ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Propriété limite du potentiel généralisé de charge spatiale relativement à l'équation parabolique

par S. CĄKAŁA (Warszawa)

1. Introduction. Soit l'équation aux dérivées partielles du type parabolique:

$$(1)\qquad \hat{\psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(X,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c$ sont des fonctions continues des variables $(X, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$ déterminées dans un domaine Ω borné pour $X \in E_n$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Supposons que la forme quadratique

$$(2)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$$

soit définie positive pour $X \in \Omega$, et $0 \leqslant t \leqslant T$. On suppose que les coefficients de l'équation (1) vérifient dans le domaine Ω par rapport aux variables spatiales X et à la variable t des conditions de Hölder de la forme:

$$(3)\qquad \begin{gathered} |a_{\alpha\beta}(X,t) - a_{\alpha\beta}(Y,\tau)| < k[|XY|^h + |t-\tau|^{h'}], \\ |b_\alpha(X,t) - b_\alpha(Y,t)| < k'|XY|^h, \qquad |c(X,t) - c(Y,t)| \leqslant k''|XY|^h, \\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n, \qquad 0 < h, h' \leqslant 1 \end{gathered}$$

où $|XY|$ désigne la distance des points X et Y; k, k', k'' sont constants.

En admettant les hypothèses (2) et (3) W. Pogorzelski a prouvé dans le travail [1] que la solution fondamentale de l'équation (1) est une fonction donnée par la formule:

$$(4)\qquad \begin{gathered} \Gamma(X,t;Y,\tau) = w^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau) + \\ + \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta)\Phi(M,\theta;Y,\tau)\,dM\,d\theta, \\ X \neq Y, \quad X, Y \in \Omega', \quad 0 \leqslant \tau < t \neq \leqslant T, \end{gathered}$$

où dM désigne l'élément de volume au point M et où

$$(5)\qquad w^{M,\theta}(X, t; Y, \tau) = (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{M,\theta}(X, Y)}{4(t-\tau)}\right],$$

$$(6)\qquad \vartheta^{M,\tau}(X, Y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M, \tau)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta);$$

$a^{\alpha\beta}(M, \tau)$ sont les éléments de la matrice inverse $[a_{\alpha\beta}(M, \tau)]$, $X(x_1, \dots, x_n)$ et $Y(y_1, \dots, y_n)$ sont deux points arbitraires du domaine Ω, Ω' est un domaine arbitraire borné, qui contient Ω avec sa frontière S. On a prolongé tous les coefficients en dehors du domaine Ω au domaine Ω' de façon que les hypothèses (2) et (3) soient vérifiées. La condition (2) implique l'existence de deux nombres positifs g et G tels que

$$(6a)\qquad 4g|XY|^2 \leqslant \vartheta^{M,\tau}(X, Y) \leqslant 4G|XY|^2.$$

La fonction $\Phi(X, t; Y, \tau)$ est la solution de l'équation intégrale de Volterra faiblement singulière:

$$(7)\qquad \Phi(X, t; Y, \tau) = f(X, t; Y, \tau) + \\ + \lambda\int_\tau^t \iiint_{\Omega'} N(X, t; M, \theta)\Phi(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta,$$

où

$$(7a)\qquad N(X, t; M, \theta) = \sqrt{\det[a^{\alpha\beta}(X, t)]}\,\hat{\varphi}_{X,t}[w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)],$$

$$(7b)\qquad f(X, t; Y, \tau) = \lambda N(X, t; Y, \tau), \qquad \lambda = (2\sqrt{\pi})^{-n}.$$

Cette fonction admet la forme suivante:

$$(8)\quad \Phi(X, t; Y, \tau) = f(X, t; Y, \tau) + \lambda\int_\tau^t \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(X, t; M, \theta) f(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta,$$

où

$$(8a)\qquad \mathfrak{N}(X, t; M, \theta) = N(X, t; M, \theta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu N_\nu(X, t; M, \theta)$$

est le noyau résolvant de l'équation (7). Les éléments de la série (8a) sont des noyaux itérés du noyau $N(X, t; M, \theta)$.

W. Pogorzelski a étudié [1] les propriétés du potentiel généralisé de charge spatiale

$$(9)\qquad U(X, t) = \int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)\,dY\,d\tau$$

en admettant les hypothèses énoncées ci-dessus, la limitation ainsi que l'intégrabilité de la fonction $\varphi(Y, \tau)$ dans le domaine

$$[Y \in \Omega,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T].$$

En admettant dans ce travail les hypothèses précédentes et la convergence absolue

(10a) $$\varphi(X, t) \underset{t\to\infty}{\Rightarrow} \bar{\varphi}(X),$$

(10b) $$a_{\alpha\beta}(X, t) \underset{t\to\infty}{\Rightarrow} \bar{a}_{\alpha\beta}(X), \quad b_\alpha(X, t) \underset{t\to\infty}{\Rightarrow} \bar{b}_\alpha(X), \quad c(X, t) \underset{t\to\infty}{\Rightarrow} \bar{c}(X),$$

je démontre pour $n > 2$ la propriété limite suivante:

(11) $$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)\, dY\, d\tau = \iiint_\Omega \bar{\Gamma}(X, Y)\bar{\varphi}(Y)\, dY,$$

où $\bar{\Gamma}(X, Y)$ est la solution fondamentale de l'équation elliptique

(12) $$\hat{\psi}(\bar{u}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \bar{a}_{\alpha\beta}(X)\bar{u}_{x_\alpha x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{b}_\alpha(X)\bar{u}'_{x_\alpha} + \bar{c}(X)\bar{u} = 0.$$

Cette solution fondamentale est donnée [3] par les formules suivantes:

(13) $$\bar{\Gamma}(X, Y) = \bar{w}^Y(X, Y) + \bar{\bar{w}}(X, Y),$$

où

(13a) $$\bar{w}^Y(X, Y) = 2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)[\bar{\vartheta}^Y(X, Y)]^{-n/2+1}$$

Γ = fonc tion Gamma d'Euler), avec

$$\bar{\vartheta}^Y(X, Y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \bar{a}^{\alpha\beta}(Y)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta)$$

(13b) $$\bar{\bar{w}}(X, Y) = \iiint_{\Omega'} \bar{w}^M(X, Y)\bar{\Phi}(M, Y)\, dM,$$

(13c) $$\bar{\Phi}(M, Y) = \bar{f}(M, Y) + \lambda \iiint_{\Omega'} \bar{\mathfrak{R}}(M, \Pi,)\bar{f}(\Pi, Y)\, d\Pi,$$

(13d) $$\bar{f}(X, Y) = \lambda \cdot \bar{\lambda}_n(X)\hat{\psi}_X[\bar{w}^Y(X, Y)], \quad X, Y \in \Omega',$$
$$\lambda_n = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\det[a^{\alpha\beta}(X; t)]} = \sqrt{\det[\bar{a}^{\alpha\beta}(X)]},$$

(13e) $$\bar{\mathfrak{R}}(M, \Pi) = R(M, \Pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k R_k(M, \Pi),$$

où

$$R(M, \Pi) = \lambda^{-1}\bar{f}(M, \Pi),$$

$$R_{k+1}(M, \Pi) = \iiint_{\Omega'} R_k(M, S)R(S, \Pi)\, dS, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dans la démonstration de la propriété (11) j'admets l'hypothèse VI de l'article [2] (v. p. 363) qui limite la grandeur du domaine Ω. On démontrera la propriété (11) dans les trois parties de cet article.

2. Limitation du quasi-potentiel. Grâce à la formule (4), le potentiel de charge spatiale (9) peut s'écrire:

$$(14)\qquad U(X,t) = \int_0^t \iiint_\Omega w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)\varphi(Y,\tau)\,dY\,d\tau + \\ + \int_0^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau)\int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta)\Phi(M,\theta;\,Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau \\ = u(X,t)+\widetilde{u}(X,t)\,,$$

où le premier terme $u(X,t)$ est le quasi-potentiel bien connu. Soit K une sphère de rayon r_0, centrée au point X et $n>2$. Je démontrerai maintenant le

LEMME I. *Sous la condition* (10b), *si* $|\varphi(Y,\tau)|<M_1$, $|\overline{\varphi}(Y)|<M_2$ *on a:*

$$(15)\qquad \lim_{t\to\infty}\int_0^t \iiint_K w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)\varphi(Y,\tau)\,dY\,d\tau = M_1\,O(r_0^{2\mu})\,,$$

$$(15\mathrm{a})\qquad \iiint_K \overline{w}^{Y}(X,Y)\overline{\varphi}(Y)\,dY = M_2 O(r_0^{2\mu})\,,$$

où $O(r_0^{2\mu})$: $r_0^{2\mu}$ *est une expression bornée lorsque* r_0 *tend vers* 0 *et* $\frac{1}{2}<\mu<1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $t>1$ et décomposons l'intégrale de la formule (15) en une somme de deux intégrales:

$$(16)\qquad \int_0^t \iiint_K w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)\varphi(Y,\tau)\,dY\,d\tau \\ = \Big[\int_0^{t-1} + \int_{t-1}^t\Big]\iiint_K w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)\varphi(Y,\tau)\,dY\,d\tau = i_1(X,t)+i_2(X,t)\,.$$

D'après les formules (5), (6) pour $i_1(X,t)$ nous avons:

$$(17)\qquad i_1(X,t) = M_1 O(r_0^n),\qquad t\to\infty\,.$$

Moyennant l'inégalité de la forme:

$$(18)\qquad |w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)| < \mathrm{const}\,(t-\tau)^{-\mu}|XY|^{2\mu-n}$$

établie dans l'article ([1], p. 7) nous avons pour $\frac{1}{2}<\mu<1$

$$(19)\qquad i_2(X,t) = M_1 O(r_0^{2\mu}),\qquad t\to\infty\,.$$

Les formules (17) et (19) donnent la formule (15). Le preuve de la formule (15a) est analogue à celle de la formule (15). On en déduit l'évaluation suivante (v. [3])

$$|\overline{w}^Y(X, Y)| < \text{const}|XY|^{2-n}.$$

LEMME II. *Si la condition* (10b) *est vérifiée on a*:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \iiint_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\,dY\,d\tau = \iiint_{\Omega-K} \overline{w}^Y(X, Y)\,dY \tag{20}$$

où $\overline{w}^Y(X, Y)$ *est donnée par la formule* (13a).

Démonstration. Nous décomposons l'intégrale sous le signe lim de la formule (20) en une somme de deux intégrales:

$$\int_0^t \iiint_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t, Y, \tau)\,dY\,d\tau = \int_0^T \iiint_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\,dY\,d\tau + \tag{21}$$

$$+\int_T^t \iiint_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\,dY\,d\tau = s_1(X, t) + s_2(X, t), \qquad \text{où} \qquad T < t.$$

Pour $s_1(X, t)$ on a:

$$\lim_{t\to\infty} s_1(X, t) = 0. \tag{22}$$

Après avoir introduit les variables sphériques dans l'expression $s_2(X, t)$, nous substituons: $r = 2\sqrt{t-\tau}\cdot u$ (J étant le déterminant de la transformation). Ensuite nous choisissons le nombre T assez grand, mais fixe. D'après (10b) nous remplaçons $\vartheta^{Y,\tau}(X, Y)$ par $\bar{\vartheta}^Y(X, Y)+\varepsilon_1$ et ensuite nous décomposons l'intervalle d'intégration de la variable u en deux intervalles: $(r/2\sqrt{t-\tau}, b)$, (b suffisamment grand), et (b, ∞). Maintenant nous avons pour $s_2(X, t)$ la somme de trois intégrales:

$$s_2(X, t) = \varepsilon_1 s_2'(X, t) + \tag{23}$$

$$+ 2^{n-2}\iint_{w_{n-1}} dw_{n-1}\int_{r_0}^{R} r\,dr \int_{\frac{r}{2\sqrt{t-T}}}^{\infty} u^{n-3}\exp\left[-\frac{u^2}{r^2}\bar{\vartheta}^Y(X, Y)\right]J\,du + s_2''(X, t, b),$$

s_2' et s_2'' désignant des fonctions bornées. Le premier terme converge vers zéro pour $t\to\infty$. Le troisième converge vers zéro pour $b\to\infty$. En posant dans le second terme $u = r/2\sqrt{\sigma}$ et en tenant compte de (22) nous avons:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \iiint_{\Omega-K} (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^Y(X, Y)}{4(t-\tau)}\right]dY\,d\tau \tag{24}$$

$$= \iiint_{\Omega-K} dY \int_0^{\infty} \sigma^{-n/2}\exp\left[-\frac{\bar{\vartheta}^Y(X, Y)}{4\sigma}\right]d\sigma.$$

En posant $v = \bar{\vartheta}^Y(X, Y)/4\sigma$, on obtient le quasi-potentiel de l'équation elliptique avec les coefficients limites (12), c.q.f.d.

LEMME III. *Si les conditions* (10a) *et* (10b) *sont vérifiées, on a*:

$$\lim_{t\to\infty} \iiint\limits_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)\,dY\,d\tau = \iiint\limits_{\Omega-K} \overline{w}^Y(X, Y)\overline{\varphi}(Y)\,dY. \tag{25}$$

Démonstration. Soit $t > T$. Il résulte de (10a) qu'on peut déterminer le nombre T de sorte que l'on ait pour chaque $\varepsilon > 0$ et $\tau > T$:

$$|\varphi(Y, \tau) - \overline{\varphi}(Y)| < \frac{\varepsilon}{2M_0},$$

où

$$M_0 = \max_{X\in\Omega} \int_0^t \iiint\limits_{\Omega} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\,dY\,d\tau.$$

Transformons l'intégrale étudiée de la manière suivante:

$$\int_0^t \iiint\limits_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)\,dY\,d\tau$$

$$= \int_0^T \iiint\limits_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)\,dY\,d\tau +$$

$$+ \int_T^t \iiint\limits_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)[\varphi(Y, \tau) - \overline{\varphi}(Y)\,dY\,d\tau +$$

$$+ \int_T^t \iiint\limits_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\overline{\varphi}(Y)\,dY\,d\tau.$$

Par conséquent

$$\Big|\int_T^t \iiint\limits_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)[\varphi(Y, \tau) - \overline{\varphi}(Y)]\,dY\,d\tau\Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

La fonction $\varphi(Y, \tau)$ étant bornée, il résulte de la formule (22) que

$$\Big|\int_0^T \iiint\limits_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)\,dY\,d\tau\Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27}$$

A cause des formules (24), (26), (27) nous obtenons finalement la formule (25).

THÉORÈME I. *Si les conditions* (10a) *et* (10b) *sont remplies, on a*:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \iiint\limits_{\Omega} w^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)\,dY\,d\tau = \iiint\limits_{\Omega} \overline{w}^Y(X, Y)\overline{\varphi}(Y)\,dY. \tag{28}$$

Démonstration. Décomposons l'intégrale sous le signe lim dans la formule (28) en deux intégrales de la manière suivante:

$$\int_0^t \iiint_\Omega w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)\varphi(Y,\tau)\,dY\,d\tau = \int_0^t \iiint_K w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)\varphi(Y,\tau)\,dY\,d\tau + \int_0^t \iiint_{\Omega-K} w^{Y,\tau}(X,t;\,Y,\tau)\varphi(Y,\tau)\,dY\,d\tau\,.$$

En profitant de cette décomposition et des lemmes I, II, III nous obtenons la conclusion du théorème I.

3. La limite du reste du potentiel. En vertu des formules (4), (8) le reste du potentiel (9) $\widetilde{u}(X,t)$ peut être répresenté comme la somme de deux termes:

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(X,t) &= \widetilde{u}_1(X,t)+\widetilde{u}_2(X,t)\\ &= \int_0^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau)\int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta)f(M,\theta;\,Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau +\\ &\quad +\lambda\int_0^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau)\int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta)\times\\ &\quad\times\int_\tau^\theta \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(M,\theta;\,\Pi,\xi)f(\Pi,\xi;\,Y,\tau)\,d\Pi\,d\xi\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Nous étudierons d'abord $\widetilde{u}_1(X,t)$. On sait d'après l'article [1] et les formules (5), (6), (7b) et (7a) qu'on a la limitation suivante:

$$|f(X,t;\,Y,\tau)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n+2-2\mu-h_1}}\,, & X\neq Y,\quad t>\tau\,,\\[2mm] \dfrac{\text{const}}{(t-\tau)^{n/2}} \quad \text{pour} & t-\tau>\gamma\neq 0\,,\end{cases} \tag{29}$$

où μ est arbitraire, h_1 désigne le plus petit des deux nombres $(h, 2h')$ et γ est un nombre positif. Nous allons maintenant démontrer le

LEMME IV. *Si* $1-h_1/2<\mu<1$ *et* $n>2$, *on a:*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \iiint_K \varphi(Y,\tau)\int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta)f(M,\theta;\,Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau = O(r_0^{4\mu+h_1-2})\,. \tag{30}$$

Démonstration. Soit $t > 1$. Décomposons l'intégrale sous le signe lim de la formule (30) en une somme de quatre intégrales:

$$(31)\qquad \int_0^t \iiint_K \varphi(Y,\tau) \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta) f(M,\theta;\,Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau$$
$$= \Big[\int_0^{t-1} + \int_{t-1}^t\Big] \iiint_K \varphi(Y,\tau)\Big\{\Big[\int_\tau^{(t+\tau)/2} + \int_{(t+\tau)/2}^t\Big]\times$$
$$\times \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta) f(M,\theta;\,Y,\tau)\,dM\,d\theta\Big\}\,dY\,d\tau = a+b+c+d\,.$$

A cause de la formule (5) et de la limitation (29) on a pour $1-h_1/2 < \mu < 1$:

(32)
$$|a| < \text{const} \int_0^{t-1} \frac{d\tau}{\big((t-\tau)/2\big)^{n/2}} \iiint_K dY \int_\tau^{(t+\tau)/2} d\theta \iiint_{\Omega'} \frac{dM}{(\theta-\tau)^\mu |XY|^{n+2-2\mu-h_1}}$$
$$< \text{const}\left(1-\frac{1}{t^{n/2+\mu-2}}\right) r_0^n\,.$$

En vertu de (18) et (29) on a pour $1-h_1/2 < \mu < 1$:

(33)
$$|b| < \text{const} \int_{t-1}^t d\tau \iiint_K dY \int_\tau^{(t+\tau)/2} \frac{d\theta}{(t-\theta)^\mu(\theta-\tau)^\mu} \iiint_{\Omega'} \frac{dM}{|XM|^{n-2\mu}|MY|^{n+2-2\mu-h_1}}$$
$$\leqslant \text{const} \int_{t-1}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{2\mu-1}} \iiint_K \frac{dY}{|XY|^{n+2-4\mu-h_1}} \left[\left(\frac{t+\tau}{2}-\tau\right)^{2-2\mu} - 0\right]$$
$$< \text{const}\, r_0^{4\mu+h_1-2}\,.$$

Pour le terme c, comme $\theta-\tau > (t-\tau)/2$ et grâce à la limitation (29) nous avons:

$$(34)\qquad |c| < \text{const} \int_0^{t-1} \frac{d\tau}{\big((t-\tau)/2\big)^{n/2}} \iiint_K dY \int_{(t+\tau)/2}^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta)\,dM\,d\theta$$
$$< \text{const}\left(1-\frac{1}{t^{n/2-1}}\right) r_0^n\,.$$

En tenant compte des limitations (18) et (29) on a pour $1-h_1/2 < \mu < 1$:

$$(35)\qquad |d| < \text{const} \int_{t-1}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{2\mu-1}} \iiint_K \frac{dY}{|XY|^{n+2-4\mu-h_1}} < \text{const}\, r_0^{4\mu-h_1-2}\,.$$

Les évaluations (32), (33), (34), (35), donnent la formule (30), c.q.f.d.

Lemme V. *Si* $T < t$, *on a*:

$$(36)\qquad \lim_{t\to\infty}\int_0^{t-T}\iiint_{\Omega-K}\varphi(Y,\tau)\int_\tau^t\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta)f(M,\theta;Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau = O(T^{-n/2+1}).$$

Démonstration. Après avoir décomposé l'intervalle (τ, t) en deux parties, nous avons:

$$(37)\qquad \int_0^{t-T}\iiint_{\Omega-K}\varphi(Y,\tau)\int_\tau^t\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta)f(M,\theta;Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau$$

$$=\int_0^{t-T}\iiint_{\Omega-K}\varphi(Y,\tau)\Big[\int_\tau^{(t+\tau)/2}+\int_{(t+\tau)/2}^{t}\Big]\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta)\times$$

$$\times f(M,\theta;Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau = e+f.$$

Grâce à la formule (5) et aux limitations (29) et (18) nous avons pour $t > 2$:

$$(38)\qquad |e| < c_1\int_0^{t-T}\frac{d\tau}{\big((t-\tau)/2\big)^{n/2}}\iiint_{\Omega-K}dY\int_\tau^{\tau+1}\iiint_{\Omega'}\frac{dM\,d\theta}{(\theta-\tau)^{\mu}|MY|^{n+2-2\mu-h_1}}+$$

$$+c_2\int_0^{t-T}\frac{d\tau}{\big((t-\tau)/2\big)^{n/2}}\iiint_{\Omega-K}dY\int_{\tau+1}^{(t+\tau)/2}\frac{d\theta}{(\theta-\tau)^{n/2}}$$

$$<\text{const}\left(\frac{1}{T^{n/2-1}}-\frac{1}{t^{n/2-1}}\right)+\text{const}\left(\frac{1}{T^{n-2}}-\frac{1}{t^{n-2}}\right),$$

(39)

$$|f| < \text{const}\int_0^{t-T}\frac{d\tau}{\big((t-\tau)/2\big)^{n/2}}\iiint_{\Omega-K}dY\int_{(t+\tau)/2}^{t}\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta)\,dM\,d\theta$$

$$<\text{const}\left(\frac{1}{T^{n/2-1}}-\frac{1}{t^{n/2-1}}\right).$$

Quand $t\to\infty$ et T est assez grand on en déduit la formule (36), c.q.f.d.

Lemme VI. *Sous l'hypothèse* (10b) *on a*:

$$(40)\qquad \lim_{t\to\infty}\int_{t-T}^{t}\iiint_{\Omega-K}\int_\tau^t\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta)f(M,\theta;Y,\tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau$$

$$=\iiint_{\Omega-K}\iiint_{\Omega'}\int_0^T\bar f(M,Y,T-\theta)\int_0^\theta \overline{w}^M(X,M,\tau)\,d\tau\,d\theta\,dM\,dY,$$

où

$$\bar{w}^M(X, M, \tau) = \tau^{-n/2}\exp\left[-\frac{\bar{\vartheta}^M(X, M)}{4\tau}\right],$$

(41)
$$\bar{f}(X, Y, \theta) = \lambda\sqrt{\det[\bar{a}^{\alpha\beta}(X)]}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}[\bar{a}_{\alpha\beta}(X)-\bar{a}_{\alpha\beta}(Y)]\bar{w}^Y_{x_\alpha x_\beta}(X, Y, \theta)+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{b}_\alpha(X)\bar{w}^Y_{x_\alpha}(X, Y, \theta)+\bar{c}(X)\bar{w}^Y(X, Y, \theta)$$

sont les fonctions définies dans l'article [2] (v. § 5A).

Démonstration. En posant $\tau = t+\sigma-T$, $\theta = \tau+\zeta$ on obtient:

$$(42)\quad \int_{t-T}^{t}\iiint_{\Omega-K}\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)f(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau$$
$$= \int_{0}^{t}\iiint_{\Omega-K}\int_{\tau}^{T-\sigma}\iiint_{\Omega'} w^{M,t-T+\sigma+\zeta}(X, t; M, t-T+\sigma+\zeta)\times$$
$$\times f(M, t-T+\sigma+\zeta; Y, t-T+\sigma)\,dM\,d\zeta\,dY\,d\sigma\,.$$

On peut passer à la limite sous le signe de l'intégrale, puisque l'acroissement des paramètres de la fonction $w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)$ et $f(M, \theta; Y, \tau)$ ne dépend pas de t. Ensuite on applique les mêmes transformations que dans le travail [2] (v. § 5A) et on obtient le résultat:

$$(43)\quad \lim_{t\to\infty}\int_{t-T}^{t}\iiint_{\Omega-K}\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)f(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau$$
$$= \iiint_{\Omega-K}\iiint_{\Omega'}\int_{0}^{T}\bar{f}(M, Y; T-\theta)\int_{0}^{\theta}\bar{w}^M(X, M, \tau)\,d\tau\,d\theta\,dM\,dY\,,$$

c.q.f.d.

Ecrivons:

$$(44)\quad \int_{0}^{t}\iiint_{\Omega-T}\varphi(Y, \tau)\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)f(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau$$
$$= \int_{0}^{t-T}\iiint_{\Omega-T}\varphi(Y, \tau)\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)f(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau+$$
$$+\int_{t-T}^{t}\iiint_{\Omega-K}[\varphi(Y, \tau)-\bar{\varphi}(Y)]\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)f(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau+$$
$$+\int_{t-T}^{t}\iiint_{\Omega-K}\bar{\varphi}(Y)\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)f(M, \theta; Y, \tau)\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau\,.$$

En tenant compte de la formule (10a) et des lemmes IV, V, VI et enfin en passant à la limite pour $r_0 \to 0$ on obtient:

$$(45)\qquad \lim_{t\to\infty} \int_0^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau) \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta) f(M,\theta;\,Y,\tau)\, dM\, d\theta\, dY\, d\tau$$

$$= \iiint_\Omega \bar{\varphi}(Y) \iiint_{\Omega'} \int_0^T \bar{f}(M,Y,T-\theta) \int_0^\theta \bar{w}^M(X,M,\tau)\, d\tau\, d\theta\, dM\, dY + O(T^{-n/2+1}).$$

Ensuite nous allons chercher la valeur limite de l'intégrale figurant au second membre de la formule (45) pour $T\to\infty$. Nous utiliserons la formule (3''', 5) du travail [2]:

$$(46)\qquad \lim_{T\to\infty} \iint_S \bar{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \int_0^T f(B,Q,T-\theta) \int_0^\theta \bar{w}^B(A,B,\tau)\, d\tau\, dB\, d\theta\, dQ$$

$$= \lambda \iint_S \bar{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \bar{w}^B(A,B) \bar{\lambda}_n(B) \hat{\psi}_B[\bar{w}^B(B,Q)]\, dB\, dQ, \qquad A \neq Q\,.$$

Soient K_1, K_2 deux sphères de centres X et Y respectivement et de rayon ϱ, où $X \neq Y$. On a la formule:

$$(47)\qquad I_1 = \lim_{\varrho\to 0} \lim_{T\to\infty} \lim_{t\to\infty} \Big[\int_0^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau) \times$$

$$\times \int_0^t \iiint_{\Omega'-K_1-K_2} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta) f(M,\theta;\,Y,\tau)\, dM\, d\theta\, dY\, d\tau +$$

$$+ \int_\tau^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau) \int_\tau^t \iiint_{K_1+K_2} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta) f(M,\theta;\,Y,\tau)\, dM\, d\theta\, dY\, d\tau\Big]$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \lim_{T\to\infty} \Big[\iiint_\Omega \bar{\varphi}(Y) \iiint_{\Omega'-K_1-K_2} \int_0^T \bar{f}(M,Y,T-\theta) \times$$

$$\times \int_0^\theta \bar{w}^M(X,M,\tau)\, d\tau\, d\theta\, dM\, dY + O(T^{-n/2+1})\Big] +$$

$$+ \lim_{\varrho\to 0} \lim_{T\to\infty} \lim_{t\to\infty} \int_0^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau) \int_\tau^t \iiint_{K_1+K_2} w^{M,\theta}(X,t,M,\theta) \times$$

$$\times f(M,\theta;\,Y,\tau)\, dM\, d\theta\, dY\, d\tau\,,$$

pourvu que tous les deux termes existent. La formule (46) est applicable, car on a ici $X \neq Y$. Dans ces conditions la formule (46) devient:

$$J_1 = \lim_{\varrho\to 0} \Big\{\lambda \iiint_\Omega \bar{\varphi}(Y) \iiint_{\Omega'-K_1-K_2} \bar{w}^M(X,M) \lambda_n(M) \hat{\psi}[\bar{w}^Y(M,Y)]\, dM\, dY +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \lim_{t\to\infty} \int_0^t \iiint_\Omega \varphi(Y,\tau) \int_\tau^t \iiint_{K_1+K_2} w^{M,\theta}(X,t;\,M,\theta) f(M,\theta;\,Y,\tau)\, dM\, d\theta\, dY\, d\tau\Big\}\,.$$

Ensuite on peut écrire J_1 de la façon suivante:

$$J_1 = \lim_{\varrho\to 0}\Big\{\lambda \iiint_{\Omega} \bar{\varphi}(Y) \iiint_{\Omega'} \bar{w}^M(X, M)\bar{\lambda}_n(M)\hat{\psi}[\bar{w}^Y(M, Y)]dM\,dY + \\ -\lambda \iiint_{\Omega} \bar{\varphi}(Y) \iiint_{K_1+K_2} \bar{w}^M(X, M)\bar{\lambda}_n(M)\hat{\psi}_M[\bar{w}^Y(M, Y)]dM\,dY + \\ + \lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \iiint_{\Omega} \varphi(Y,\tau)\int_\tau^t \iiint_{K_1+K_2} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta) f(M, \theta; Y, \tau)dM\,d\theta\,dY\,d\tau\Big\}. \tag{48}$$

A l'aide des définitions (13a) et (13b) et des limitations correspondantes (v. [3]), on peut montrer que le deuxième terme du second membre de la formule (48) tend vers zéro pour $\varrho\to 0$. Par analogie avec le lemme IV on peut prouver que le troisième terme converge vers zéro si $\varrho\to 0$. De la définition (13d) et de la formule (48) on tire:

Théorème II. *Sous les conditions* (10a) *et* (10b) *on a*:

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{u}_1(X, t) = \iiint_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\iiint_{\Omega'}\bar{w}^M(X, M)\bar{f}(M, Y)dM\,dY. \tag{49}$$

Etudions ensuite $\tilde{u}_2(X, t)$, le dernier terme du reste du potentiel. On peut écrire $\tilde{u}_2(X, t)$ comme il suit:

$$\tilde{u}_2(X, t) = \lambda\Big[\int_0^{t-4T} + \int_{t-4T}^t\Big]\iiint_{\Omega}\varphi(Y,\tau)\int_\tau^t\iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X, t; M, \theta)\times \\ \times\int_\tau^\theta\iiint_{\Omega'}\mathfrak{N}(M, \theta; \Pi, \xi)f(\Pi, \xi; Y, \tau)d\Pi\,d\xi\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau \\ = \tilde{u}_2^{(0,t-4T)}(X, t) + \tilde{u}_2^{(t-4T,t)}(X, t). \tag{50}$$

Pour étudier $\lim\tilde{u}_2(X, t)$, admettons l'hypothèse VI de l'article [2] p. 363 et appliquons le lemme (2,4) et le corollaire (1,4) de l'article [2]; il en résulte que

$$\int_0^t\iiint_{\Omega'}|\mathfrak{N}(X, \theta; Y, \theta')|dY\,d\theta' \tag{51}$$

existe pour $\theta > 0$, $X\in\Omega'$ et que

$$\int_0^{\theta-T}\iiint_{\Omega'}|\mathfrak{N}(X, \theta; Y, \theta')|dY\,d\theta'\to 0 \tag{52}$$

pour $T\to\infty$ et $\theta > T$. Nous démontrerons maintenant le

Lemme VII. *Sous les conditions* (51) *et* (52) *on a*:

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{u}_2^{(0,t-4T)}(X, t) = O(T^{-n/2+1}). \tag{53}$$

En intervertissant l'ordre des intégrations par rapport à τ et θ dans l'intégrale $\tilde{u}_2^{(0,t-4T)}$, nous obtenons:

$$\text{(54)} \quad \tilde{u}_2^{(0,t-4T)}(X,t) = \lambda \int_0^{t-4T} \int_0^{\theta} \iiint_{\Omega} \varphi(Y,\tau) \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta) \times$$
$$\times \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi) f(\Pi,\xi;Y,\tau)\, d\Pi\, d\xi\, dM\, dY\, d\tau\, d\theta +$$
$$+ \int_{t-4T}^{t} \int_0^{t-4T} \iiint_{\Omega} \varphi(Y,\tau) \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta) \times$$
$$\times \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi) f(\Pi,\xi;Y,\tau)\, d\Pi\, d\xi\, dM\, dY\, d\tau\, d\theta$$
$$= Q_1(X,t) + Q_2(X,t)\,.$$

En vertu de la condition (51) et de la limitation (18) pour $\mu = n/2$ on obtient:

$$\text{(55)} \quad |Q_1(X,t)| < \int_0^{t-4T} \frac{d\theta}{(t-\theta)^{n/2}} \iiint_{\Omega'} \int_0^{\theta} \iiint_{\Omega'} |\mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi)| \times$$
$$\times \int_0^{\xi} \iiint_{\Omega} |f(\Pi,\xi;Y,\tau)||\varphi(Y,\tau)|\, dY\, d\tau\, d\Pi\, d\xi\, dM$$
$$< \text{const}\left[\frac{1}{(4T)^{n/2-1}} - \frac{1}{t^{n/2-1}}\right] \underset{t\to\infty}{\to} O(T^{-n/2+1}), \qquad n > 2\,.$$

Dans le terme Q_2 on pose $\theta = t-4T+\theta_0$ et ensuite on décompose l'intervalle d'intégration de la variable ξ en deux intervalles: de τ à $t-4T$ et de $t-4T$ à θ. Nous obtenons ainsi une somme de deux intégrales, que nous appelons q_1 et q_2 respectivement. Pour étudier q_1, nous divisons l'intervalle d'intégration de la variable θ en deux intervalles: de 0 à $2T$ et de $2T$ à $4T$. Il en résulte:

$$\text{(56)} \quad |q_1(X,t)| < \text{const} \int_0^{2T} \frac{d\theta_0}{(4T-\theta_0)^{n/2}} \iiint_{\Omega'} \int_0^{t-4T} \iiint_{\Omega'} |\mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi)| \times$$
$$\times \int_0^{\xi} \iiint_{\Omega} |\varphi(Y,\tau) f(\Pi,\xi;Y,\tau)|\, dY\, d\tau\, d\Pi\, d\xi\, dM +$$
$$+ \text{const} \int_{2T}^{4T} d\theta_0 \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta) \int_0^{t-4T} \iiint_{\Omega'} |\mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi)| \times$$
$$\times \int_0^{\xi} \iiint_{\Omega} |\varphi(Y,\tau) f(\Pi,\xi;Y,\tau)|\, dY\, d\tau\, d\Pi\, d\xi\, dM\,.$$

Les intégrales intérieures existent; cela résulte de la limitation de la fonction f et de la formule (52). Le premier terme tend vers zéro quand $t\to\infty$ et $T\to\infty$, $t > T$.

L'accroissement des paramètres du noyau résolvant dans le second terme de la somme est:

$$\theta-\xi = \theta_0+t-4T-\xi > \theta_0+t-4T-t+4T = \theta_0 > 2T .$$

D'où résulte que le second terme est de l'ordre $o(1)$. En changeant l'ordre des intégrations et en introduisant la nouvelle variable $\xi = t-4T+\xi'$, nous pouvons évaluer $q_2(X, t)$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} |q_2(X,t)| < \int\limits_0^{2T} \frac{d\theta_0}{(4T-\theta_0)^{n/2}} \iiint\limits_{\Omega'} \int\limits_0^{\theta_0} \iiint\limits_{\Omega'} |\mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi)| \times \\ \times \int\limits_0^{t-4T} \iiint\limits_{\Omega} |\varphi(Y,\tau) f(\Pi, t-4T+\xi'; Y,\tau)| \, dY d\tau d\Pi d\xi' dM + \\ + \int\limits_{2T}^{4T} \iiint\limits_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta) \int\limits_0^{T} \iiint\limits_{\Omega'} |\mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi)| \times \\ \times \int\limits_0^{t-4T} \iiint\limits_{\Omega} |\varphi(Y,\tau) f(\Pi, t-4T+\xi'; Y,\tau)| \, dY d\tau d\Pi d\xi' dM d\theta_0 + \\ + \int\limits_{2T}^{4T} \iiint\limits_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta) \int\limits_T^{\theta_0} \iiint\limits_{\Omega'} |\mathfrak{N}(M,\theta;\Pi,\xi)| \times \\ \times \int\limits_0^{t-4T} \iiint\limits_{\Omega} |\varphi(Y,\tau) f(\Pi, t-4T+\xi'; Y,\tau)| \, dY d\tau d\Pi d\xi' dM d\theta_0 . \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme tend vers zéro avec $T\to\infty$, car les intégrales intérieures existent et $4T-\theta_0 > 2T$. Le second terme est aussi petit avec $1/T$, puisque l'acroissement des paramètres du noyau est

$$\theta-\xi = \theta_0+t-4T-t+4T-\xi' = \theta_0-\xi' > T .$$

De même, dans le troisième terme l'accroissement des paramètres de la fonction f est

$$t-4T+\xi'-t+4T = \xi' > T .$$

On en déduit qu'il est assez petit avec $1/T$. Moyennant les limitations q_1, q_2 et Q_1 le lemme VII est ainsi démontré, c.q.f.d.

LEMME VIII. *Sous les conditions* (10a) *et* (10b) *on a*:

$$(57)\qquad \lim_{t\to\infty}\tilde{u}_2^{(t-4T,t)}(X,t) = \lambda\iiint_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\int_0^{4T}\int_{\theta}^{4T}\iiint_{\Omega'}\bar{w}^M(X,M,u-\theta)\times$$
$$\times\int_0^{\theta}\iiint_{\Omega'}\bar{\mathfrak{N}}(M,\Pi;\theta-\xi)\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\,d\Pi\,d\xi\,dM\,du\,d\theta\,dY$$

où $\bar{w}^M(X,M,u-\theta)$, $\bar{f}(\Pi,Y,\xi)$ *sont définies par les formules* (41), *et la fonction* $\bar{\mathfrak{N}}$ *est donnée par la formule*:

$$(58)\qquad \lim_{t\to\infty}\mathfrak{N}(Y,t;M,\theta) = \bar{\mathfrak{N}}(Y,M,\theta),\qquad O<\theta\leqslant 4T,\qquad Y\neq M$$

établie dans l'article [2].

Démonstration. Pour obtenir la formule (57), il n'y a qu'à raisonner de même que dans l'article [2] p. 389-391, c.q.f.d.

Pour abréger, désignons l'intégrale figurant au second membre de la formule (57) par $J(X,T)$. Etudions cette intégrale pour $T\to\infty$.

LEMME IX. *Sous l'hypothèse* VI *on a*:

$$(59)\qquad \lambda\lim_{t\to\infty}\iiint_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\int_0^{4T}\int_{\theta}^{4T}\iiint_{\Omega'}\bar{w}^M(X,M,u-\theta)\times$$
$$\times\int_0^{\theta}\iiint_{\Omega'}\bar{\mathfrak{N}}(M,\Pi,\theta-\xi)\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\,d\Pi\,d\xi\,dM\,du\,d\theta\,dY$$
$$=\lambda\int_0^{\infty}ds\iiint_{\Omega'}d\Pi\iiint_{\Omega'}\bar{\mathfrak{N}}(M,\Pi,s)\bar{w}^M(X,M)\,dM\times$$
$$\times\iiint_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\int_0^{\infty}\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\,d\xi\,dY.$$

Démonstration. Pour faire un changement de variables dans l'intégrale $J(X,T)$ considérons une sphère K_1 de centre X et de rayon ϱ_1 dans le domaine Ω'. Décomposons $J(X,T)$ de la manière suivante:

$$(60)\qquad J(X,t) = \lambda\iiint_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\int_0^{4T}\int_{\theta}^{4T}\iiint_{\Omega'-K_1}\bar{w}^M(X,M,u-\theta)\times$$
$$\times\int_0^{\theta}\iiint_{\Omega'}\bar{\mathfrak{N}}(M,\Pi;\theta-\xi)\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\,d\Pi\,d\xi\,dM\,du\,d\theta\,dY+$$
$$+\lambda\iiint_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\int_0^{4T}\int_{\theta}^{4T}\iiint_{K_1}\bar{w}^M(X,M,u-\theta)\times$$
$$\times\int_0^{\theta}\iiint_{\Omega'}\bar{\mathfrak{N}}(M,\Pi;\theta-\xi)\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\,d\Pi\,d\xi\,dM\,du\,d\theta\,dY$$
$$=J_1(X,T)+J_2(X,T)\,.$$

Nous étudierons d'abord l'intégrale J_2. Nous allons montrer qu'elle existe uniformément pour $T\to\infty$ et qu'elle prend des valeurs arbitrairement petites quand le rayon de la sphère K_1 est suffisamment petit. Pour le prouver nous posons $u-\theta=\tau$, $d\theta=d\tau$ dans l'intégrale $J_2(X, T)$ et ensuite nous changeons l'ordre des intégrations par rapport aux variables temporelles τ et θ, et aussi par rapport aux variables spatiales M, Y, Π. Après avoir changé l'ordre des intégrations par rapport à ξ et θ, nous faisons ensuite la substitution $4T-\tau=v$ et $\theta-\xi=u$, $d\theta=du$. Il en résulte:

$$(61)\qquad J_2(X,t)=\lambda\int_0^{4T}dv\iiint_{K_1}\overline{w}^M(X,M,4T-v)\,dM\times$$
$$\times\int_0^{v}d\xi\int_0^{v-\xi}du\iiint_{\Omega'}\overline{\mathfrak{N}}(M,\Pi,u)\iiint_{\Omega}\bar{f}(\Pi,u,\xi)\overline{\varphi}(Y)\,dY\,d\Pi\,.$$

D'après la définition (41), la limitation (29), la définition (58) et le lemme (2,4) de l'article [2], qui s'exprime par la relation (51), nous avons:

$$|J_2(X,t)<\mathrm{const}\,\lambda\int_0^{4T}dv\iiint_{K_1}\overline{w}^M(X,M,4T-v)\,dM\left[\int_0^1\frac{d\xi}{\xi^{\mu}}+\int_1^{v}\frac{d\xi}{\xi^{n/2}}\right].$$

En posant $4T-v=z$, $-dv=dz$ et ensuite, en utilisant la définition (41) et la limitation (18), nous obtenons l'évaluation:

$$(62)\qquad |J_2(X,T)|<\lambda\,\mathrm{const}\left[\int_0^1\frac{dz}{z^{\mu}}\iiint_{K_1}\frac{dM}{|XM|^{n-2\mu}}+\right.$$
$$\left.+\int_1^{4T}\frac{dz}{z^{n/2}}\iiint_{K_1}dM\right]\leqslant\mathrm{const}\,\varrho_1^{2\mu}\,.$$

D'où résulte que $J_2(X, T)$ exsiste uniformément pour chaque T.

Passons à l'étude de l'intégrale $J_1(X, T)$. Changeons l'ordre des intégrations par rapport à u et posons $u-\theta=v$, $du=dv$. Nous changeons ensuite l'ordre des intégrations par rapport à ξ et θ et aussi par rapport aux variables spatiales. Enfin, en introduisant la nouvelle variable $\theta-\xi=s$, $d\theta=ds$, nous obtenons:

$$J_1(X,t)=\lambda\int_0^{4T}d\xi\int_0^{4T-\xi}ds\iiint_{\Omega'}d\Pi\iiint_{\Omega'-K_1}\overline{\mathfrak{N}}(M,\Pi,s)\,dM\times$$
$$\times\int_0^{4T-s-\xi}\overline{w}^M(X,M,v)\,dv\iiint_{\Omega}\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\overline{\varphi}(Y)\,dY\,.$$

Après ces transformations, décomposons l'intégrale étudiée comme il suit:

$$J_1(X, T) = \lambda \int_0^T d\xi \int_0^{2T} ds \iiint_{\Omega'} d\Pi \iiint_{\Omega'-K_1} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)\,dM \times$$
$$\times \int_0^{4T-s-\xi} \overline{w}^M(X, M, v)\,dv \iiint_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y, \xi)\overline{\varphi}(Y)\,dY +$$
$$+ \lambda \int_0^T d\xi \int_{2T}^{4T-\xi} ds \iiint_{\Omega'} d\Pi \iiint_{\Omega'-K_1} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)\,dM \times$$
$$\times \int_0^{4T-s-\xi} \overline{w}^M(X, M, v)\,dv \iiint_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y, \xi)\overline{\varphi}(Y)\,dY +$$
$$+ \lambda \int_T^{4T} d\xi \int_0^{4T-\xi} ds \iiint_{\Omega'} d\Pi \iiint_{\Omega'-K_1} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)\,dM \times$$
$$\times \int_0^{4T-s-\xi} \overline{w}^M(X, M, v)\,dv \iiint_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y, \xi)\overline{\varphi}(Y)\,dY$$
$$= J_{1,1}(X, T) + J_{1,2}(X, T) + J_{1,3}(X, T)\,.$$

Nous démontrerons que les intégrales $J_{1,2}$ et $J_{1,3}$ convergent vers zéro avec $T \to \infty$. En changeant dans l'intégrale $J_{1,2}$ l'ordre des intégrations par rapport à s et v, et en posant $T > 1$, nous obtenons:

$$J_{1,2}(X, T) = \lambda\Big[\int_0^1 + \int_1^T\Big] d\xi \iiint_{\Omega'-K_1} dM \int_0^{2T-\xi} \overline{w}^M(X, M, v)\,dv \times$$
$$\times \int_{2T}^{4T-\xi-v} ds \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)\,d\Pi \iiint_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y, \xi)\overline{\varphi}(Y)\,dY$$
$$= i_{1,2}(X, T) + \tilde{i}_{1,2}(X, T)\,.$$

D'après la définition (41), la limitation (29) et la relation (52) nous avons:

$$(63) \qquad \lim_{T\to\infty} i_{1,2}(X, T) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{T\to\infty} \tilde{i}_{1,2}(X, T) = 0$$

puisque $\xi + v < 2T$, $s > 2T$. Alors on a donc:

$$(64) \qquad \lim_{T\to\infty} J_{1,2}(X, T) = 0\,.$$

Après avoir changé l'ordre des intégrations par rapport à s et v, et aussi par rapport à M et Π, nous obtenons pour $J_{1,3}(X, T)$ la valeur suivante:

$$J_{1,3}(X, T) = \lambda \int_T^{4T} d\xi \int_0^{4T-\xi} dv \iiint_{\Omega'-K_1} \overline{w}^M(X, M, v)\,dM \times$$
$$\times \int_0^{4T-\xi-v} ds \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)\,d\Pi \iiint_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y, \xi)\overline{\varphi}(Y)\,dY\,.$$

En tenant compte de la définition (41), de la limitation (29) pour $\xi > T$ et de l'existence des intégrales intérieures nous avons l'évaluation:

$$|J_{1,3}(X,T)| < \mathrm{const}\cdot\lambda\int\limits_T^{4T}\frac{d\xi}{\xi^{n/2}}, \qquad n>2, \tag{65}$$

d'où on tire:

$$\lim_{T\to\infty} J_{1,3}(X,T) = 0 . \tag{66}$$

Etudions maintenant $J_{1,1}(X,T)$. Dans cette intégrale $X \neq M$, donc en posant

$$u = \frac{\bar{\vartheta}^M(X,M)}{4v}, \qquad du = -\frac{\bar{\vartheta}^M(X,M)\,dv}{4v^2},$$

nous avons:

$$J_{1,1}(X,T) = \lambda 2^{n-2}\int\limits_0^T d\xi\int\limits_0^{2T} ds\iiint\limits_{\Omega'} d\Pi\iiint\limits_{\Omega'-K_1}\overline{\mathfrak{N}}(M,\Pi,s)\,dM\times \tag{67}$$
$$\times\int\limits_{\frac{\bar{\vartheta}^M(X,M)}{4(4T-\xi-s)}}^{\infty}[\bar{\vartheta}^M(X,M)]^{-n/2+1}u^{-n/2+2}\exp(-u)\,du\iiint\limits_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\,dY .$$

Comme $0\leqslant\xi\leqslant T$, $0\leqslant s\leqslant 2T$ nous obtenons:

$$\lim_{T\to\infty} J_{1,1}(X,T) = \lambda\int\limits_0^{\infty} d\xi\int\limits_0^{\infty} ds\iiint\limits_{\Omega'} d\Pi\times \tag{68}$$
$$\times\iiint\limits_{\Omega'-K_1}\overline{\mathfrak{N}}(M,\Pi,s)\,\bar{w}^M(X,M)\,dM\iiint\limits_{\Omega}\bar{f}(\Pi,Y,\xi)\bar{\varphi}(Y)\,dY .$$

En appliquant la décomposition (60), la limitation (62) et les résultats (64), (66), (68) nous arrivons avec $\varrho_1\to 0$ à la conclusion du lemme IX donnée par la formule (59).

Théorème III. *Sous les conditions* (10a) *et* (10b) *et sous l'hypothèse* VI, *on a:*

$$\lim_{t\to\infty}\lambda\int\limits_0^t\iiint\limits_{\Omega}\varphi(Y,\tau)\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'} w^{M,\theta}(X,t;M,\theta)\times \tag{69}$$
$$\times\int\limits_{\tau}^{\theta}\iiint\limits_{\Omega'}\overline{\mathfrak{N}}(M,\theta;\Pi,\xi)f(\Pi,\xi;Y,\tau)\,d\Pi\,d\xi\,dM\,d\theta\,dY\,d\tau$$
$$=\lambda\iiint\limits_{\Omega}\bar{\varphi}(Y)\iiint\limits_{\Omega'}\bar{w}^M(X,M)\iiint\limits_{\Omega'}\overline{\mathfrak{N}}(M,\Pi)\bar{f}(\Pi,Y)\,d\Pi\,dM\,dY .$$

Démonstration. Admettons les résultats des lemmes VII, VIII, IX et étudions ensuite l'intégrale figurant dans la formule (59). Pour abréger nous la désignons par $\bar{J}(X)$. Nous nous servirons de la formule (3,5) de l'article [2], p. 387. Moyennant (13d) cette formule peut s'écrire:

$$\int_0^\infty \bar{\jmath}(\Pi, Y, \xi)d\xi = \bar{\jmath}(\Pi, Y), \quad \Pi \neq Y . \tag{70}$$

En effet, enlevons du domaine Ω la sphère K_2 de centre Π et de rayon $\varrho_2 \geqslant |\Pi Y|$ et décomposons l'intégrale $\bar{J}(X)$ de la formule (59) de la manière suivante:

$$\begin{aligned}(71)\quad \bar{J}(X) = \lambda \int_0^\infty ds \iiint_{\Omega'} d\Pi \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)\overline{w}^M(X, M)dM \times \\ \times \iiint_{\Omega - K_2(\Pi,\varrho_2)} \overline{\varphi}(Y)dY \int_0^\infty \bar{\jmath}(\Pi, Y, \xi)d\xi + \\ + \lambda \int_0^\infty ds \iiint_{\Omega'} d\Pi \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)\overline{w}^M(X, M)dM \times \\ \times \iiint_{K_2(\Pi,\varrho_2)} \overline{\varphi}(Y)dY \int_0^\infty \bar{\jmath}(\Pi, Y, \xi)d\xi .\end{aligned}$$

D'après la formule (70), la définition (41), la limitation (29) et la relation (51) nous démontrerons de même que dans le lemme IX qu'on a la formule:

$$\begin{aligned}(72)\quad \lim_{\varrho_2\to 0} \bar{J}(X) = \lambda \iiint_{\Omega'} \overline{w}^M(X, M)dM \iiint_{\Omega'} d\Pi \times \\ \times \int_0^\infty \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)ds \iiint_{\Omega} \bar{\jmath}(\Pi, Y)\overline{\varphi}(Y)dY .\end{aligned}$$

Désignons par $J^*(X)$ l'intégrale du second membre de l'égalité (72). A cause de la relation (51) pour tout $\varepsilon > 0$ on peut déterminer le nombre T_1 et le rayon ϱ_3 de la sphère $K_3(M, \varrho_3)$, tels qu'on ait:

$$\begin{aligned}(73)\quad \Big|\lambda \iiint_{\Omega'} \overline{w}^M(X, M)dM \int_{T_1}^\infty ds \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)d\Pi \times \\ \times \iiint_{\Omega} \bar{\jmath}(\Pi, Y)\overline{\varphi}(Y)dY\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(74)\quad \Big|\lambda \iiint_{\Omega'} \overline{w}^M(X, M)dM \int_0^{T_1} ds \iiint_{K_3} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)d\Pi \times \\ \times \iiint_{\Omega} \bar{\jmath}(\Pi, Y)\overline{\varphi}(Y)dY\Big| < \frac{\varepsilon}{2} .\end{aligned}$$

Décomposons l'intégrale J^* de la manière suivante:

(75) $J^*(X)$

$$= \lambda \iiint\limits_{\Omega} \overline{w}^M(X, M)dM \iiint\limits_{\Omega'-K_3} d\Pi \int\limits_0^\infty \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)ds \iiint\limits_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y)\overline{\varphi}(Y)dY +$$

$$+ \lambda \iiint\limits_{\Omega'} \overline{w}^M(X, M)dM \iiint\limits_{K_3} d\Pi \int\limits_0^{T_1} \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)ds \iiint\limits_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y)\overline{\varphi}(Y)dY +$$

$$+ \lambda \iiint\limits_{\Omega'} \overline{w}^M(X, M)dM \iiint\limits_{K_3} d\Pi \int\limits_{T_1}^\infty \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)ds \iiint\limits_{\Omega} \bar{f}(\Pi, Y)\overline{\varphi}(Y)dY .$$

H. Grużewska a prouvé la formule:

$$\int\limits_0^\infty \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi, s)ds = \overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi), \tag{76}$$

où $\overline{\mathfrak{N}}(M, \Pi)$ est donné par (13c). En utilisant la décomposition (75), la formule (76), les limitations des fonctions $\overline{w}^M(X, M)$ et $\overline{\Phi}(M, \Pi)$ (v. [3]) et en profitant des limitations (73), (74) nous obtenons la conclusion du théorème III.

La décomposition (14), les formules (13a), (13), et les théorèmes I, II, III, donnent:

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(X, t; Y, \tau)\varphi(Y, \tau)dYd\tau = \iiint\limits_{\Omega} \overline{\Gamma}(X, Y)\overline{\varphi}(Y)dY . \tag{77}$$

Ce résultat nous permet d'énoncer le

THÉORÈME IV. *Si les coefficients de l'équation parabolique* (1) *remplissent les conditions*: (2), (3), (10b) *et si la fonction* $\varphi(Y, \tau)$ *vérifie* (10a), *enfin si l'hypothèse* VI *de l'article* [2] *est vérifiée le potentiel généralisé de charge spatiale relativement à l'équation parabolique tend avec* $t\to\infty$ *vers le potentiel de charge spatiale relativement à l'équation elliptique* (12).

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Etude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche Mat. 5 (1959), p. 25-56.

[2] H. Milicer-Grużewska, *Propriété limite du potentiel généralisé de simple couche relativement à l'équation parabolique normale*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie III, 12 (1958), p. 359-396.

[3] W. Pogorzelski, *Etude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 247-248.

Reçu par la Rédaction le 28. 10. 1960