i = 1, \ldots, n,$$

devraient aussi y avoir lieu.

Mais alors les deux intégrales devraient être égales le long de la courbe commune C issue du point Q et passant par l'intérieur du domaine G, ce qui aboutirait à une contradiction, puisque $u \underset{(<)}{>} v$ dans G.

Il en résulte presque immédiatement que la conclusion de notre théorème est juste.

Remarque. Les lemmes 1 et 2 du mémoire [1] résultent immédiatement des théorèmes 1 et 2 dans le cas où $n = 1$.

En nous appuyant ensuite sur les hypothèses du théorème 4 du mémoire de J. Szarski ([3], p. 21-22) et en introduisant la transformation de Mayer

$$x_\nu - x_\nu^0 = \lambda_\nu t, \quad \nu = 1, \ldots, k \tag{9}$$

où

$$|\lambda_\nu| < a_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{k} |\lambda_\nu| > 0,$$

qui transforme des intégrales du système (2) définies dans l'ensemble

$$\begin{gathered} |x_\nu - x_\nu^0| < a_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, k, \\ |y_i - y_i^0| \leqslant b_i - M \sum_{\nu=1}^{k} |x_\nu - x_\nu^0|, \quad i = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{10}$$

où

$$a_\nu > 0, \quad b_i > 0, \quad M > 0, \quad a_\nu < b_i/M,$$

en intégrales

$$z(t, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \stackrel{\mathrm{df}}{=} z(x_1^0 + \lambda_1 t, \ldots, x_k^0 + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n)$$

de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu f_\nu\left(x_1^0 + \lambda_{11} t, \ldots, x_k^0 + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right) \tag{11}$$

définies au moins dans l'ensemble

$$(12) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 + \varepsilon(\lambda), \quad |y_i - y_i^0| \leqslant b_i - M \sum_{\nu=1}^{k} |\lambda_\nu| t ,$$

où

$$0 < \varepsilon(\lambda) < \min_{\nu} \left[\frac{a_\nu - |\lambda_\nu|}{\sum_{\nu=1}^{k} |\lambda_\nu|} \right]$$

nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Supposons*:

(α) *que les fonctions* $f_\nu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ *et leurs dérivées du premier ordre par rapport aux variables* $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ *soient continues dans un domaine* D *et de plus que les dérivées* $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i}, \frac{\partial f_\nu}{\partial z}, \frac{\partial f_\nu}{\partial q_i}$ *remplissent dans* D *la condition de Lipschitz par rapport aux* $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ *et qu'on ait les inégalité*

$$(13) \qquad \left| \frac{\partial f_\nu}{\partial q_i} \right| < M ;$$

(β) *que les intégrales* $u(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ *du système* (2) *soient définies et possèdent une différentielle totale dans l'ensemble* (10) *et que leurs éléments de contact appartiennet au domaine* D;

(γ) *que les intégrales* u *et* v *remplissent l'inégalité forte*

$$u(x_1^0, \ldots, x_k^0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{>} v(x_1^0, \ldots, x_k^0, y_1, \ldots, y_n)$$

dans un domaine G *de l'espace à* n *dimensions défini comme il suit*:

$$x_\nu = x_\nu^0, \quad |y_i - y_i^0| < b_i, \quad \nu = 1, \ldots, k, \ i = 1, \ldots, n$$

et qu'on ait l'inégalité faible

$$u(x_1^0, \ldots, x_k^0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} v(x_1^0, \ldots, x_k^0, y_1, \ldots, y_n)$$

sur la frontière B *du domaine* G;

(δ) *que les intégrales*

$$u(x_1^0 + \lambda_1 t, \ldots, x_k^0 + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n) ,$$
$$v(x_1^0 + \lambda_1 t, \ldots, x_k^0 + \lambda_k t, y_1, \ldots, y_n)$$

de l'équation (11) *soient formées de caractéristiques dans l'ensemble* (12).

Dans ces hypothèses l'inégalité

$$u(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{>} v(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$$

a lieu aux points Q *de l'ensemble* (10) *qui sont différents des points de la frontière* B *auxquels on a* $u(Q) = v(Q)$.

D'abord on ramène immédiatement la démonstration de ce théorème au théorème 2, à l'aide de la transformation de Mayer, appliquée à l'équation (11). Ensuite en appliquant un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 4 de [3] on obtient la conclusion de notre théorème.

Application. Pour indiquer une application du théorème 3, considérons le système de deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = f_\nu\left(x_1, x_2, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \nu = 1, 2, \tag{14}$$

et supposons que les fonctions f_ν ainsi que les deux intégrales u et v vérifiant le système (14) remplissent, à l'exception de la condition (γ), toutes les conditions restantes du théorème 3 dans l'ensemble

$$|x_\nu - x_\nu^0| < a, \quad |y - y_0| \leqslant b - M\sum_{\nu=1}^{2}|x_\nu - x_\nu^0| \tag{15}$$

où

$$a > 0, \quad b > 0, \quad M > 0, \quad a < b/2M.$$

Mais, au lieu de la condition (γ), posons par exemple,

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y) \underset{(<)}{>} v(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y)$$

à l'intérieur du segment $\bar{l}$ déterminé par (15) en admettent que

$$x_\nu = \bar{x}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \tag{16}$$

où

$$0 < \bar{x}_\nu - x_\nu^0 < a,$$

et que pour les points limites $\bar{Q}_1$ et $\bar{Q}_2$ de ce segment on a

$$u(\bar{Q}_i) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} v(\bar{Q}_i), \quad i = 1, 2,$$

(donc, en particulier, on peut avoir l'égalité $u(Q_i) = v(Q_i)$).

Construisons encore le domaine contenu dans (15) et défini par les inégalités:

$$\begin{aligned} &|x_\nu - \bar{x}_\nu| < a_\nu, \quad \nu = 1, 2, \\ &|y - y_0| \leqslant b_1 - M\sum_{\nu=1}^{2}|x_\nu - \bar{x}_\nu| \end{aligned} \tag{17}$$

où

$$a_\nu = a + x_\nu^0 - \bar{x}_\nu \quad \text{et} \quad b_1 = b - M\sum_{\nu=1}^{2}(\bar{x}_\nu - x_\nu^0).$$

En posant $x_\nu = \bar{x}_\nu$ dans (17) on obtiendra le segment $\bar{l}$. D'après les hypothèses précédentes nous obtenons, en vertu du théorème 3 appliqué aux intégrales u et v dans l'ensemble (17), l'inégalité

$$u \underset{(<)}{>} v$$

valable aux points de cet ensemble qui sont différents du point $\bar{Q}_t$ (ou de tous les deux points) où $u(\bar{Q}_t) = v(\bar{Q}_t)$. Remarquons que, en vertu des hypothèses (16) et de la définition des nombres a_ν dans (17), la portion de l'ensamble (17) déterminée pour $x_\nu \geqslant \bar{x}_\nu$ et celle de l'ensemble (15) formé des points de (15) tels que $x_\nu \geqslant \bar{x}_\nu$, sont identiques. Des inégalités relatives au segment $\bar{l}$ il résulte donc tout de suite l'inégalité

$$u \underset{(<)}{>} v$$

dans la portion de l'ensemble (15) déterminée par les inégalités $x_\nu > \bar{x}_\nu$.

Nous appliquerons ce procédé dans un autre mémoire concernant les inégalités mixtes entre les intégrales vérifiant un système d'équations du type (14).

Travaux cités

[1] W. Pawelski, *Sur les inégalités mixtes entre les intégrales de l'équation aux dérivéess partielles* $z_x = f(x, y, z, z_y)$, Ann. Polon. Math., ce volume, p. 235-247.

[2] — *Remarques sur des inégalités mixtes entre les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), p. 309-326.

[3] J. Szarski, *Sur certaines inégalités entre les intégrales des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), p. 1-34.

Reçu par la Rédaction le 12. 2. 1962