

*POMIAR PRZEZ KOLEJNE PORÓWNYWANIE*

1. Jak należy podzielić odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $k$  części  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , by z informacji, że  $x \in S_i$ , ocenić liczbę  $x$  z możliwie największą dokładnością? Jak dobrać odważniki, by z daną dokładnością ocenić ciężar kawałka stali w możliwie najmniejszej ilości ważeń? A jak znowu znaleźć najekonomiczniejszy sposób ważenia i oceny, jeśli znana jest materialna strata wynikająca z każdego możliwego błędu w ocenie, a każde ważenie kosztuje określoną ilość złotych? — Zagadnień tego rodzaju można by wyliczyć wiele. Celem niniejszej pracy jest próba znalezienia rozwiązań kilku takich typowych problemów metodami teorii gier.

Sformalizujmy pierwsze zadanie. Należy podać podział  $S = (S_1, S_2, \dots, S_k)$  ( $k$  dane z góry) odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$  na części  $S_1, S_2, \dots, S_k$  i funkcję  $z = f(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), gdzie  $z$  jest oszacowaniem ikxa, wynikłym z informacji, że  $x \in S_i$ . Podział  $S$  i funkcję  $z = f(i)$  należy tak dobrać, żeby orzeczenie  $z$  było możliwie najlepsze. Orzeczenie jest tym lepsze, im mniejszy jest absolutny błąd  $|x - z|$ .

Ten postulat zamienia zagadnienie na grę człowieka, dobierającego  $S$  i  $f$  a nie wiedzącego jakie jest  $x$ , przeciw naturze, która to  $x$  wybrała; przy tym człowiek przegrywa do natury kwotę równą błędowi orzeczenia. Rozwiążemy to zagadnienie za pomocą koncepcji minimaks, to znaczy określając tak  $S$  i  $f$ , żeby maksymalny błąd, jaki może spowodować natura przy danym  $S$  i  $f$ , był niewiększy, niż maksymalny błąd przy innych  $S, f$ . System taki będziemy nazywali *najlepszym w sensie minimaks*.

**TWIERDZENIE 1.** *System  $(S^0, f^0)$ , gdzie  $S^0$  jest podziałem przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$  na równe odcinki, a ocena  $f^0(i)$  jest równa środkowi  $i$ -tego odcinka, jest najlepszy w sensie minimaks.*

*Dowód.* Jest widoczne, że dla systemu  $(S^0, f^0)$

$$(1) \quad |x - z| \leq 1/2k.$$

Zauważmy, że na jakiegokolwiek  $k$  części podzielimy odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$ , długość najdłuższej części będzie co najmniej równa  $1/k$ . Zauważmy dalej,

że jeżeli wiemy, iż punkt  $x$  należy do pewnej części odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$ , to żadna ocena nie może zagwarantować błędu mniejszego niż połowa długości tej części. Jeżeli więc zastosujemy jakiś podział  $S$  odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $k$  części, to może się zdarzyć, że punkt  $x$  znajdzie się w najdłuższej części tego podziału i wtedy żadna ocena nie zagwarantuje błędu mniejszego niż  $1/2k$ . Jeśli jednak zastosujemy system podziału i oceny, zdefiniowany w twierdzeniu, to na mocy (1) błąd będzie co najwyżej równy  $1/2k$ . System ten gwarantuje więc najmniejszy błąd, czyli jest najlepszy *ex definitione*.

2. Nasze zagadnienie pierwotne można postawić inaczej: uznać, że błąd w szacowaniu wartości  $x$  powoduje stratę  $W$  i szacowanie uznać za grę, w której należy tę stratę zminimalizować. Jeżeli zgodzimy się na to, że strata zależy tylko od błędu  $|x-z|$  i rośnie wraz z błędem, to znalezione już rozwiązanie  $(S^0, f^0)$  będzie nadal najlepsze w sensie minimum. Wynika to z faktu, że właściwie jest obojętne czy będziemy minimalizować błąd absolutny  $W_1(|x-z|) \equiv |x-z|$ , czy też dowolną jego rosnącą funkcję  $W(|x-z|)$  — wartości ekstremalne zostaną osiągnięte dla tych samych wartości argumentu  $|x-z|$ .

3. Gdy mamy informację, która daje aprioryczne prawdopodobieństwo  $\varphi(t)dt$  leżenia ikxa w  $(t, t+dt)$ , możemy rozwiązanie uzależnić od funkcji  $W$  i od gęstości  $\varphi(t)$ . Trzeba wtedy znaleźć system  $(S, f)$ , który minimizuje wyrażenie

$$(2) \quad I(S, f; \varphi) = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} W(|t-f(i)|) \varphi(t) dt.$$

W przypadku  $W(u) \equiv u^2$ , ocenę  $z = f(i)$ , optymalną ze względu na podział  $S$  i rozkład  $\varphi$ , łatwo znaleźć z warunku<sup>(1)</sup>  $\frac{\partial I}{\partial f(i)} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Będzie nią

$$(3) \quad f(i) = \frac{\int_{S_i} t \varphi(t) dt}{\int_{S_i} \varphi(t) dt}.$$

Optymalny podział  $S$  znajdziemy wstawiając do  $I(S, f; \varphi)$  zamiast  $f(i)$  prawą stronę wzoru (3) i minimalizując tylko po podziałach. Nie będziemy się zajmować szczegółowo tym zagadnieniem, gdyż dotyczy ono przypadku, w którym znany jest rozkład  $\varphi(t)$ . Rozwiązanie będzie zależało od  $\varphi$  i pozostawmy je tym, którzy mają konkretne rozkłady wzięte z praktyki. Gdy  $\varphi(t) \equiv 1$ , tj. gdy aprioryczny rozkład jest jednostajny, czytelnik znajdzie rozwiązanie w ustępie 6.

<sup>(1)</sup> Przy ustalonym  $i$  traktujemy  $f$  jako zmienną.

4. Czasami nie chodzi nam o ocenę wartości  $x$ , ale tylko o ograniczenie tej wartości w możliwie najmniejszym przedziale. Ściśle mówiąc, trzeba znaleźć podział optymalny w sensie minimaks, gdy strata  $W$  zależy tylko od długości części  $S_j$ , w której znajduje się punkt  $x$ , i rośnie wraz z tą długością. Rozwiązaniem jest podział  $S^0$ , gdyż  $\max W(d(S_j)) = W(\max d(S_j))$ , a to osiąga minimum, gdy wszystkie  $S_j$  są przedziałami o równej długości. (Przez  $d(S_j)$  oznaczyliśmy długość części  $S_j$ .) W tej grze strategią człowieka jest podział  $S$ , a strategią natury wartość  $x$ . Wartość ta jest człowiekowi nieznana i natura może ją wybrać dowolnie. Załóżmy, że natura dysponuje mechanizmem losowym, który z prawdopodobieństwem  $\varphi(t)dt$  wyrzuca liczbę zawartą w przedziale  $(t, t+dt)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Natura uruchamia swój mechanizm i otrzymuje jakąś liczbę  $x$ . Człowiek podaje podział  $S = (S_1, S_2, \dots, S_k)$  i płaci naturze długość tej części  $S_j$ , w której znalazła się liczba  $x$ . W praktyce taka procedura znajduje swoje odzwierciedlenie w fakcie, że człowiek mający określić jakąś wielkość  $x$  (np. lekarz mierzący temperaturę pacjentów) z różnymi częstościami trafia na różne jej wartości. Znając  $S$  i  $\varphi(t)$  można wyrachować wartość oczekiwaną straty

$$E(W) = \sum_{i=1}^k P(x \in S_i) W(d(S_i)).$$

Traktując rozkład określony przez gęstość  $\varphi(t)$  jako strategię natury, a oczekiwaną wartość straty  $E(W)$  jako stratę  $W'$ , otrzymamy nową grę (strategię człowieka pozostawiamy bez zmiany). Pokażemy, że 1° jeżeli funkcja  $W$  jest rosnąca i wypukła, to dla nowej gry najlepszą w sensie minimaks strategią człowieka pozostanie nadal podział  $S^0$ , i że 2° najlepszą strategią natury jest rozkład jednostajny.

Oto dowód: Pokażemy najpierw, że dla podziału  $S^0$  wartość oczekiwana  $E(W)$  nie zależy od rozkładu.

$$(4) \quad E(W) = \sum_{i=1}^k P(x \in S_i) W(d(S_i)) = \sum_{i=1}^k P(x \in S_i) W(1/k) = W(1/k).$$

Jeśli jednak funkcja  $W$  jest rosnąca i wypukła, to dla rozkładu jednostajnego zachodzi nierówność

$$(5) \quad E(W) = \sum_{i=1}^k P(x \in S_i) W(d(S_i)) \geq \sum_{i=1}^k p_i W(p_i) \geq W\left(\sum_{i=1}^k p_i^2\right) \geq \\ \geq W\left(\min_{p_1+\dots+p_k=1} \sum_{i=1}^k p_i^2\right) = W(1/k)$$

( $p_i$  oznacza tu  $P(x \in S_i)$ ).

Przypuśćmy teraz, że podział  $S^0$  nie jest najlepszy w sensie minims. Jak już wiemy, oczekiwana wartość straty dla podziału  $S^0$  jest zawsze równa  $W(1/k)$ . Musiałby więc istnieć podział  $S^1$  różny od  $S^0$  i taki, żeby dla tego podziału i dla każdego rozkładu oczekiwana wartość straty była mniejsza od  $W(1/k)$ . Wobec nierówności (5) jest to niemożliwe.

Ponieważ podział  $S^0$  gwarantuje człowiekowi oczekiwaną stratę równą  $W(1/k)$ , więc żadna strategia natury nie może jej zagwarantować większego oczekiwanego zysku. Na mocy (5) oczekiwany zysk natury jest przy rozkładzie jednostajnym co najmniej równy  $W(1/k)$ . Rozkład ten jest więc jej najlepszą strategią.

5. Zastosujmy wyniki otrzymane w poprzednich ustępach do następującego zagadnienia: Chcemy wyznaczyć wartość  $x$ , o której wiemy tylko, że leży w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$  (wyobraźmy sobie, że  $x$  jest zrealizowane np. jako ciężar lub długość pręta mosiężnego), przez porównanie (np. przez porównanie na wadze z innymi przedmiotami o znanym ciężarze). Chodzi o najwłaściwsze dobranie owych przedmiotów porównawczych, tj. takie, które by pozwoliło ocenić liczbę  $x$  z możliwie największą dokładnością.

Ścisłe mówiąc, mamy daną z góry liczbę  $n$  aktów porównawczych. Należy określić ciąg  $n$  funkcji  $t_i = g_i(e_1, e_2, \dots, e_{i-1})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $g_1$  jest stałe), gdzie

$$e_i = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < t_i \\ 1, & \text{gdy } x > t_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n; t_1 = g_1).$$

(Zakładamy, że porównanie nie da nigdy  $x = t_i$  — skrupulatni niech założą, że  $g_i$  przyjmują wyłącznie wartości wymierne, a  $x$  jest niewymierne.) Mając system porównywania  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  wyznaczamy liczbę  $x$  w sposób następujący: Porównujemy  $x$  z  $t_1$ . Z rezultatu tego porównania, tj. wartości zmiennej  $e_1$ , otrzymujemy liczbę porównawczą  $t_2 = g_2(e_1)$ . Porównujemy  $x$  z  $t_2$  i otrzymujemy wartość zmiennej  $e_2$ , a więc i liczbę porównawczą  $t_3 = g_3(e_1, e_2)$ , i tak kolejno, aż porównamy  $x$  z  $t_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ . Z rezultatów porównań otrzymamy ciąg  $n$  nierówności. Wyznaczają one pewien przedział, w którym znajduje się liczba  $x$ .

Określmy jeszcze funkcję  $h(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ; napiszemy  $z = h(e_1, e_2, \dots, e_n)$  i nazwiemy  $z$  oszacowaniem ikxa wynikłym z  $n$  aktów porównawczych. Układ  $(g, h) = (g_1, g_2, \dots, g_n; h)$  nazwiemy *systemem porównywania i oceny*. Jeżeli przyjmiemy postulat, że orzeczenie  $z$  jest tym lepsze, im mniejszy jest absolutny błąd  $|x - z|$ , to otrzymamy grę człowieka przeciw naturze — człowiek wybiera  $(g, h)$ , natura wybiera  $x$ .

**TWIERDZENIE 2.** *Jeżeli w wyżej zdefiniowanym zagadnieniu chcemy dobrać  $g$  i  $h$  tak, żeby zminimalizować  $|x-z|$ , to optymalnym systemem w sensie minimaks będzie*

$$(6) \quad t_1 = 1/2, \quad t_i = 0, e_1 e_2 \dots e_{i-1} 1 \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

$$(7) \quad z = h(e_1, e_2, \dots, e_n) = 0, e_1 e_2 \dots e_n 1.$$

Przy określaniu  $t_i$  i  $z$  użyliśmy pisowni diadycznej. Układ (6), (7) jest po prostu sformalizowaniem następującego postępowania: Porównuje się  $x$  ze środkiem przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$  — jeżeli okaże się, że  $x$  leży w lewej połowie, to następnie porównuje się  $x$  ze środkiem lewej, jeżeli leży w prawej, to ze środkiem prawej połowy. Po  $i$  porównaniach ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  $x$  jest zlokalizowane w pewnym przedziale o długości  $1/2^i$  powstałym przez sukcesywne połowienie przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$   $i$  razy. Za ocenę  $z$  bierzemy środek przedziału, w którym zlokalizowano  $x$  po  $n$  porównaniach.

**Dowód twierdzenia:** Każdy system szacowania  $(g, h)$  określa liczbę  $t_1$  i każe porównywać  $x$  z tą liczbą. Gdy więc  $n = 1$ , to trzeba znaleźć taki podział odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$  na dwa przedziały  $\langle 0, t_1 \rangle, \langle t_1, 1 \rangle$  i taką ocenę  $z$ , która by minimalizowała  $\max_x |x-z|$ . Zagadnienie takie w ogólniejszej

postaci rozwiązaliśmy na początku naszej pracy. Dla  $n = 2$  otrzymujemy nie 2, lecz 4 przedziały, z których każdy otrzymaliśmy przez podzielenie każdego z dwóch przedziałów, otrzymanych w przypadku  $n = 1$ , na dwa podprzedziały. (Można by wprowadzić pomysł systemu, w którym po porównaniu  $x$  z  $t_1$  i po otrzymaniu, np. że  $x < t_1$ , porównuje się  $x$  z  $t_2 > t_1$ , ale oczywiście taki system nie może być najlepszy, gdyż otrzymany rezultat  $x < t_2$  można wydedukować już z pierwszego porównania.) Ogólnie, dla dowolnego  $n$  otrzymamy  $2^n$  przedziałów, z których każdy otrzymuje się przez sukcesywne podzielenie każdego z poprzednio otrzymanych przedziałów na dwie części, przy czym procedurę tę przeprowadza się  $n$ -krotnie, zaczynając od całego odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$ . Zagadnienie sprowadza się więc do znalezienia takiego podziału  $S$  odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $2^n$  przedziałów  $S_i$  i takiej oceny  $z = f(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^n$ ), by na podstawie informacji, że  $x \in S_i$ , zminimalizować  $\max_{x \in S_i} |f(i) - x|$ .

Z twierdzenia 1 wynika, że przedziały te muszą być równej długości i  $f(i)$  muszą być ich środkami, co właśnie mówi twierdzenie 2.

Praktyczną ilustracją twierdzenia udowodnionego przed chwilą jest następujący sposób ważenia przedmiotów. Mamy przedmiot, o którym wiemy, że waży nie więcej niż  $m$  dekagramów. Jak należy dobrać ciężarki, żeby po ustalonej ilości  $n$  ważeń można było ocenić ciężar przedmiotu z możliwie najmniejszym błędem? Każde ważenie jest porówny-

waniem ciężaru przedmiotu ze znanym ciężarem. Na mocy twierdzenia 2 każdym optymalnym — w sensie minimaks — układem ciężarków będzie taki, który pozwala zrealizować liczby porównawcze  $mt_i$ , przy czym  $t_i$  są dane wzorem (6). Takim układem jest  $m/2, m/2^2, \dots, m/2^n$ . Co więcej, układ ten wśród wszystkich układów optymalnych składa się z najmniejszej ilości ciężarków — możemy bowiem we wzorze (6) położyć  $e_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); wtedy  $t_i = 1/2^i$  i już do zrealizowania tak skonstruowanych wartości  $mt_i$  potrzeba co najmniej  $n$  ciężarków. Jak, mając ów optymalny układ, określamy w  $n$  aktach ciężar przedmiotu podaje następujący przykład. Mamy przedmiot, który waży co najwyżej 16 dkg. Używamy ciężarków 8, 4, 2, 1 dekagramów. Kładziemy przedmiot na szalę, a na przeciwną ciężarek 8 dekagramów; jeżeli przedmiot przeważy, dołożymy 4 dekagramy na szalę, która poszła w górę, i kolejno zawsze następny ciężarek na szalę idącą w górę, aż do ostatniego ciężarka. Niech sytuacja na wadze będzie  $x+2+1$  po lewej,  $8+4$  po prawej i niech prawa szala będzie w górze. Z tego, że 1 leży po lewej, wynika, że lewa szala była w górze przed dołożeniem jedynki, a więc mamy  $x+2 < 8+4$ ,  $x+2+1 > 8+4$ , a więc  $9 < x < 10$ , czyli  $x = 9,5$  dekagramów, z błędem mniejszym od  $1/2$  dekagrama.

Często zdarza się inna sytuacja. Dopuszczalny błąd  $b$  i maksymalny ciężar przedmiotu  $m$  są dane z góry, a chcemy znaleźć układ ciężarków, który pozwala określić ciężar przedmiotu z błędem mniejszym niż  $b$  w najmniejszej ilości  $n_0$  ważeń. Istnieje więc optymalny układ ciężarków, który pozwala po  $n_0$  krokach określić ciężar przedmiotu  $x$  z błędem mniejszym niż  $b$ . Wtedy układ  $m/2, m/2^2, \dots, m/2^n$  też zdoła po  $n_0$  krokach określić  $x$  z błędem mniejszym niż  $b$ , gdyż, jak już wiemy, gwarantowany błąd jest dla tego układu najmniejszy. Układ ten jest więc również optymalny w nowym sensie. Liczbę  $n_0$  znajdziemy z warunku  $m/2^{n_0+1} < b \leq m/2^{n_0}$ , tj.  $n_0 = [\log_2(m/b)]$  <sup>(2)</sup>.

Jeżeli mamy ustaloną liczbę  $n$  ciężarków i chcemy zważyć  $c$  dkg towaru ( $c$  — liczba naturalna), to należy jeszcze inaczej określić optymalny układ. Niech  $v$  będzie taką liczbą naturalną, że dany układ pozwala zważyć w okrągłych dekagramach  $1, 2, \dots, v$  dkg towaru i nie pozwala zważyć  $v+1$  dkg. Gdy przyjmiemy postulat, że układ jest tym lepszy, im  $v$  jest większe, to, jak dobrze wiadomo, optymalnym układem będzie  $1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}$  i wtedy  $v_0 = 1+3+3^2+\dots+3^{n-1} = (3^n-1)/2$ . Są dwa rodzaje kupców: ci, którzy ważą przedmioty o nieznanym ciężarze — powinni oni używać układu  $\{2^{s-i}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ( $m$  zawsze można

<sup>(2)</sup>  $[r]$  oznacza tu część całkowitą liczby  $r$ .

ograniczyć z góry przez  $2^s$ , gdzie  $s$  jest liczbą całkowitą) — i ci, którzy odważają z góry określoną ilość towaru — powinni oni używać układu  $\{3^i\}$ . Gdy klient zażąda  $c$  ( $\leq v_0$ ) dkg kawy, będzie zawsze można zrealizować  $c$  na szalach przy pomocy układu  $\{3^i\}$ , a potem nasypać kawy aż do równowagi.

6. Jak pokazaliśmy przy dowodzie twierdzenia 2, zagadnienie tam rozpatrywane sprowadza się w istocie rzeczy do zagadnienia optymalnego podziału i oceny, rozpatrywanego na początku pracy. Z ustępu 2 wynika więc, że znalezione rozwiązanie (6), (7) będzie nadal najlepsze w sensie minimum, gdy będziemy minimizować nie błąd absolutny  $|x-z|$ , lecz dowolną jego funkcję  $W(|x-z|)$ , jeśli tylko założymy, że rośnie ona wraz z błędem. Gdy mamy informację, która daje aprioryczne prawdopodobieństwo  $\varphi(t)dt$  leżenia ikxa w  $(t, t+dt)$ , rozwiązania będziemy szukać tak, jak to podaje ustęp 3, kładąc tam  $k = 2^n$ . Gdy aprioryczny rozkład jest jednostajny, tj. gdy  $\varphi(t) \equiv 1$ , podamy to rozwiązanie *explicitie*.

Zacznijmy od orzeczenia  $z$  bez aktu porównawczego. Będzie ono równe  $1/2$  przy jakiegokolwiek stracie  $W$  rosnącej wraz z błędem. Pokażemy mianowicie, że  $p = 1/2$  minimizuje wartość oczekiwaną straty

$E(W) = \int_0^1 W(|t-p|)dt$ . Istotnie, jeśli np.  $p > 1/2$ , to

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \int_0^1 W(|t-p|)dt - \int_0^1 W(|t-\frac{1}{2}|)dt = \\
 & = \int_0^p W(p-t)dt + \int_p^1 W(t-p)dt - \int_0^{1/2} W(\frac{1}{2}-t)dt - \int_{1/2}^1 W(t-\frac{1}{2})dt = \\
 & = \int_0^p W(u)du + \int_0^{1-p} W(u)du - 2 \int_0^{1/2} W(u)du = \\
 & = \int_{1/2}^p W(u)du - \int_{1-p}^{1/2} W(u)du = \int_{1/2}^p [W(u) - W(u-p+\frac{1}{2})]du \geq 0.
 \end{aligned}$$

Jeżeli rozbijemy odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $k$  przedziałów  $(a_{i-1}, a_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $a_0 = 0, a_k = 1$ ) i za ocenę wartości  $x$  będziemy brali środki tych przedziałów, to dla rozkładu a priori  $\varphi(t) \equiv 1$  oczekiwana wartość wypłaty będzie równa

$$E(W) = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} W\left(\left|t - \frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right|\right) dt.$$

Pokażemy, że osiągnie ona minimum, gdy przedziały  $(a_{i-1}, a_i)$  będą miały jednakową długość. W tym celu oznaczymy  $\Delta_i = a_i - a_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} W \left( \left| t - \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right| \right) dt - \sum_{i=1}^k \int_{(i-1)/k}^{i/k} W \left( \left| t - \frac{1}{2} \left( \frac{i-1}{k} + \frac{i}{k} \right) \right| \right) dt = \\
 & = \sum_{i=1}^k \left[ \int_0^{\Delta_i} W \left( \left| u - \frac{\Delta_i}{2} \right| \right) du - \int_0^{1/k} W(|u - 1/2k|) du \right] = \\
 & = 2 \sum_{i=1}^k \left[ \int_0^{\Delta_i} W(v) dv - \int_0^{1/2k} W(v) dv \right] = \\
 & = 2 \sum_{\substack{j \\ \Delta_{i_j} \geq 1/k}} \int_{1/2k}^{\Delta_{i_j}} W(v) dv - 2 \sum_{\substack{j \\ \Delta_{i_j} < 1/k}} \int_{\Delta_{i_j}^{1/2}}^{1/2k} W(v) dv \geq \\
 & \geq 2 \sum_{\substack{j \\ \Delta_{i_j} \geq 1/k}} \left( \frac{\Delta_{i_j}}{2} - \frac{1}{2k} \right) W \left( \frac{1}{2k} \right) - 2 \sum_{\substack{j \\ \Delta_{i_j} < 1/k}} \left( \frac{1}{2k} - \frac{\Delta_{i_j}}{2} \right) W \left( \frac{1}{2k} \right) = \\
 & = 2 \sum_{i=1}^k \left( \frac{\Delta_i}{2} - \frac{1}{2k} \right) W \left( \frac{1}{2k} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Z wzoru (8) wynika, że najlepszą oceną punktu  $x$  w stosunku do rozkładu jednostajnego jest wybór środka tego przedziału, w którym znajduje się punkt  $x$ . Z (9) wynika, że najlepszym podziałem dla rozkładu jednostajnego jest podział na jednakowe odcinki. Kładąc więc  $k = 2^n$  i korzystając z uwagi w dowodzie twierdzenia 2 otrzymamy tezę, że relatywnie najlepszym układem  $(g, h)$  do rozkładu jednostajnego jest układ (6), (7).

Pozostaje zagadnienie liczby  $n$ . Przypuśćmy, że  $i$ -ty akt porównawczy kosztuje  $l(i)$  złotych ( $i = 1, 2, \dots$ ), a strata związana z błędem  $|x - z|$  wynosi  $W(|x - z|)$  złotych. Ile ma być aktów porównawczych? Minimaks każe brać  $n = n_0$ , które minimizuje  $W(1/2^{n+1}) + \sum_{i=1}^n l(i)$ . Dla  $W(u) \equiv u$  i  $l(i) = \alpha > 0$ ,  $n_0 = [\log_2(1/\alpha) - 1]$ , gdy  $\alpha \leq 1/4$ , i  $n_0 = 0$ , gdy  $\alpha > 1/4$ .

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 5. 9. 1957

Х. ШТАЙНХАУЗ и С. ТРЫБУЛА (Вроцлав)

*ИЗМЕРЕНИЕ ПУТЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СРАВНЕНИЙ*

РЕЗЮМЕ

Предыдущая статья дает решение нескольких практических вопросов из области приближенных измерений некоторых величин методами теории игр. Например, сравниваем некоторую неизвестную величину  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  последовательно с известными величинами  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . На основе этих сравнений определяем приближенное значение  $x'$  величины  $x$ . Надо выбрать функции  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и оценку  $x'$  таким образом, чтобы  $W(|x-x'|)$  принимало наименьшее значение. Эту задачу можно рассматривать как игру человека против природы. В этой игре человек выбирает  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и  $x'$ , а природа выбирает  $x$ . Человек платит природе  $W(|x-x'|)$ . Доказывается, что если  $W$  есть возрастающая функция переменной  $|x-x'|$ , то наилучшей в смысле минимакса стратегией для человека является следующая:  $t_1 = 1/2$ ,  $t_2$  равно середине интервалов  $\langle 0, 1/2 \rangle$  или  $\langle 1/2, 1 \rangle$  в зависимости от того, в котором из этих интервалов лежит  $x$ , и т. д.;  $x'$  равно середине интервала, полученного после  $n$  шагов. Если  $x$  есть случайная величина с равномерным распределением, то та же самая стратегия дает минимум ожидаемого значения  $[W(|x-x'|)]$ .

Дается несколько практических следствий этих (и подобных) результатов.

---

H. STEINHAUS and S. TRYBUŁA (Wrocław)

*MEASUREMENT BY SUCCESSIVE COMPARISON*

SUMMARY

The paper gives the solution, by the methods of the theory of games, of a few practical problems in the sphere of approximate measurements of certain quantities. E. g., we compare successively an unknown quantity  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  with known quantities  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . On the basis of the results of those comparisons we give the approximate value of  $x'$ . The functions  $t_1, t_2, \dots, t_n$  and the estimate  $x'$  should be chosen so as to minimize  $W(|x-x'|)$ . This problem may be regarded as a game of man against nature, in which man chooses  $t_1, t_2, \dots, t_n$  and  $x'$ , and nature chooses  $x$ . Man pays to nature  $W(|x-x'|)$ . We prove that if  $W$  is an increasing function of the argument  $|x-x'|$ , then the best strategy in the minimax sense for man is  $t_1 = 1/2$ ,  $t_2$  equal to the centre of the segment  $\langle 0, 1/2 \rangle$  or  $\langle 1/2, 1 \rangle$ , according to whether the point  $x$  is in the first or in the second of those intervals, etc., and  $x'$  is equal to the centre of the segment obtained after  $n$  steps. If  $x$  is a random variable with a uniform distribution, then the same strategy minimizes the expected value of  $[W(|x-x'|)]$ .

A few practical consequences of those and similar results are given.

---

In the sequel we employ the coefficients and the determinant of the first fundamental form which we have computed to be

$$(1.6) \quad \begin{aligned} A(\xi, \eta) &= \sqrt{x_1^2 + f^2[y(\eta)]}, & B(\xi, \eta) &= y'(\eta)\sqrt{1 + (\kappa\xi\eta)^2}, \\ C(\xi, \eta) &= y'(\eta)\sqrt{x_1^2 + (x_1\kappa\xi\eta)^2 + f^2[y(\eta)]}; & \kappa &= f'(k). \end{aligned}$$

**2. The equations of equilibrium of the conoidal shell.** We shall apply the general equations of the equilibrium of a thin shell in arbitrary curvilinear coordinates. These equations written in invariant form may be found in [6]. For our purpose it is not necessary to write them down. Let us denote the technical components of the stress tensor by  $S, T_1, T_2$  (fig. 2) and the components of the exterior loads in the fixed coordinate system  $Oxyz$  by  $X^*, Y^*, Z^*$ . In the sequel we shall not use the variables  $X^*, Y^*, Z^*$  but the following functions of them, regarded as functions of  $\xi, \eta$ :

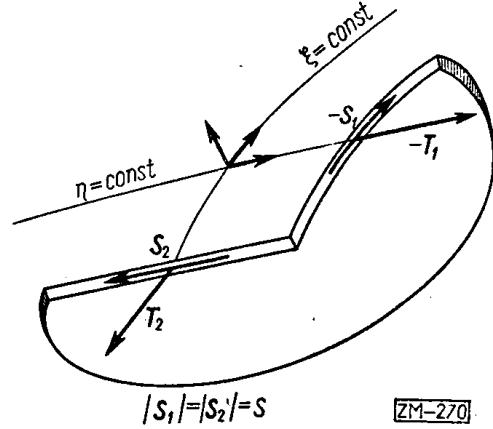


Fig. 2

$$(2.1) \quad \begin{aligned} X(\xi, \eta) &= CX^*, & Y(\xi, \eta) &= CY^*, \\ Z(\xi, \eta) &= C \left[ Z^* - \frac{1}{x_1} f(y) X^* - \kappa \xi \eta Y^* \right]. \end{aligned}$$

In our case the equations of the equilibrium of the conoidal shell are the following ones:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{B}{A} T_1 \right) + x_1 \frac{\partial S}{\partial \eta} + X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{y' A}{B} T_2 \right) + y' \frac{\partial S}{\partial \xi} + Y &= 0, \\ \xi y' \frac{A}{B} T_2 + 2\eta y' S + \frac{1}{\kappa} Z &= 0. \end{aligned}$$

Eliminating  $T_2$  from the last two equations, we get

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (y' S) - 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} (y' S) - 2y' S - \frac{1}{\kappa} Z'_\eta + \xi Y &= 0, \\ \xi y' \frac{A}{B} T_2 + 2\eta y' S + \frac{1}{\kappa} Z &= 0, & x_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{B}{A} T_1 \right) + x_1 \frac{\partial S}{\partial \eta} + X &= 0. \end{aligned}$$