ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Sur les ombilics de l'hypersurface V_{n-1} plongée dans l'espace riemannien V_n

par T. RACHWAŁ (Kraków)

Dans son travail [1] S. Gołąb a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de la surface régulière V_2 à deux dimensions, plongée dans R_3, soit un ombilic.

Dans le présent travail je donne une généralisation de ce théorème pour les points de l'hypersurface V_{n-1} plongée dans l'espace riemannien V_n, dans le cas où $n \geqslant 3$.

Prenons l'espace riemannien à n dimensions V_n à tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$ satisfaisant aux hypothèses suivantes:

(Z_1) $g_{\lambda\mu}$ est le tenseur symétrique réel d'ordre n et donnant une forme quadratique positivement définie.

Soit l'hypersurface V_{n-1} plongée dans l'espace V_n, définie par les équations paramétriques

$$\xi^\nu = \xi^\nu(\eta^a), \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad a = 1, \ldots, n-1, \tag{1}$$

où les η^a appartiennent à un certain domaine Ω à $n-1$ dimensions. Pour cette hypersurface nous admettons les hypothèses suivantes:

(Z_2)
1° les fonctions $\xi^\nu(\eta^a)$ sont de classe au moins C^2 dans le domaine Ω,
2° la matrice $\|\partial\xi^\nu/\partial\eta^a\|$ est d'ordre $n-1$ dans Ω.

Comme on le sait, la métrique de l'espace ambiant V_n induit univoquement la métrique de l'espace V_{n-1}, qui devient aussi un espace riemannien.

Soit G_{ab} le tenseur métrique de l'espace V_{n-1}; alors

$$G_{ab} = C_{ab}^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu}, \quad \lambda, \mu = 1, \ldots, n, \quad a, b = 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

où C_a^λ est un affineur défini de la manière suivante:

$$C_a^\lambda = \frac{\partial\xi^\lambda}{\partial\eta^a}, \quad \lambda = 1, \ldots, n, \; a = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Nous désignons brièvement par $C^{\lambda\mu}_{ab}$ l'affineur qui est le produit des affineurs du type (3):

$$C^{\lambda\mu}_{ab} = \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \eta^a} \cdot \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \eta^b}. \tag{4}$$

D'après les hypothèses (Z_2) nous pouvons définir le vecteur-unité normal à V_{n-1} en chaque point de l'hypersurface V_{n-1}. Prenons notamment le vecteur n^λ qui est le produit vectoriel des vecteurs ${}_a b^\lambda$ ($a = 1, 2, \ldots, n-1$), où

$${}_a b^\lambda \stackrel{\mathrm{df}}{=} C^\lambda_a. \tag{5}$$

Le vecteur n^λ est, d'après les hypothèses (Z_2), différent de zéro. Nous désignons par le symbole N^λ le verseur du vecteur n^λ:

$$N^\lambda = \frac{n^\lambda}{|n|}. \tag{6}$$

Soit ensuite

$$N_\lambda \stackrel{\mathrm{df}}{=} g_{\lambda\mu} N^\mu \tag{7}$$

et introduisons le tenseur h_{ab}:

$$h_{ab} \stackrel{\mathrm{df}}{=} C^{\mu\lambda}_{ab} \nabla_\mu N_\lambda, \tag{8}$$

qui sera dit second tenseur fondamental de l'hypersurface V_{n-1}. Nous avons désigné par le symbole $\nabla_\mu N_\lambda$ la dérivée covariante du champ N_λ (1).

Prenons maintenant sur V_{n-1} une courbe régulière C et soit σ un arc de cette courbe.

Nous pouvons attacher à chaque point de la courbe C le système n des vecteurs orthonormaux de Bonnet-Kowalewski [2],

$${}_1t^\nu, {}_2t^\nu, \ldots, {}_nt^\nu \tag{9}$$

dans lequel ${}_1t^\nu$ est le vecteur tangent à la courbe C, ${}_nt^\nu$ est le vecteur normal à la hypersurface V_{n-1}; alors

$${}_nt^\nu = N^\nu, \tag{10}$$

(1) Il est vrai que le champ N_λ est défini uniquement sur V_{n-1}, mais sans prendre en considération la façon dont N_λ est étendu sur tout l'espace V_n pour pouvoir former $\nabla_\mu N_\lambda$, h_{ab} est défini univoquement.

les vecteurs ${}_2t^\nu, \ldots, {}_{n-1}t^\nu$ sont situés dans le plan tangent à V_{n-1} et avec les vecteurs ${}_1t^\nu$ et ${}_nt^\nu$ ils satisfont aux équations de Gołąb ([2], [6]):

$$\begin{aligned}
&\frac{D_1t^\nu}{d\sigma} = \sum_{p=2}^{n-1} a_p \cdot {}_pt^\nu + \gamma \cdot {}_nt^\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n\,, \\
(11)\qquad &\frac{D_pt^\nu}{d\sigma} = -a_p \cdot {}_1t^\nu + \beta_p \cdot {}_nt^\nu, \qquad p = 2, \ldots, n-1\,, \\
&\frac{D_nt^\nu}{d\sigma} = -\gamma \cdot {}_1t^\nu - \sum_{p=2}^{n-1} \beta_p \cdot {}_pt^\nu\,,
\end{aligned}$$

où $D_pt^\nu/d\sigma$ est la dérivée absolue du champ de vecteurs ${}_pt^\nu$ le long de la courbe C par rapport à l'arc σ.

La courbe C de l'hypersurface V_{n-1}, le long de laquelle le champ des vecteurs N^λ normaux à V_{n-1} est développable, s'appelle *ligne de courbure de* V_{n-1}.

Pour une ligne de courbure les vecteurs

$$(12)\qquad {}_1t^\nu,\ N^\nu,\ \frac{DN^\nu}{d\sigma}$$

sont linéairement dépendants, et les coefficients β_p sont identiquement nuls [2]:

$$(13)\qquad \beta_p = 0, \quad p = 2, \ldots, n-1\,.$$

Si les lignes paramétriques de l'hypersurface V_{n-1} sont ses lignes de courbure, alors ([5], p. 68; [2], p. 275):

$$(14)\qquad G_{ab} = 0 \quad \text{et} \quad h_{ab} = 0 \quad \text{pour} \quad a \neq b\ (^2).$$

Le point de l'hypersurface pour lequel

$$(15)\qquad h_{ab} = \varrho G_{ab}\,,$$

s'appelle *ombillic* [5] de l'hypersurface V_{n-1}.

Nous démontrerons les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Si l'espace* V_n *et l'hypersurface* V_{n-1} *satisfont aux hypothèses* (Z_1) *et* (Z_2) *et si pour le point* M *de l'hypersurface* V_{n-1}

1. *la matrice* $\|h_{ab}\|$ *est d'ordre* $n-1$,

---

(2) On a $h_{ab} = -g_{\alpha\beta}(\nabla_a N^\alpha)\xi^\beta_b$ ([4], p. 488). Mais pour les lignes de courbure et paramétriques $\nabla_a \nu^\alpha = -{}_a\gamma \cdot \xi^\alpha_a$ donc $h_{ab} = {}_a\gamma G_{ab}$ et pour $a \neq b$ il vient $h_{ab} = 0$.

2. *les courbures* ${}_i\gamma$ *de toutes les lignes de courbure* C_i *passant par* M *sont égales entre elles, c'est-à-dire*

$$ {}_1\gamma = {}_2\gamma = \dots = \varrho \, , $$

alors le point M *est un ombilic.*

THÉORÈME 2. *Si, avec les hypothèses* (Z_1) *et* (Z_2) *pour l'espace* V_n *et* V_{n-1}, *le point* M *situé sur l'hypersurface* V_{n-1} *est un ombilic et si* $n-1$ *lignes de courbure* C_i $(i=1,\dots,n-1)$ *de l'hypersurface* V_{n-1} *passent par le point* M, *alors les courbures* ${}_i\gamma$ *de ces lignes* C_i *au point* M *sont égales, c'est-à-dire*

$$ {}_1\gamma = {}_2\gamma = \dots = {}_{n-1}\gamma \, . $$

Démonstration du théorème 1. Supposons que le point M ne soit pas un ombilic; dans ce cas il y a exactement $n-1$ lignes de courbure C_j $(j=1,\dots,n-1)$ passant par M et on peut admettre leur réseau pour réseau de lignes paramétriques.

Désignons par s^a l'arc métrique de la courbe C_a compte à partir du point M.

Calculons ${}_a\gamma$ pour la courbe C_a au point M. Nous ferons les calculs seulement pour la courbe C_1 et nous omettrons les calculs analogues pour les autres courbes $C_2,\dots,C_{n-1}$. De la formule (11) nous tirons

$$ {}_1\gamma = -g_{\nu\mu}\frac{DN^\nu}{ds^1}\,{}_1t^\mu \tag{16} $$

mais

$$ \frac{DN^\nu}{ds^1} = {}'\nabla_a N^\nu \frac{du^a}{ds^1} \tag{17} $$

où ${}'\nabla_a N^\nu$ désigne la dérivée covariante du champ N^ν calculée par rapport aux coordonnées u^a dans V_{n-1}.

On a ([4], p. 488):

$$ {}'\nabla_a N^\nu = -h^a_b C^\nu_b \tag{18} $$

où

$$ G_{cb} h^c_a = h_{ab} \, . \tag{19} $$

Donc

$$ \frac{DN^\nu}{ds^1} = -h^b_a C^\nu_b \frac{du^a}{ds^1} \, . \tag{20} $$

Les coordonnées du vecteur ${}_1t$ sont:

$$ {}_1t^\mu = \frac{\dfrac{\partial\xi^\mu}{\partial u^1}}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\xi^\alpha}{\partial u^1}\cdot\dfrac{\partial\xi^\beta}{\partial u^1}}} . \tag{21} $$

En substituant (20), (21) dans (16) nous obtenons

$$(22)\qquad {}_1\gamma = g_{\nu\mu} h_a^b \frac{\partial \xi^\nu}{\partial u^b} \cdot \frac{\dfrac{\partial \xi^\mu}{\partial u^1}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^1} \cdot \dfrac{\partial \xi^\beta}{\partial u^1}}} \cdot \frac{du^a}{ds^1}$$

$$= \frac{G_{b1} h_a^b}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^1} \cdot \dfrac{\partial \xi^\beta}{\partial u^1}}} \cdot \frac{du^a}{ds^1} = \frac{h_{a1}}{\sqrt{G_{11}}} \cdot \frac{du^a}{ds^1} .$$

Mais

$$(23)\qquad u^2 = \ldots = u^{n-1} = \text{const} ,$$

donc

$$(24)\qquad \frac{du^a}{ds^1} = 0 \quad \text{pour} \quad a = 2, \ldots, n-1$$

et nous obtenons

$$(25)\qquad {}_1\gamma = \frac{h_{11}}{G_{11}} ,$$

puisque

$$(26)\qquad \frac{ds^1}{du^1} = \sqrt{G_{11}} .$$

Pareillement nous obtiendrons pour les lignes $C_2, \ldots, C_{n-1}$

$$(27)\qquad {}_i\gamma = \frac{h_{ii}}{G_{ii}} , \quad i = 1, \ldots, n-1 .$$

Mais

$$(28)\qquad {}_i\gamma = \varrho , \quad i = 1, \ldots, n-1 ,$$

donc

$$(29)\qquad h_{ii} = \varrho G_{ii} .$$

En tenant compte de (14) nous obtenons finalement

$$(30)\qquad h_{ab} = \varrho G_{ab} , \quad a, b = 1, \ldots, n-1$$

et le point M est un ombilic, contrairement aux hypothèses, ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration du théorème 2. Si le point M est un ombilic de l'hypersurface V_{n-1}, alors

$$(31)\qquad h_{ab} = \varrho G_{ab} , \quad a, b = 1, \ldots, n-1 ,$$

donc

$$(32)\qquad h_{aa} = \varrho G_{aa} .$$

En introduisant sur V_{n-1} le réseau de lignes paramétriques passant par M composé des courbure de V_{n-1}, et en profitant de (27) nous obtenons

$$ {}_i\gamma = \frac{h_{ii}}{G_{ii}} = \varrho \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

ce qui était à démontrer.

Travaux cités

[1] S. Gołąb, *Sur une condition nécessaire et suffisante d'ombilicité d'un point de surface*, Ann. Soc. Pol. Math. 25 (1952), p. 140-144.

[2] — *Généralisation des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à un nombre arbitraire de dimensions*, Ann. Soc. Pol. Math. 22 (1949), p. 112-148.

[3] — *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1956.

[4] P. K. Raszewski, *Geometria Riemanna i analiza tensorowa*, Warszawa 1958.

[5] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, Bd. II, Groningen 1938.

[6] T. H. Wróbel-Trajdos, *O pewnej postaci równań Gołąba*, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej VI (1953), p. 43-50.

Reçu par le Rédaction le 2. 12. 1960