COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLVIII 1984 FASC. 1

ZUR ABHÄNGIGKEIT DES DIRAC-OPERATORS VON DER SPIN-STRUKTUR

VON

TH. FRIEDRICH (BERLIN)

1. Einleitung. Der Dirac-Operator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit X hängt ausser von der Geometrie des Raumes noch von einer willkürlich gewählten Spin-Struktur dieses ab. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die so entstehende Abhängigkeit. Nach Milnor (vergl. [3] und [4]) sind alle Spin-Strukturen von X — nach Festlegen einer ersten — durch die Elemente von $H^1(X; Z_2)$ klassifiziert. Daher ist die Differenz zweier Spin-Strukturen als Element in $H^1(X; Z_2)$ eine absolute Grösse, der ein 1-dimensionales reelles Vektorbündel E entspricht. Geht man von den vorliegenden Spin-Strukturen zu den assoziierten Spinorbündeln über, so unterscheiden diese sich durch eine tensorielle Multiplikation mit E. Dem zur zweiten Spin-Struktur gehörigen Dirac-Operator entspricht bei dieser Identifikation der Operator $D_2 = 1 \otimes_{\nabla E} D_1$ im Sinne von [5]. Wir drücken abschliessend das Quadrat $(D_2)^2$ in Abhängigkeit von $(D_1)^2$ und einem Rest $A_1 + A_0$ von Operatoren erster beziehungsweise nullter Ordnung aus und zeigen, wie die Methode des Vergleiches zweier Dirac-Operatoren unterschiedlicher Spin-Strukturen am Beispiel des flachen Torus T^n arbeitet.

2. Der Vergleich der Dirac-Operatoren. Seien (P_1, λ_1) und (P_2, λ_2) zwei Spin-Strukturen eines $SO(n)$-Hauptfaserbündels (Q, π, X) über einem CW-Komplex X und bezeichne ϱ: Spin $(n) \to SO(n)$ die zweifache Überlagerung der Gruppe $SO(n)$. Wir betrachten einen Atlas $\{U_i, a_{ij}\}$ des Bündels Q mit den Übergangsfunktionen

$$a_{ij}: U_i \cap U_j \to SO(n).$$

Sind $h_{ij}^1, h_{ij}^2: U_i \cap U_j \to \mathrm{Spin}(n)$ die entsprechenden Übergangsfunktionen der Spin-Hauptfaserbündel, so gilt

$$\varrho \circ h_{ij}^1 = \varrho \circ h_{ij}^2 = a_{ij}$$

und daher erhalten wir mit $c_{ij} := h_{ij}^2 \circ (h_{ij}^1)^{-1}: U_i \cap U_j \to Z_2$ Übergangsfunktionen einer zweifachen Überlagerung $\hat{X} \to X$. Konstruktiv kann man diese

Überlagerung folgendermassen erhalten: Sei R das Tensorprodukt der Z_2-Hauptfaserbündel $\lambda_i\colon P_i \to Q$. Dann wirkt $SO(n)\times Z_2$ natürlicherweise auf R und wir erhalten ein Hauptfaserbündel $(R, \pi, X; SO(n)\times Z_2)$. Dann gilt $\hat{X} = R/SO(n)$. Sei $E := \hat{X} \times_{Z_2} R^1$ das assoziierte Vektorbündel. Wegen $b_{ij}^2 = c_{ij} b_{ij}^1$ existiert eine Isomorphie

$$\beta\colon E \otimes S^1 \to S^2,$$

wobei $S^i = P_i \times_{\mathrm{Spin}(n)} \Delta$ das assoziierte Spinorbündel ist. Den zweifachen Überlagerungen $\lambda_i\colon P_i \to Q$ entsprechen Elemente $\sigma^i \in H^1(Q; Z_2)$, deren Einschränkung auf die Fasern gleich dem nichttrivialen Element von $H^1(SO(n); Z_2)$ sind. Somit liegt $\sigma^1 - \sigma^2$ im Bild von $\pi^*\colon H^1(X; Z_2) \to H^1(Q; Z_2)$ und wir können diese Differenz als ein Element der Kohomologiegruppe $H^1(X; Z_2)$ von X auffassen. Für die erste Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(E)$ des Bündels E gilt dann

$$w_1(E) = \sigma^1 - \sigma^2.$$

Weil S^i komplexe Vektorbündel sind, erhalten wir mittels β die Isomorphie $S^2 = E \otimes S^1 = E^c \otimes S^1$, wobei E^c die Komplexifizierung von E sei. Ist somit E^c ein triviales Vektorbündel, dann sind die zu den gegebenen Spin-Strukturen assoziierten Spinorbündel isomorph. Wegen $2c_1(E^c) = 0$ tritt dies zum Beispiel immer dann ein, falls $H^2(X; Z)$ keine 2-Torsionen besitzt. Ist andererseits $\dim(X) < n$, so betrachten wir das Vektorbündel

$$W = R \times_{SO(n)\times Z_2} R^n = Q \times_{SO(n)} R^n = P_1 \times_{\mathrm{Spin}(n)} R^n = P_2 \times_{\mathrm{Spin}(n)} R^n.$$

Die Cliffordmultiplikation $\mu\colon R^n \otimes \Delta \to \Delta$ induziert einen Homomorphismus $\mu\colon W \otimes S^1 \to S^2$ mit der Eigenschaft, dass aus $\mu(w \otimes s) = 0$ die Gleichung $w = 0$ oder $s = 0$ folgt. Auf Grund von $\dim(X) < n$ hat jedoch das Vektorbündel W einen nirgends verschwindenden Schnitt, der somit eine Isomorphie $S^1 = S^2$ liefert. Ist also $\dim(X) < n$, so sind die assoziierten Spinorbündel S^i gleichfalls isomorph.

Beispiel. Sei $X = P^5$ der reell-projektive Raum der Dimension 5, dessen zweite und vierte ganzzahlige Kohomologiegruppe jeweils isomorph zu Z_2 ist und deren nichttriviale Elemente x_2 beziehungsweise x_2^2, $x_2 \in H^2(P^5; Z)$, sind. Sei $Q = P^5 \times SO(3)$ das triviale $SO(3)$-Hauptfaserbündel. Wegen $H^1(P^5; Z_2) = Z_2$ hat Q zwei Spin-Strukturen und die Überlagerung $\hat{X} \to X = P^5$ ist $S^5 \to P^5$. Auf Grund des Satzes von Borsuk-Ulam (vergl. [6]) ist $E^c = S^5 \times_{Z_2} C$ ein nichttriviales Bündels, also gilt $c_1(E^c) = x_2$. Wir zeigen, dass die zu den Spin-Strukturen assoziierten Vektorbündel S^1 und S^2 nicht isomorph sind. Das erste Bündel S^1 ist trivial, weil Q die Spin-Struktur $P_1 = P^5 \times \mathrm{Spin}(3)$ besitzt. Wäre nun S^2 gleichfalls ein triviales Bündel, so würde wegen $\dim(S^1) = \dim(S^2) = 2$ die Gleichung $2E^c = 2$, also $2c_1(E^c) = 0$ und $c_1^2(E^c) = 0$ folgen. Aber $c_1^2(E^c) = x_2^2 \neq 0$ und daher sind S^1 und S^2 nicht isomorph.

Wir betrachten jetzt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit X der Dimension n und das assoziierte $SO(n)$-Hauptfaserbündel (Q, π, X). Sind zwei Spin-Strukturen von Q gegeben, so definiert der kanonische Zusammenhang im Z_2-Bündel $\hat{X} \to X$ eine kovariante Ableitung

$$\nabla^E \colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^* X \otimes E).$$

Sind $D_i \colon \Gamma(S^i) \to \Gamma(S^i)$ die den gewählten Spin-Strukturen entsprechenden Dirac-Operatoren, so gilt

$$\beta(1 \otimes_{\nabla^E} D_1) = D_2 \beta.$$

Tatsächlich, ist ein Atlas $\{U_i, a_{ij}\}$ des Hauptfaserbündels Q gewählt, so entspricht einem Schnitt $\psi \in \Gamma(E \otimes S^1)$ ein System von Funktionen

$$\psi_i \colon U_i \to R^1 \otimes \Delta = \Delta \qquad \text{mit } \psi_i = \varkappa(c_{ij} b_{ij}^1) \psi_j,$$

wobei $\varkappa \colon \mathrm{Spin}(n) \to GL(\Delta)$ die Spinordarstellung ist. Wegen

$$\psi_i = \varkappa(c_{ij} b_{ij}^1) \psi_j = \varkappa(b_{ij}^2) \psi_j$$

ist dann der Schnitt $\beta\psi \in \Gamma(S^2)$ gleichfalls durch das System $\psi_i \colon U_i \to \Delta$ gegeben. Weil nun der Dirac-Operator mittels des Levi-Cività-Zusammenhanges von Q sowie der Cliffordmultiplikation definiert ist, folgt dann

$$\beta \circ (1 \otimes_{\nabla^E} D_1) = D_2 \circ \beta$$

unmittelbar aus den entsprechenden Formeln für die kovariante Ableitung (vergl. [7]).

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, dass E^c ein triviales Vektorbündel ist (zum Beispiel falls $H^2(X; Z)$ keine 2-Torsionen hat). Dann kann ein Schnitt $e \in \Gamma(E^c)$ der Länge 1 gewählt werden und mit

$$\nabla_t^E(e) = w^e(t) e$$

erhalten wir eine geschlossene, rein imaginäre 1-Form w^e, $dw^e = 0$. Ihr entspricht ein imaginäres Vektorfeld it^e. Mittels β und $e \in \Gamma(E^c)$ identifizieren wir S^2 mit S^1 und fassen somit D_2 als einen Operator im Bündel S^1 auf. Dann gilt

SATZ 1. *$(D_2)^2$ zerfällt in die Summe $(D_2)^2 = (D_1)^2 + A_1 + A_0$, wobei $A_1 = -2i \nabla_{t^e}$ und A_0 die Multiplikation mit*

$$A_0 = -i \operatorname{div}(t^e) + |t^e|^2$$

sind.

Beweis. Sei ein Punkt $x \in X$ und ein orthonormales Reper $s_1, \ldots, s_n$ im Tangentialraum $T_x X$ fixiert. Wir wählen glatte Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ mit $dg_i(s_j) = \delta_{ij}$. Dann gilt (vergl. [5])

$$\begin{aligned}(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(e \otimes \psi)(x) &= e \otimes D_1 \psi(x) + \sum_{i=1}^{n} \nabla^E_{s_i}(e) \otimes (D_1(g_i \psi) - g_i D_1 \psi)(x) \\ &= e \otimes D_1 \psi(x) + \sum_{i=1}^{n} \nabla^E_{s_i}(e) \otimes \operatorname{grad}(g_i) \cdot \psi(x) \\ &= e \otimes (D_1 \psi + i t^e \cdot \psi)(x),\end{aligned}$$

wobei $\cdot$ die Cliffordmultiplikation bezeichnet. Somit schliessen wir $D_2 = D_1 + it^e$, woraus

$$(D_2)^2 = (D_1)^2 + i(D_1 \cdot t^e + t^e \cdot D_1) + |t^e|^2$$

folgt. Wir müssen demnach

$$D_1 \cdot t^e + t^e \cdot D_1 = -2\nabla_{t^e} - \operatorname{div}(t^e)$$

zeigen. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned}D_1 \cdot t^e \cdot \psi + t^e \cdot D_1 \cdot \psi &= \sum_i s_i \cdot \nabla_{s_i}(t^e \cdot \psi) + \sum_i t^e \cdot s_i \cdot \nabla_{s_i} \psi \\ &= \sum_i \{s_i \cdot (\nabla_{s_i} t^e) \cdot \psi + s_i \cdot t^e \cdot \nabla_{s_i} \psi + t^e \cdot s_i \cdot \nabla_{s_i} \psi\}.\end{aligned}$$

Zerlegen wir den Vektor t^e in seine Komponenten,

$$t^e = \sum_j t^j s_j,$$

so folgt $s_i \cdot t^e + t^e \cdot s_i = -2t^i$ und dann

$$D_1 \cdot t^e \cdot \psi + t^e \cdot D_1 \cdot \psi = \sum_i s_i \cdot \nabla_{s_i} t^e \cdot \psi - 2\nabla_t \psi.$$

Das Vektorfeld t^e entspricht jedoch einer geschlossenen 1-Form und daher gilt $\langle \nabla_{s_i} t^e, s_j \rangle = \langle \nabla_{s_j} t^e, s_i \rangle$. Dann aber erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_i s_i \cdot \nabla_{s_i} t^e &= \sum_{i,j} \langle \nabla_{s_i} t^e, s_j \rangle s_i \cdot s_j \\ &= -\sum_i \langle \nabla_{s_i} t^e, s_i \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \nabla_{s_i} t^e, s_j \rangle s_i \cdot s_j \\ &= -\operatorname{div}(t^e) + \sum_{i<j} (\langle \nabla_{s_i} t^e, s_j \rangle - \langle \nabla_{s_j} t^e, s_i \rangle) s_i \cdot s_j \\ &= -\operatorname{div}(t^e),\end{aligned}$$

womit der Beweis von Satz 1 beendet ist.

3. Ein Beispiel. Sei Γ ein Gitter in R^n mit der Basis $v_1, \ldots, v_n$ und sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von R^n. Wir betrachten

$$A = \det(v_1, \ldots, v_n), \qquad A_i(x) = \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

und

$$A_{ij} = \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Die Trivialisierung $\partial_i = \partial/\partial x_i$ des $SO(n)$-Hauptfaserbündels des Torus $T^n = R^n/\Gamma$ liefert uns eine Spin-Struktur $P = T^n \times \mathrm{Spin}(n)$ und damit ein Spinorbündel. Dem Quadrat D^2 des Dirac-Operators entspricht dabei der Laplace-Operator Δ. Die Spin-Strukturen des Torus können mittels Folgen der Gestalt $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = 0, 1$, nummeriert werden und das zugehörige Bündel E^ε ist $E^\varepsilon = R^n \times_\Gamma C$, wobei die Darstellung $\Gamma \to GL(C)$ durch $(\sum k_i v_i) z = (-1)^a z$ gegeben ist, wo $a = \sum k_i \varepsilon_i$. Ein Schnitt e im Bündel E^ε ist demnach eine Funktion

$$e\colon R^n \to C \qquad \text{mit } e\left(x + \sum k_i v_i\right) = (-1)^a e(x).$$

Wir wählen

$$e(x) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\pi i \varepsilon_j \frac{A_j(x)}{A}\right)$$

und erhalten

$$\nabla^E_{\partial_k}(e) = \left(\sum_{j=1}^{n} \pi i e_j (-1)^{j+k} \frac{A_{kj}}{A}\right) e.$$

Gemäss Satz 1 errechnen wir das Quadrat des zur Spin-Struktur $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ gehörenden Dirac-Operators:

$$(*) \qquad (D^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n})^2 = \Delta - \frac{2\pi i}{A} \sum_{k,j} (-1)^{j+k} \varepsilon_j A_{jk} \partial_k + \frac{\pi^2}{A^2} \sum_k \Big(\sum_j (-1)^{j+k} \varepsilon_j A_{jk}\Big)^2.$$

Die Funktionen $e_{v^*}(x) = \exp(2\pi i \langle v^*, x\rangle)$, wobei v^* das duale Gitter Γ^* durchläuft, bilden eine Basis von $L^2(T^n)$. Ist v_i^* die zu v_i duale Basis, so gilt

$$(D^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n})^2 e_{v^*} = 4\pi^2 \Big|v^* + \sum_j \tfrac{1}{2}\varepsilon_j v_j^*\Big|^2 e_{v^*}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

SATZ 2. *Sei Γ ein Gitter im R^n mit der Basis $v_1, \ldots, v_n$ und der dualen Basis $v_1^*, \ldots, v_n^*$. Die Spin-Strukturen des Torus $T^n = R^n/\Gamma$ werden durch die Folgen $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = 0, 1$, klassifiziert und das Quadrat des Dirac-Operators einer solchen Spin-Struktur ist durch die Formel $(*)$ gegeben. Die Eigenwerte dieses Operators sind*

$$4\pi^2 \Big|v^* + \sum_j \tfrac{1}{2}\varepsilon_j v_j^*\Big|^2, \qquad v^* \in \Gamma^*,$$

und der zugehörige Eigenunterraum ist $2^{[n/2]}$-dimensional.

FOLGERUNG (vergl. [1]). *Nur der zur kanonischen Spin-Struktur des flachen Torus gehörige Dirac-Operator hat einen Kern.*

LITERATURNACHWEIS

[1] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Advances in Mathematics 14 (1974), S. 1-55.
[2] D. Husemoller, *Fibre bundles*, New York 1966.
[3] J. Milnor, *Spin-structures on manifolds*, L'Enseignement Mathématique 9 (1963), S. 198-203.
[4] — *Remarks concerning spin-manifolds*, S. 55-62 in: *Differential and combinatorical topology* (*in honour of Marsten Morse*), Princeton 1965.
[5] R. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Princeton 1965.
[6] E. Spanier, *Algebraic topology*, New York 1966.
[7] R. Sulanke und P. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbündel*, Berlin 1972.

SEKTION MATHEMATIK
HUMBOLDT-UNIVERSITÄT BERLIN

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1978;
en version modifiée le 1. 10. 1980