ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1974)

Sur un système d'équations fonctionnelles lié au rapport anharmonique

par S. GOŁĄB (Kraków)

Résumé. Le but de cette Note est de caractériser d'une manière axiomatique le rapport anharmonique à l'aide d'un système d'équations fonctionnelles, notamment

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\sigma(x_3, x_4, x_1, x_2) - \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,\\ &\sigma(x_1, x_3, x_2, x_4) + \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1,\\ &\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \sigma(x_1, x_2, x_4, x_5) = \sigma(x_1, x_2, x_3, x_5). \end{aligned}$$

On peut déduire de ce système sans aucune hypothèse de régularité de la fonction σ la formule suivante pour la fonction cherchée σ:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{[a(x_1) - a(x_3)][a(x_2) - a(x_4)]}{[a(x_2) - a(x_3)][a(x_1) - a(x_4)]}$$

où a est une fonction inversible d'une variable réelle. Afin d'obtenir une solution unique du système $(*)$ qui sera le rapport anharmonique classique, il suffit d'admettre les deux hypothèses additionnelles suivantes:

1° a est une fonction strictement monotone,

2° $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = -1$ pour la famille à deux paramètres des quadruples harmoniques de la forme $\left(x, y, \frac{2xy}{x+y}, 0\right)$.

On sait que le rapport anharmonique peut être défini d'une façon axiomatique comme la solution d'une équation fonctionnelle [2]. A ce problème ont été consacrés quelques travaux ultérieurs [3], [4], [5].

Dans le présent travail nous allons définir le rapport anharmonique $\Sigma(P_1, P_2, P_3, P_4)$ d'un quadruple de points colinéarie comme la solution d'un système d'équations fonctionnelles. Ces équations représentent certaines propriétés bien connues du rapport anharmonique.

Nous partons du fait que le rapport anharmonique $\Sigma(P_1, P_2, P_3, P_4)$ d'un quadruple de points P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ se transforme d'après les formules suivantes, si l'on effectue une permutation de la suite P_1, P_2, P_3, P_4:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\Sigma(P_3, P_4, P_1, P_2) = \Sigma(P_1, P_2, P_3, P_4),\\ &\Sigma(P_2, P_1, P_3, P_4) = \Sigma^{-1}(P_1, P_2, P_3, P_4),\\ &\Sigma(P_1, P_3, P_2, P_4) = 1 - \Sigma(P_1, P_2, P_3, P_4), \end{aligned}$$

Il suit de ces propriétés que Σ peut prendre au plus 6 valeurs différentes dans des permutations arbitraires des points P_i.

Les relations (*) représentent en réalité les équations fonctionnelles pour la fonction Σ. Ces équations peuvent être transformées en équations fonctionnelles d'une fonction réelle σ de quatre variables réelles indépendantes x_i si l'on introduit les coordonnées affines des points P_i:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

La résolution générale du système

$$\sigma(x_3, x_4, x_1, x_2) - \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

$$\sigma(x_2, x_1, x_3, x_4) \cdot \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1, \tag{2}$$

$$\sigma(x_1, x_3, x_2, x_4) + \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1, \tag{3}$$

ne présente pas de difficultés, elle est même presque triviale.

Pour obtenir cette solution il suffit de déterminer les valeurs de σ tout à fait arbitrairement dans le domaine:

$$D_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 < x_2 < x_3 < x_4\} \tag{4}$$

et de prolonger les valeurs de σ au moyen des relations (1), (2), (3) sur le domaine D tout entier, où $D \subset \boldsymbol{R}^4$ est défini par la formule:

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}. \tag{5}$$

Une des conséquences de la définition *classique* du rapport anharmonique est la relation suivante:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \sigma(x_1, x_2, x_4, x_5) = \sigma(x_1, x_2, x_3, x_5). \tag{6}$$

Au lieu des relations $(1, 2, 3)$ nous admettrons les relations (1), (3) et (6) comme définition axiomatique du rapport anharmonique, c'est-à-dire nous considérons le système suivant d'équations fonctionnelle pour la fonction cherchée:

$$\sigma(x_3, x_4, x_1, x_2) - \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{7}$$

$$\sigma(x_1, x_3, x_2, x_4) + \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1, \tag{8}$$

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \sigma(x_1, x_2, x_4, x_5) = \sigma(x_1, x_2, x_3, x_5). \tag{9}$$

R e m a r q u e. On démontre sans difficulté que (7), (8) et (9) entraînent (2).

En précisant toutes les hypothèses nous supposons que la fonction cherchée σ est définie dans le domaine (5) et que l'on a

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0 \quad \text{pour } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D. \tag{10}$$

Sous ces hypothèses nous allons *résoudre le système* (7)–(9) *sans aucune hypothèse de régularité de la fonction* σ.

Nous partons de l'équation (9). Cette équation peut être réduite à l'équation de D. M. Sinzow [1], p. 156. Cette réduction nous fournit la solution sous la forme suivante

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\gamma(x_1, x_2, x_3)}{\gamma(x_1, x_2, x_4)}, \tag{11}$$

où la fonction inconnue $\gamma(x, y, z)$ est différente de zéro et définie pour $x \neq y \neq z \neq x$.

En tenant compte de la relation (11) nous obtenons d'après (7) et (8) les deux équations fonctionnelles suivantes pour la fonction γ:

$$\frac{\gamma(x_3, x_4, x_1)}{\gamma(x_3, x_4, x_2)} = \frac{\gamma(x_1, x_2, x_3)}{\gamma(x_1, x_2, x_4)}, \tag{12}$$

$$\frac{\gamma(x_1, x_2, x_3)}{\gamma(x_1, x_2, x_4)} + \frac{\gamma(x_1, x_3, x_2)}{\gamma(x_1, x_3, x_4)} = 1. \tag{13}$$

Introduisons quelques fonctions auxiliaires, notamment:

$$A(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(x, 0, y), \qquad B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(x, y, 0) \qquad \text{pour } x \neq y \tag{14}$$

et

$$a(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(1, x), \qquad \beta(x) = A(x, 1) \qquad (x \neq 0, 1). \tag{15}$$

En rappelant que $\gamma \neq 0$ on obtient de (12), en y substituant $x_2 = 0$, et en changeant convenablement les notations

$$\gamma(x, y, z) = B(x, y) \cdot \frac{A(z, x)}{A(z, y)}. \tag{16}$$

En substituant pareillement $x_2 = 0$ dans (13) on obtient

$$\gamma(x, y, z) = \frac{B(x, y) \cdot A(x, z)}{A(x, z) - A(x, y)}. \tag{17}$$

Remarquons que $A(x, z) \neq A(x, y)$ pour $z \neq y$. En effet, en posant dans (13) $x_2 = 0$, $x_1 = x, x_3 = y, x_4 = z$ on obtient d'après l'hypothèse $A(x, z) = A(x, y)$ $\gamma(x, y, z) = 0$, ce qui contredit à (10). Les formules (16) et (17) donnent

$$\frac{A(x, z)}{A(z, y)} = \frac{A(x, z)}{A(x, z) - A(x, y)}. \tag{18}$$

En substituant dans (18) $x = 1$ nous obtenons d'après (15)

$$\frac{\beta(z)}{A(z, y)} = \frac{a(z)}{a(z) - a(y)},$$

d'où

$$A(x, y) = \beta(x)\cdot\frac{a(x)-a(y)}{a(x)}. \tag{19}$$

La substitution de la dernière formule dans (17) nous fournit finalement

$$\gamma(x, y, z) = B(x, y)\cdot\frac{a(x)-a(z)}{a(y)-a(z)}. \tag{20}$$

Cette formule est valable pour tous les x, y, z différents et tels que $x, y, z \neq 0, 1$.

La substitution de la formule (20) dans (17) donne

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{[a(x_1)-a(x_3)]\cdot[a(x_2)-a(x_4)]}{[a(x_2)-a(x_3)]\cdot[a(x_1)-a(x_4)]} \tag{21}$$

pour $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ et $x_i \neq 0, 1$.

En posant dans la fonction $\gamma(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ c'est-à-dire en définissant

$$\tilde{a}(x) \overset{\text{def}}{=} \gamma(3, 2, x), \quad x \neq 2, 3$$

nous arrivons à la formule

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{[\tilde{a}(x_1)-\tilde{a}(x_3)]\cdot[\tilde{a}(x_2)-\tilde{a}(x_4)]}{[\tilde{a}(x_2)-\tilde{a}(x_3)]\cdot[\tilde{a}(x_1)-\tilde{a}(x_4)]} \tag{22}$$

valable pour tous les x_i différents et $x_i \neq 2, 3$.

De cette façon nous obtenons l'identité

$$\frac{[\tilde{a}(x_1)-\tilde{a}(x_3)]\cdot[\tilde{a}(x_2)-\tilde{a}(x_4)]}{[\tilde{a}(x_2-\tilde{a}(x_3)]\cdot[\tilde{a}(x_1-\tilde{a}(x_4)]} = \frac{[a(x_1)-a(x_3)]\cdot[a(x_2)-a(x_4)]}{[a(x_2)-a(x_3)]\cdot[a(x_1)-a(x_4)]}$$

valable pour $x_i \neq 0, 1, 2, 3$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

En y fixant les valeurs x_1, x_2, x_3 et en posant $x_4 = x$ nous en tirons la relation

$$\tilde{a}(x) = \frac{\lambda a(x)+\mu}{\nu a(x)+\varrho},$$

λ, μ, ν, ϱ étant des constantes. Cette relation nous permet d'étendre la définition de la fonction $a(x)$ en sorte que la formule (21) soit valable pour tous les quadruples (x_1, x_2, x_3, x_4), où x_i sont différents entre eux.

Inversement, on vérifie sans difficulté que, $a(x)$ étant une fonction quelconque, définie partout et inversible, le second membre de (21) représente une fonction satisfaisant aux équations fonctionnelles (7), (8), (9). On peut donc énoncer le

THÉORÈME 1. *La solution générale σ du système d'équations* (7)–(9) *est donnée par la formule* (21), $a(u)$ *étant une fonction arbitraire inversible.*

On peut maintenant poser le problème suivant: sous quelles conditions supplémentaires le système (7)–(9) possède-t-il une solution unique

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} \tag{23}$$

réproduisant le rapport anharmonique? Autrement dit: sous quelles conditions la fonction a est-elle linéaire?

Nous allons résoudre cette question en faisant quelques hypothèses additionnelles.

Supposons d'abord que σ soit une fonction *continue* par rapport à l'une des variables x_i. De la résulte que la fonction a est continue et, comme a est inversible, elle est strictement monotone et, par conséquent, dérivable sauf aux points d'un ensemble dénombrable E.

LEMME. *Si la fonction σ, définie dans D, satisfait aux équations* (7)–(9) *et si elle est continue par rapport à l'une des variables x_i, on a*

$$x \notin E, \qquad a' \neq 0 \rightarrow \lim_{h\to 0} \sigma(y, x, x-h, x+h) = -1$$

pour chaque $y \neq x$, où E est l'ensemble des points où a est dérivable.

Démonstration. Supposons $x \notin E$, c'est-à-dire admettons l'existence de la dérivée $a'(x)$. Nous avons d'après la formule (21)

$$\sigma(y, x, x-h, x+h) = \frac{[a(y)-a(x-h)]\cdot[a(x)-a(x+h)]}{[a(x)-a(x-h)]\cdot[a(y)-a(x+h)]}$$
$$= \frac{a(y)-a(x-h)}{a(y)-a(x+h)} \cdot \frac{a(x)-a(x+h)}{a(x)-a(x-h)}.$$

a étant continue on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{a(y)-a(x-h)}{a(y)-a(x+h)} = 1 \quad \text{parce que } a(y) \neq a(x).$$

Nous transformons le deuxième facteur

$$\frac{a(x)-a(x+h)}{a(x)-a(x-h)} = -\frac{a(x+h)-a(x)}{h} : \frac{a(x-h)-a(x)}{-h}.$$

Mais a possède au point x une dérivée $a'(x) \neq 0$, donc le second membre de la formule précédente admet la limite (-1). Nous avons donc

$$\lim_{h\to 0} \sigma(y, x, x-h, x+h) = -1.$$

Remarquons que dans le lemme précédent l'hypothèse $a'(x) \neq 0$ est essentielle.

D'après le lemme précédent on peut dire que, si h est petit la valeur

$$\sigma(y, x, x-h, x+h)$$

est, sous l'hypotèse de la continuité de la fonction a, égale à (-1) pour presque tous les points x et pour tous les $y \neq x$ voisins de x; autrement dit, pour les quadruples $(y, x, x-h, x+h)$ le rapport anharmonique généralisé σ est rapproché du rapport harmonique. Il se présente donc l'idée d'ajouter une hypothèse additionnelle postulant que pour les quadruples harmoniques d'une certaine classe la valeur de σ soit égale à (-1).

La totalité des quadruples (x_1, x_2, x_3, x_4) harmoniques constitue une famille F_3 à trois paramètres essentiels. Nous allons envisager des sous-classes F_2 à deux paramètres ou bien F_1 à un paramètre. Pour fixer les idées nous définissons F_2 et F_1 respectivement comme il suit:

$$(25) \quad \begin{aligned} F_2 &\overset{\text{def}}{=} \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = \frac{2xy}{x+y}, \ x_4 = 0\right\}, \\ F_1 &\overset{\text{def}}{=} \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 = x, x_2 = 1, x_3 = \frac{2x}{x+1}, \ x_4 = 0\right\}. \end{aligned}$$

Le cas F_1 (plus difficile) sera le sujet d'une publication ultérieure.

Nous allons formuler ci-dessous un théorème où l'hypothèse concernant la régularité de la fonction a sera affaiblie. Observons notamment que, a étant inversible, l'hypothèse I: „a est strictement monotone" est plus faible que l'hypothèse II: „a est continue", parce que II implique directement I tandis que l'implication I $\Rightarrow$ II oblige de faire appel à l'équation fonctionnelle.

THÉORÈME 2. *Si la fonction a dans la formule*

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{[a(x_1) - a(x_2)] \cdot [a(x_2) - a(x_4)]}{[a(x_2) - a(x_3)] \cdot [a(x_1) - a(x_4)]}$$

est strictement monotone et si pour chaque quadruple harmonique $(x, y, 2xy/x+y, 0)$ *où* $|x| \neq |y|$ *(appartenant à la famille* F_2*) la valeur de* σ *est égale à* (-1), *alors la formule*

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3) \cdot (x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3) \cdot (x_1 - x_4)}$$

a lieu.

Démonstration. En substituant $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = 2xy/(x+y)$, $x_4 = 0$ dans $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = -1$ nous obtenons

$$\left[a(x) - a\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\right] \cdot [a(y) - a(0)] = \left[a\left(\frac{2xy}{x+y}\right) - a(y)\right] \cdot [a(x) - a(0)]$$

ou bien, en posant

$$\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x) - \alpha(0), \tag{26}$$

$$\delta\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \cdot [\delta(x) + \delta(y)] = 2\,\delta(x) \cdot \delta(y). \tag{27}$$

Remarquons que α étant, par hypothèse, strictement monotone, δ possède également la même propriété. L'égalité $\delta(0) = 0$ entraîne l'inégalité

$$\delta(x) \neq 0 \quad \text{pour } x \neq 0. \tag{28}$$

Supposons pour le moment $x \neq 0$. Nous pouvons donc poser

$$\gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta(1/x)} \tag{29}$$

et l'équation (27) prend la forme

$$\gamma\left(\frac{x+y}{2xy}\right) = \frac{1}{2}\left[\gamma\left(\frac{1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{1}{y}\right)\right]. \tag{30}$$

L'équation précédente veut dire que $\gamma(\xi)$ vérifie l'équation de Jensen (pour $\xi, \eta \neq 0$ au moins)

$$\gamma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}[\gamma(\xi) + \gamma(\eta)].$$

Mais on conclut de (29) que γ est une fonction strictement monotone et, par conséquent, elle doit avoir la forme linéaire ([1], p. 49):

$$\gamma(x) = \lambda x + \mu. \tag{31}$$

La formule (31) n'est pas satisfaite, peut-être, pour $x = 0$, mais, comme γ est monotone, (31) subsiste pour tous les x.

En revenant aux fonctions δ et α nous obtenons

$$\delta(x) = \frac{1}{\gamma(1/x)} = \frac{1}{(\lambda/x) + \mu} = \frac{x}{\lambda + \mu x},$$

$$\alpha(x) = \alpha(0) + \delta(x) = \frac{\tau + \omega x}{\lambda + \mu x},$$

τ, ω étant constantes. La fonction α résulte donc comme une fonction homographique. Remarquons cependant qu'une fonction homographique qui ne se réduit pas à une fonction linéaire ($\mu \neq 0$) possède un point de discontinuité. Comme la fonction α doit être définie partout (à cause du domaine D de la fonction σ), il suit que $\mu = 0$ et, par conséquent, a se réduit à une fonction linéaire ce qui établit la formule (23).

En terminant cette Note nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 3. *Etant donné le système* (7)–(9), *où σ est défini dans* (5) *et satisfait à* (10), *la solution générale s'exprime par la formule* (21), *où $a(u)$ est une fonction inversible. Il y a donc une infinité de solutions. Pour obtenir la solution unique* (23) *il suffit de supposer que a est strictement monotone et en outre que $\sigma = -1$ pour chaque quadruple harmonique* $\left(x, y, \frac{2xy}{x+y}, 0\right)$ *où* $|x| \neq |y|$.

Travaux cités

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, 1961.
[2] —, S. Gołąb, M. Kuczma und E. Siwek, *Das Doppelverhältnis als Lösung einer Funktionalgleichung*, Ann. Polon. Math. 9 (1960), p. 183–187.
[3] W. Benz, *Die 4-Punkt-Invarianten in der projektiven Geraden über einem Schiefkörper*, ibidem 21 (1968), p. 97–101.
[4] — *The n-point-invariants of the projective line and cross ratio of n-tuples*, ibidem 26 (1972), p. 53–60.
[5] S. Topa, *On a generalization of the functional equation for the harmonic ratio of four points on a projective line over an arbitrary commutative field*, ibidem 23 (1970), p. 65–72.

Reçu par la Rédaction le 18. 6. 1973